YUESHU XITONG DE
LIANGZI
DUICHEN XINGZHI

李子平　李爱民◎著

约束系统的量子对称性质

北京工业大学出版社

YUESHU XITONG DE

LIANGZI

DUICHEN XINGZHI



ISBN 978-7-5639-2757-9

定价：45.00元

约束系统的量子对称性质

李子平　李爱民　著

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书在扼要介绍约束系统的经典和量子理论的基础上，着重论述了该系统的量子对称性. 书中对作者及合作者等的论文作了系统的归纳整理，特别是对作者通过完成多项自然科学基金项目研究，开创的约束系统的量子正则对称性质，作了较系统、全面、深入的阐述，并以杨-Mills 理论和 Chern-Simons(分数自旋)理论等为例作了较深入的分析.

本书还论述了含附加约束的奇异 Lagrange 量系统的基本理论和对称性. 本书学术思想新颖，内容范围集中，结构系统严谨.

本书不仅适合大学物理专业高年级本科生和研究生使用，还适合从事理论物理、数学物理、场和粒子物理理论、凝聚态物理理论，以及数学、力学等相关专业的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

约束系统的量子对称性质/李子平，李爱民著. 一北京：
北京工业大学出版社，2011.6
ISBN 978-7-5639-2757-9

Ⅰ.①约… Ⅱ.①李… ②李… Ⅲ.①量子力学-约束条件-研究 Ⅳ.①O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 099763 号

约束系统的量子对称性质

著　　者：李子平　李爱民
责任编辑：吕小红　刘津瑜　刘鹏飞
出版发行：北京工业大学出版社
（北京市朝阳区平乐园 100 号　100124）
010—67391722（传真）bgdcbs@sina.com
出 版 人：郝　勇
经销单位：全国各地新华书店
承印单位：徐水宏远印刷有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：25.5
字　　数：458 千字
版　　次：2011 年 6 月第 1 版
印　　次：2011 年 6 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5639-2757-9
定　　价：45.00 元

前言

关于物理系统对称性的分析在众多领域中均有重要意义，特别是在微观粒子的性质及其运动规律的探索中尤为突出（描述微观高速运动粒子的基本理论是量子场论）. 对称性是现代量子场论中的基本概念，物理学从经典理论发展到量子理论，对称性的研究也从连续对称扩展到分立对称. 系统具有某种对称性与系统相应的守恒律紧密相关，传统的经典 Noether 理论涉及的是系统在位形空间中的连续对称性，并且系统不含约束情形（约束是指系统的运动中所受的某些条件的限制，这些条件称为约束条件）. 约束条件分为两类：一类是位形空间描述时的附加条件，例如，力学中的完整约束和非完整约束，场论中的场量满足的附加条件；另一类是相空间中描述时出现的正则约束，例如，由奇异 Lagrange 量描述的系统，尽管在位形空间中的 Lagrange 体制描述时，不存在附加约束，但由 Legendre 变换过渡到相空间中 Hamilton 体制描述时，其正则变量之间存在着某些正则约束关系，该系统称为约束正则系统或约束 Hamilton 系统，所有规范理论（规范不变系统）均属于此种情形.

系统的量子化通常是由相空间中的正则变量来表达的，但由于系统存在约束，初等量子力学中的量子化方案已不适用，并且约束系统的量子理论也出现许多新问题，长期以来一直受到人们广泛地关注，因此约束系统的基本理论在现代量子场论中占有十分重要的地位. 约束系统的经典和量子正则对称性，此前在国内外尚无人从事研究.

本书作者多年对约束系统（包括附加约束和正则约束）的经典和量子基本理论以及对称性质进行了研究，深感相空间中对称性的分析具有更基本的意义，进而系统、深入地研究了约束系统在相空间中的经典和量子正则对称性，并主持完成了多项自然科学基金项目，同时在国内外发表学术论文百余篇，在国内外取得了一系列开创性的理论研究成果. 关于约束系统的经典对称性 10 多年前作者曾出版了专著总结其研究成果，其中仅部分涉及量子对称性，而关于约束系统的量子对称性的研究，目前仅散见于国内外学术期刊上，至今尚未见到国内外有这方面的专著出版. 本书将在扼

要介绍约束系统基本理论的基础上，着重论述约束系统的量子对称性（特别是量子正则对称性），并将散见在杂志文献中的关于约束系统量子对称性的论文作了全面系统的整理和论述，特别是汇集了10余年来作者及其合作者在约束系统的量子对称性方面的研究成果，可以说本书的撰写是作者早先出版的相关专著的继续扩充和发展.

本书在前两章中简略介绍了正则约束系统（约束 Hamilton 系统）的 Dirac 理论，讨论了 Dirac 猜想是否有效，阐述了 Dirac 括号量子化方案和 Faddeev-Jackiw 量子化方案，论述了此两种正则（算符）量子化的等价性，并在路径积分量子化方案中，阐述了规范系统的 Faddeev-Popov 路径积分量子化、正则约束系统的 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化和 Batalin-Fradkin-Vilkovisky 路径积分量子化方案. 在第三、四章中分别论述了一阶微商和高阶微商奇异 Lagrange 量系统（均为正则约束系统）的量子对称性质，并且分别从位形空间和相空间中的 Green 函数生成泛函出发进行论述，建立了整体变换、定域变换和非定域变换下的 Ward 恒等式，其中包括广义正则 Ward 恒等式. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本，无须作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，利用正则 Ward 恒等式，即可导出 Green 函数之间的关系，这比传统的处理具有显著优点和普遍的意义. 此外，还建立了对称性和量子守恒律相关联理论，指出了约束系统经典理论出现量子反常的根源，导出了约束系统的量子 Noether 恒等式和量子 Poincaré-Cartan 积分不变量等，并以杨-Mills理论和 Chern-Simons 理论为例作了深入的分析，论述了 Chern-Simons 理论中存在的分数自旋问题（这些论述是量子场论水平上的）. 本书最后一章论述了含附加约束奇异 Lagrange 量系统（包括一阶微商和高阶微商系统）的对称性质，同时对该系统提出了一种计算相空间约束的修改 Dirac-Bergmann 算法，并试图将该系统纳入正则约束系统（约束 Hamilton 系统）框架，给出了正则约束系统对称性的各种推广。本章还论述了场论中含附加约束奇异 Lagrange 量系统量子水平的变换性质，并给出了“横移效应”中的应用（量子修正）.

采用传统记法，书中对 Dirac γ-矩阵等仍用白体。

本书的内容在硕士研究生和博士研究生的教学中曾多次讲授，撰写本书得到隆正文教授、江金环博士和张莹博士的支持和帮助，责任编辑刘鹏飞、吕小红和刘津瑜对书稿进行了细致校对，作者在此对他们表示衷心的感谢.

李子平

目　录

第 1 章

奇异 Lagrange 量系统的正则约束

系统所受的约束分内在约束和外在约束两种情形. 用奇异 Lagrange 量描述的系统(包括所有定域规范不变系统),通过 Legendre 变换,从位形空间的 Lagrange 体制过渡到相空间中的 Hamilton 体制描述时,其正则变量间必定存在固有的正则约束(内在约束)——约束 Hamilton(哈密顿)系统或正则约束系统. 本章简要叙述:约束 Hamilton 系统的 Dirac 理论;求奇异 Lagrange 量系统正则约束的 Dirac-Bergmann 算法;约束的分类;第一类约束和规范变换;Dirac 猜想及其反例;正则对称性(正则 Noether 定理和正则 Noether 恒等式);场论中的奇异 Lagrange 量系统;电磁场、标量电动力学和杨-Mills 场的正则约束.

1-1 对称性原理 约束系统

对称性是一个基本概念,它广泛存在于物理学中的众多领域,特别是在现代量子场论中. 物理学各领域中有各种不同的定律和规则,它们是有层次的. 经验性的定律和规则是较低层次的,经典力学中的 Newton 定律和电磁学中的 Maxwell 方程等则是较高层次的,对称性原理则是凌驾于这些基本规律之上的更高层次的法则. 力学中孤立系中的能量守恒、动量守恒、角动量守恒可以从 Newton 定律导出,但也可从时空对称性得到,因而具有普遍意义,这些守恒律在微观粒子运动中也成立.

物理系统所处的状态和运动规律常常以某些对称性质作为其基本特征. 对物理系统所具有的对称性的研究,在物理学的众多领域内都具有重要意义,例如,几何对称性在晶体结构的研究中占有重要地位. 物理规律的对称性研究是对称理论的重要方面. 历史上,力学规律在 Galileo 变换下的不变性,所代表的力学相对性原理,是经典力学的重要支柱. 随着相对论的发展,人们进一步认识到对称性(不变性)原理与物理规律之间存在紧密联系,例如,狭义相对论要求,物理规律应该是 Lorentz 协变的. 量子力学和量子场论的发展,使对称性原理深入到微观物理学领域,成为探索微观粒子运动规律的重要原理之一. 在原子核物理学和粒子物理学中,对称性理论的重要性就更为突出. 在物理学中对称性理论的研究是多方面的,其中一个重要方面是对称性和守

恒律的联系.物理规律对称性的数学形式体现为系统的运动方程(或作用量)在某种对称群下不变,可导致系统的某种守恒量存在.连续对称性所联系的守恒律可分为时空对称和内部对称两类.重要的时空对称群有 Poincaré 群和共形群等.时空的均匀性和空间各向同性产生能量、动量和角动量守恒,共形对称群也存在相应的守恒量.重要的内部对称群有 U(1)、SU(2)、SU(3)群等,它们所联系的守恒量有电荷、同位旋和幺旋等.这些来源于对称性的守恒荷也称为 Noether 荷.

量子力学中,应用群论这种数学工具是处理量子体系对称性的重要工具.量子体系的好量子数(守恒量)、能级的简并性、具有某种对称性的力学量的矩阵元计算、跃迁概率及选择定则等,都与体系的对称性密切相关.量子体系的几何对称对于研究原子和分子光谱学(矢量模型、角动量和宇称选择定则等),以及周期场对称性的研究对于了解晶体的导电性等,都具有重要意义.对于变形原子核的轴对称性和空间反射不变性的研究,使人们对于原子核转动谱及相应的电磁跃迁的认识,深入了一大步.除了空间几何对称性之外,量子力学中还出现了另外一些新的更重要的对称性.它们在经典力学中,或者不出现,或者没有多大价值,其中最重要的是全同粒子的置换对称性.此对称性是由于量子态的描述与经典力学态的描述有根本性差异而造成的,在物理上则反映了微观粒子的波动性.

从量子场论的观点看,所有的(基本)粒子都是相应的场的量子,是场物质的基本形态.如果对所描写场的场量的对称变换在时空每一点上一齐施行,这样得到的对称性为整体对称性;如果在时空每一点上独立施行对称变换,这样所得到的对称性为定域对称性.经典理论到量子理论的发展,将连续对称的研究扩充到了分立对称的研究;微观领域规律的深入探索,将整体对称的分析扩充到了定域对称的分析.系统的整体对称性与系统存在的守恒律有密切联系;规范对称(定域不变性)制约了基本粒子的几种基本相互作用形式;坐标定域变换的不变性导致了广义相对论;Abel 规范对称性导致了电磁学;非 Abel 规范对称性导致了非 Abel 规范场;超对称性导致了 Fermi 子和 Bose 子之间的对称性理论;超对称性的定域化导致了超引力.

对称性分析是极其重要的研究方法.一方面,对称性与守恒律密切相关,一般来说一种对称性就对应着某种守恒律;另一方面,对称性不仅导致新的理论产生,而且可以使计算简化.

对系统运动守恒量的研究,传统的方法主要有:其一,直接从系统的运动微分方程出发研究 Lie 对称(Lie 对称,不一定导致系统的守恒量);其二,基于对称性所联系的 Noether 理论;其三,在力学中,从力学的微分、变分原理出

发，等等. 在许多情况下，从系统的对称性来求出系统的守恒量是十分有效的方法.

Noether[1]对不变性变分原理的研究证明，相应于每一个使系统泛函（系统作用量）不变的无穷小整体变换，必存在一个系统的守恒量. Noether 定理对于场论的发展有着重要的影响. 对于 Noether 定理的逆定理也已开展研究[1].

对动力学系统的描述有位形空间中的 Lagrange 体制和相空间中的 Hamilton 体制两种形式，后者在量子理论中有更重要的作用. 在对称性分析中，传统的研究是在位形空间中讨论的，且未考虑系统受约束的情况；而实际上，物理系统的运动往往受到约束的限制. 其约束分为两类：一类是位形空间中描述时，系统运动存在的附加条件（外在约束）. 如，力学中的几何约束和运动约束（或完整约束和非完整约束），连续介质力学中的热力学关系，场论中场变量满足的某些附加条件等（如非线性 σ-模型、CP^{N-1}模型等）. 另一类是相空间中描述时，正则变量间存在的固有约束（内在约束）. 众多的物理系统虽然在位形空间不存在附加约束，但过渡到相空间描述时，正则变量间却存在约束关系. 一般来说，用所谓奇异 Lagrange 量描述的系统（其中包括所有定域规范不变理论，如描述自然界四种基本相互作用的量子电动力学、量子味动力学、量子色动力学和引力理论等），以下简称为奇异系统，过渡到相空间描述时，其正则变量间存在固有约束，为正则约束系统或约束 Hamilton 系统. 在位形空间中，如果描述动力学系统的是正规 Lagrange 量，则称该系统为正规 Lagrange 量系统 . 对正规 Lagrange 量系统，如果受附加约束的限制，则称该系统为附加约束正规 Lagrange 量系统. 如果描述动力学系统的是奇异 Lagrange 量，则称该系统为奇异 Lagrange 量系统 . 对受附加约束限制的奇异 Lagrange 量系统，则称为附加约束奇异 Lagrange 量系统（简称为附加约束奇异系统）. 对上述各种受约束的动力学系统统称为约束系统. 约束 Hamilton 系统的基本理论在现代物理学中，特别是在量子场论中占有十分重要的地位.

约束 Hamilton 系统的正则对称性仍可表现在存在某些守恒律和恒等式等多种形式. 系统相空间中的整体对称性（不变性），导致了正则形式的 Noether 定理；系统相空间中的定域不变性，导致了正则形式的 Noether 恒等式. 经典 Noether 定理及其推广的传统方式均是在位形空间中表述的[1]，位形空间 Noether 定理和相空间 Noether 定理的不同特点是：分析该系统在相空间中的对称性质，可由相空间中的 Noether 定理导出其相应的守恒量，而这种相空间中的对称性质，在位形空间中往往又不明显呈现出来[2]. 在经典理论方面，目前已经建立了相空间中正则形式的 Noether 定理和 Poincaré-Cartan

(PC)积分不变量等，并已推广到了高阶微商系统，以及在非定域变换下的广义 Noether 定理和正则 Noether 恒等式等[3-7].

微观粒子的运动是用量子理论来描述的，经典理论的一些重要结果，在量子理论中是否仍然成立，或者在什么条件下仍然成立，是一个值得讨论的问题. 对量子场论系统，其对称性规律一般可表为量子守恒律和 Ward 恒等式（或称 Ward-Takahashi 恒等式）以及量子 PC 积分不变量等. 该恒等式及其推广在现代量子场论中占有重要地位，它是证明理论可重整化的重要工具. 目前已建立了动力学系统的正则 Noether 定理的量子形式表述，相空间中定域、非定域和整体变换下的正则 Ward 恒等式，量子正则 Noether 恒等式和 PC 积分不变量等也已给出，正则量子对称理论已经建立起来（包括高阶微商理论）[8-25]. 该量子对称理论均采用了相空间路径积分量子化方法，其优点在于无须作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分. 相空间路径积分量子化方法出现的是经典的数，这对研究系统的量子对称性质比较方便. 从路径积分导出的量子守恒律，也可以是用位形空间中的变量来表述，但它仅适用于相空间中路径积分关于正则动量的积分为 Gauss 型的情形. 一般对约束 Hamilton 系统要作出对正则动量的路径积分是十分困难的，甚至是不可能的. 相空间中路径积分比位形空间中路径积分更基本，由此所建立的量子正则对称理论也就具有更普遍的意义了.

本书前 4 章阐述不含附加约束的奇异 Lagrange 量描述的系统（约束 Hamilton 系统）的基本理论，着重论述了该系统的量子对称性（特别是量子正则对称性）. 第 5 章论述了含附加约束的奇异 Lagrange 量系统的对称性（包括高阶微商理论）. 当该系统的附加约束与系统的固有正则约束相容时，提出了一种修改的 Dirac-Bergmann 算法，试图将该系统纳入约束 Hamilton 系统的理论框架进行量子化，进而研究该系统的量子正则对称性.

1-2 约束 Hamilton 系统

对奇异 Lagrange 量系统正则形式的研究始于 Dirac 对动力学齐次变量的早期分析，他从用奇异 Lagrange 量描述系统，过渡到相空间用正则变量描述时，发现其正则变量间存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统. 关于这方面早期的工作还有 Bergmann 等人研究，他们阐明了约束和不变性的关系. Dirac 和 Bergmann 等人的工作奠定了约束系统的动力学及其量子化的基础[26-28]. Shanmugadhasan 分析了奇异性对 Lagrange 方程的影响，并给出了相应的 Hamilton 形式；Kamimura 建立了 Lagrange 约束和 Hamilton 约束间

的关系[2]；Sudarshan 和 Mukunda 从现代数学观点，详细讨论了 Dirac 括号的结构[29]. 至今已有少量著作较完整地阐述了约束系统及其量子化的基本理论[30-33]. 其他作者的著作中未涉及的，乃是本书着重阐明的约束 Hamilton 系统的量子正则对称性质.

约束 Hamilton 系统的基本理论，在理论物理中，特别是现代量子场论(如规范场论)中占十分重要的地位. 众多的物理系统在相空间描述时，其正则变量间存在固有约束，如相对论粒子满足的"质壳"条件，电磁学和杨-Mills 场论中的 Gauss 约束，广义相对论中的超 Hamilton 量和超动量约束，弦理论中的 Virasor 条件等. 规范理论(具有定域不变性)在描写自然界基本相互作用中占重要地位. 一切定域不变系统的 Lagrange 量均是奇异的(包括描述自然界四种基本相互作用的量子电动力学(QED)、量子味动力学(QFD)、量子色动力学(QCD)、引力理论(GR))，这些系统均属约束 Hamilton 系统. 约束 Hamilton 系统在相空间存在固有约束，传统的无正则约束情况的量子化方法不能直接用于该系统，虽然该系统量子化中的主要问题已解决，但是有关约束 Hamilton 系统理论中的若干基本问题仍在文献中经常讨论[34]. 这里先简略介绍约束 Hamilton 系统的经典理论.

对动力学系统的描述有两种体制：一种是 Lagrange 体制，系统的运动满足 Euler-Lagrange(EL)方程；另一种是 Hamilton 体制，系统的运动满足正则方程. 对正规 Lagrange 量系统，这两种描述是等价的，体系的 Lagrange 形式可以通过 Legendre 变换过渡到 Hamilton 形式，通过量子化从经典理论过渡到量子理论，但是对于含有约束的系统，不能直接按初等量子力学的方法进行量子化. 约束系统的量子化方案有算符形式正则量子化和路径积分形式量子化，这些内容将在下一章中讨论.

设系统的 Lagrange 量为 $L(q^i,\dot{q}^i)$，其中 $q^i(i=1,2,\cdots,n)$ 为广义坐标，$\dot{q}^i=\mathrm{D}q^i=\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}$ 为广义速度. 这里假设 Lagrange 量不显含时间，则系统的作用量

$$I=\int\mathrm{d}t\,L(q^i,\dot{q}^i) \tag{1-2-1}$$

与广义坐标 q^i 相对应的正则共轭动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i} \tag{1-2-2}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c=p_i\dot{q}^i-L \tag{1-2-3}$$

式中重复指标代表求和.

定义 Hess 矩阵的矩阵元

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j} \tag{1-2-4}$$

当 $\det|H_{ij}|\neq 0$ 时,Hess 矩阵是非退化的,其 Lagrange 量为正规 Lagrange 量. 按最小作用原理由式(1-2-1)可得 EL 方程

$$\frac{\delta I}{\delta q^i}=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)=0 \tag{1-2-5}$$

式(1-2-5)也可以表示为

$$H_{ij}(q^i,\dot{q}^j)\ddot{q}^j=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\dot{q}^j \tag{1-2-6}$$

此时能解出所有 $\ddot{q}^j$,同时过渡到 Hamilton 描述时,能由式(1-2-2)解出所有 $\dot{q}^i$. 当 $\det|H_{ij}|=0$ 时,Hess 矩阵是退化的. 如果 Hess 矩阵为 n 阶矩阵,设矩阵的秩为 R,那么从式(1-2-2)可解出 R 个 $\dot{q}^\sigma$ 作为 $q^i,p_\sigma,\dot{q}^\rho$ 的函数

$$\dot{q}^\sigma=f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho)$$
$$(\sigma,\alpha=1,2,\cdots,R;\rho=R+1,\cdots,n) \tag{1-2-7}$$

将式(1-2-7)代入式(1-2-2),则有

$$p_i=g_i(q,\dot{q}^\sigma,\dot{q}^\rho)=g_i[q,f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho),\dot{q}^\rho]=g_i(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho) \tag{1-2-8}$$

显然,当 $i=1,2,\cdots,R$ 时,式(1-2-8)为一恒等式. 当 $i=\rho$ 时,其他$n-R$ 个 g_ρ 将不再依赖于 $\dot{q}^\rho$,不然的话,将会解出更多的 $\dot{q}^i$,与原假设矛盾. 这样就得到 $n-R$ 个坐标和动量之间的关系式,即

$$p_\rho=g_\rho(q,p_\alpha)\qquad(\rho=1,2,\cdots,n-R) \tag{1-2-9}$$

或记为

$$\phi_a^0(q,p)=p_a-g_a(q,p_\alpha)=0$$
$$(a=1,2,\cdots,n-R) \tag{1-2-10}$$

式(1-2-9)和式(1-2-10)给出了正则变量的 $n-R$ 个约束关系,它们来源于正则动量的定义式(1-2-2),并称式(1-2-10)为初级约束. 值得注意的是,在得到初级约束时,并没有利用系统的运动方程,用奇异 Lagrange 量描述的系统,在相空间描述时,正则变量间必存在固有约束,即为约束 Hamilton 系统.

考虑式(1-2-3)的正则 Hamilton 量的变分和式(1-2-5)的 EL 方程,有

$$\delta H_c=p_i\delta\dot{q}^i+\dot{q}^i\delta p_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i=$$
$$\dot{q}^i\delta p_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i \tag{1-2-11}$$

这里利用了式(1-2-2). 由式(1-2-3),有

$$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{1-2-12}$$

可见，按式(1-2-2)、式(1-2-3)，无论是正规 Lagrange 量还是奇异 Lagrange 量系统，其正则 Hamilton 量均为 q,p 的函数[2]. 这样，又有

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i \tag{1-2-13}$$

比较式(1-2-11)与式(1-2-13)可得

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0 \tag{1-2-14}$$

无论 Lagrange 量是否正规，均有式(1-2-5)，从而

$$\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{1-2-15}$$

将式(1-2-15)代入式(1-2-14)中，可得

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0 \tag{1-2-16}$$

又对于奇异 Lagrange 量系统，正则变量 q^i 和 p_i 之间存在约束关系式(1-2-10)，从而有

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \tag{1-2-17}$$

引入 Lagrange 乘子(或约束乘子) $\lambda^a(t)$，由式(1-2-16)、式(1-2-17)，可得约束 Hamilton 系统的正则方程，即

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \tag{1-2-18a}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} \tag{1-2-18b}$$

$$\phi_a^0(q,p) = 0 \tag{1-2-18c}$$

式中：$a=1,2,\cdots,n-R$. 利用 Poisson 括号

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{1-2-19}$$

式中：F 和 G 均为正则变量 q、p 的函数，那么式(1-2-18a)和式(1-2-18b)可表示为

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_T\} \tag{1-2-20a}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_T\} \tag{1-2-20b}$$

式中：$H_T = H_c + \lambda^a\phi_a^0$ 称为总 Hamilton 量. 在计算式(1-2-20)的 Poisson 括号时，必须在先算完 Poisson 括号后，再代入约束条件.

利用式(1-2-20)，正则变量的任一函数 $F(q,p)$ 随时间的演化可写为

$$\dot{F}=\frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i=\{F,H_{\mathrm{T}}\} \tag{1-2-21}$$

约束 Hamilton 系统的正则方程又可表示为另一种形式. 利用式(1-2-7)与式(1-2-9)，可将正则 Hamilton 量写为

$$H_c=p_i\dot{q}^i-L(q,\dot{q})=p_\sigma\dot{q}^\sigma+p_\rho\dot{q}^\rho-L(q,\dot{q}) \tag{1-2-22}$$

由正则动量的定义式(1-2-2)，可知

$$\frac{\partial H_c}{\partial\dot{q}^\rho}=0 \tag{1-2-23}$$

又

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_\sigma}=\dot{q}^\sigma+\dot{q}^\rho\frac{\partial g_\rho}{\partial p_\sigma} \tag{1-2-24a}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial q^i}=-\frac{\partial L}{\partial q^i}+\dot{q}^\rho\frac{\partial g_\rho}{\partial q^i} \tag{1-2-24b}$$

利用 EL 方程可将式(1-2-24)写为

$$\dot{q}^\sigma=\frac{\partial H_c}{\partial p_\sigma}-\dot{q}^a\frac{\partial g_a}{\partial p_\sigma} \tag{1-2-25a}$$

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H_c}{\partial q^i}+\dot{q}^a\frac{\partial g_a}{\partial q^i} \tag{1-2-25b}$$

式中：$\sigma=1,2,\cdots,R$；$a=R+1,\cdots,n$. 注意，式中未确定的任一函数 $\dot{q}^a(t)$ 相应于从正则动量的定义式 (1-2-2)未解出的那些 $\dot{q}^a(t)$. 由于约束条件式(1-2-10)的限制，正则 Hamilton 量 H_c 仅确定在整个相空间 Γ 中的一个子空间 Γ_{p} 中，系统的运动也是限制在子空间 Γ_{p} 中，为了去掉此种限制，利用弱等概念，可将方程扩充到整个相空间 Γ 中去.

设函数 $F(q,p)$ 和 $G(q,p)$ 定义在相空间 Γ 中，如果它们在约束所确定的子空间 Γ_{p} 上相等，那么就称函数 $F(q,p)$ 和 $G(q,p)$ 在 Γ 上弱等，并记为 $F\approx G$，其中“$\approx$”表示等式在 Γ_{p} 中成立. 如果在 Γ_{p} 上除 $F(q,p)$ 和 $G(q,p)$ 相等外，它们的梯度也相等，那么就称函数 $F(q,p)$ 和 $G(q,p)$ 强等，并记为 $F\simeq G$. 如果 $F(q,p)$ 是一个弱等于 0 的函数，即 $F\approx 0$，那么 F^2 必强等于 0，即 $F^2\simeq 0$. 利用弱等概念，约束 Hamilton 系统的正则方程式(1-2-25a)和式(1-2-25b)又可表示为

$$\dot{q}^i\approx\frac{\partial H_c}{\partial p_i}+\dot{q}^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i} \tag{1-2-26a}$$

$$\dot{p}_i\approx-\frac{\partial H_c}{\partial q^i}-\dot{q}^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i} \tag{1-2-26b}$$

比较式(1-2-18a)、式(1-2-18b)和式(1-2-25a)、式(1-2-25b)，可见 Lagrange 乘

子 $\lambda^a(t)$ 相应于式(1-2-2)未解出的 $\dot{q}^a(t)$.

1-3 Dirac-Bergmann 算法　约束分类

对于奇异 Lagrange 量系统,系统的运动应始终保持在由约束决定的相空间超曲面 Γ_p 上. 约束随时间的演化是稳定的,即初级约束的时间微商为零(沿约束系统的运动轨线),这样约束满足自洽性条件

$$\dot{\phi}_a^0 = \{\phi_a^0, H_T\} \approx 0 \tag{1-3-1}$$

式(1-3-1)可能出现的情况有:第一,得到平凡的等式;第二,得到两端不相等的不自洽结果,这种情况的出现,表明原有的 Lagrange 量会使得 EL 方程不自洽[1];第三,可解出某些 Lagrange 乘子 λ^a;第四,给出一些新的独立于式(1-2-10)的正则变量 q,p 间的约束关系. 这里我们只考虑最后一种情况,初级约束的自洽性条件给出新的次级约束

$$\phi_a^1(q,p) = \{\phi_a^0, H_T\} \approx 0 \tag{1-3-2}$$

次级约束同样满足自洽性条件,重复上面步骤,可逐次求得新的次级约束,即为

$$\phi_a^k(q,p) = \{\phi_a^{k-1}, H_T\} \approx 0 \tag{1-3-3}$$

直至次级约束 ϕ_a^m 满足

$$\phi_a^{m+1} = \{\phi_a^m, H_T\} = C_{ak}^b \phi_b^k \quad (k \leqslant m) \tag{1-3-4}$$

为止. 这就是 Dirac-Bergmann 求奇异 Lagrange 量系统约束的算法.

记全体独立的约束(包括初级约束 ϕ_a^0 和次级约束 ϕ_a^k)为

$$\psi_\alpha(q,p) \approx 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,j) \tag{1-3-5}$$

系统的运动被限制在相空间中一个约束超曲面 M 上. 式(1-3-5)代表 $\psi_\alpha(q,p)|_M = 0$. 按照 Dirac 的处理,将表达为 q,p 函数的力学量 $F(q,p)$ 分为两类,与每个约束的 Poisson 括号都弱等于 0 的量称为第一类量,即第一类力学量 $F(q,p)$ 适合

$$\{F(q,p), \psi_\alpha\} \approx 0 \tag{1-3-6}$$

不属于第一类的量为第二类量. 可以证明,两个第一类量的 Poisson 括号也是第一类的. 按约束在 Poisson 括号下的性质,所有约束也可分为两类,一个约束同时是第一类量的称为第一类约束,即第一类约束 Λ_a 适合

$$\{\Lambda_a, \Lambda_b\} \approx 0 \tag{1-3-7}$$

否则,称为第二类约束.

因为约束的线性组合给出约束关系,这样可以通过适当的线性组合,使

尽可能多的约束归于第一类约束. 对第二类约束 $\theta_i(q,p)$ 来说，有

$$\det|\{\theta_i,\theta_j\}|_M \neq 0 \tag{1-3-8}$$

事实上，假如式(1-3-8)不成立，那么方程组

$$u^i\{\theta_i,\theta_j\}|_M = 0 \tag{1-3-9}$$

就有非零解 u^i，于是有

$$\{u^i\theta_i,\theta_j\}|_M = 0 \tag{1-3-10}$$

这里 $u^i\theta_i$ 就应属于第一类约束，这与假设相矛盾. 此外，由第二类约束的相容性条件，有

$$\dot{\theta}_i|_M = \{\theta_i,H_{\mathrm{T}}\}|_M = \{\theta_i,H_{\mathrm{c}}\}|_M + \lambda^j\{\theta_i,\theta_j\}|_M = 0 \tag{1-3-11}$$

利用第二类约束的性质式(1-3-8)，可见 H_{T} 中与第二类约束 θ_j 相联系的乘子 λ^j 是完全确定的.

1-4 Dirac 括号

在约束 Hamilton 系统的量子化中，Dirac 括号起重要作用，从经典理论过渡到量子理论是通过 Dirac 括号对应量子括号来实现的. 同时，利用 Dirac 括号还可将约束 Hamilton 系统的经典正则运动方程表达得更简洁.

按 1-3 节的方法可求出全部约束，可将全部约束 ψ_a 分为第一类约束和第二类约束，其中第一类约束满足 $\{\Lambda_a,\Lambda_b\}\approx 0$，记初级第一类约束为 $\Lambda_{a_1}\approx 0$，次级第一类约束为 $\Lambda_{a_2}\approx 0$，即所有第一类约束为

$$\Lambda_a(q,p) = (\Lambda_{a_1},\Lambda_{a_2}) \approx 0 \qquad (a = 1,2,\cdots,A) \tag{1-4-1a}$$

记初级第二类约束为 $\theta_{b_1}\approx 0$，次级第二类约束为 $\theta_{b_2}\approx 0$，即所有第二类约束为

$$\theta_b(q,p) = (\theta_{b_1},\theta_{b_2}) \approx 0 \qquad (b = 1,2,\cdots,B) \tag{1-4-1b}$$

则总 Hamilton 量为

$$H_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{c}} + \lambda^a\phi_a^0 = H_{\mathrm{c}} + \lambda^{a_1}\Lambda_{a_1} + \lambda^{b_1}\theta_{b_1} \tag{1-4-2}$$

力学量 $F(q,p)$ 随时间的演化为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F,H_{\mathrm{T}}\} = \{F,H_{\mathrm{c}}\} + \lambda^{a_1}\{F,\Lambda_{a_1}\} + \lambda^{b_1}\{F,\theta_{b_1}\} \tag{1-4-3}$$

第一类约束条件和第二类约束条件随时间演化的稳定性条件为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Lambda_a}{\mathrm{d}t} = \{\Lambda_a,H_{\mathrm{T}}\} = \{\Lambda_a,H_{\mathrm{c}}\} + \lambda^{a_1}\{\Lambda_a,\Lambda_{a_1}\} + \lambda^{b_1}\{\Lambda_a,\theta_{b_1}\} = \\ \{\Lambda_a,H_{\mathrm{c}}\} \approx 0\end{aligned} \tag{1-4-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}t} = \{\theta_b,H_{\mathrm{T}}\} = \{\theta_b,H_{\mathrm{c}}\} + \lambda^{a_1}\{\theta_b,\Lambda_{a_1}\} + \lambda^{b_1}\{\theta_b,\theta_{b_1}\} =$$

$$\{\theta_b, H_c\} + \lambda^{b_1}\{\theta_b, \theta_{b_1}\} \approx 0 \tag{1-4-5}$$

式(1-4-4)中与第一类约束相联系的 Lagrange 乘子 λ^{a_1} 是不确定的，不确定乘子 λ^{a_1} 的个数与第一类约束的个数相等．而与初级第二类约束相联系的乘子 λ^{b_1} 能完全由式(1-4-5)确定. 以所有第二类约束的 Poisson 括号为元素组成的矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \{\theta_{b_1}, \theta_{b'_1}\} & \{\theta_{b_1}, \theta_{b_2}\} \\ \{\theta_{b_2}, \theta_{b_1}\} & \{\theta_{b_2}, \theta_{b'_2}\} \end{bmatrix} \tag{1-4-6}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 在 M 上是非奇异的，其逆矩阵为 $\boldsymbol{C}^{-1}$，$(\boldsymbol{CC}^{-1}=1)$，则

$$c_{bb'}c^{-1}_{b'b''} = \delta_{bb''} \tag{1-4-7}$$

由式(1-4-5)和式(1-4-7)，有

$$\lambda^{b_1} \approx -c^{-1}_{b_1 b}\{\theta_b, H_c\} \tag{1-4-8}$$

和

$$c^{-1}_{b_2 b}\{\theta_b, H_c\} \approx 0 \tag{1-4-9}$$

将式(1-4-8)代入式(1-4-3)，得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F, H_c\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - c^{-1}_{b_1 b'}\{\theta_{b'}, H_c\}\{F, \theta_{b_1}\} \tag{1-4-10}$$

借助于式(1-4-9)，可得所有第二类约束的对称形式，即

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F, H_c\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - c^{-1}_{b'b}\{\theta_b, H_c\}\{F, \theta_{b'}\} \tag{1-4-11}$$

初级第一类约束和所有第二类约束出现在式(1-4-11)中．引入 Dirac 括号，可以将运动方程式(1-4-11)表示为更简洁的形式．设 $F(q,p)$ 和 $G(q,p)$ 是正则变量的函数，其 Dirac 括号定义为

$$\{F,G\}_{\mathrm{D}} = \{F,G\} - \{F,\theta_i\}c^{-1}_{ij}\{\theta_j, G\} \tag{1-4-12}$$

式中：$\{\cdot,\cdot\}$ 是 Poisson 括号，θ_i 为第二类约束．Dirac 括号具有与 Poisson 括号相似的性质. 对任意的 $F(q,p)$ 有 $\{F(q,p),\theta_i\} = 0$. 用式(1-4-12)，运动方程式(1-4-11)可写为

$$\dot{F} = \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} + \{F, H_c\}_{\mathrm{D}} \tag{1-4-13}$$

在不含第一类约束的情况下，其运动方程为

$$\dot{F} = \{F, H_c\}_{\mathrm{D}} \tag{1-4-14}$$

对 Lagrange 量 $L(t;q,\dot{q})$ 显含时间的系统，初级约束 $\phi^0_a(t;q,p)$ 也显含时间，初级约束的相容性条件为

$$\frac{\mathrm{d}\phi^0_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi^0_a}{\partial t} + \{\phi^0_a, H_c\} + \lambda^{a'}\{\phi^0_a, \phi^0_{a'}\} \approx 0 \tag{1-4-15}$$

式(1-4-15)可以给出次级约束，由次级约束的相容性条件又可以给出其他的次级约束等. 次级约束的相容性条件由类似于式(1-4-15)给出. 全部约束也可

分为第一类约束 $\Lambda_a \approx 0$ 和第二类约束 $\theta_b \approx 0$. 它们的相容性条件为

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Lambda_a}{\partial t} + \{\Lambda_a, H_c\} \approx 0 \tag{1-4-16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_b}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \lambda^{b_1}\{\theta_b, \theta_{b_1}\} + \{\theta_b, H_c\} \approx 0 \tag{1-4-17}$$

相空间的任意物理量 $F(t;q,p)$ 随时间的演化为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} + \lambda^{b_1}\{F, \theta_{b_1}\} \tag{1-4-18}$$

方程式(1-4-18)能够写成对称的形式,即

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_c\} + \lambda^{a_1}\{F, \Lambda_{a_1}\} - \{F, \theta_{b'}\}\, c^{-1}_{b'b}\left[\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right] \tag{1-4-19}$$

显含时间的约束正则系统的正则方程可写为

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^{a_1}\frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial p_i} - \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial p_i} c^{-1}_{b'b}\left[\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right] \tag{1-4-20}$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^{a_1}\frac{\partial \Lambda_{a_1}}{\partial q^i} + \frac{\partial \theta_{b'}}{\partial q^i} c^{-1}_{b'b}\left[\{\theta_b, H_c\} + \frac{\partial \theta_b}{\partial t}\right] \tag{1-4-21}$$

这里与第一类约束相联系的 Lagrange 乘子 λ^{a_1} 未确定.

1-5 第一类约束和规范变换

电磁场和杨-Mills 场等一些重要的物理系统均具有定域规范对称性,它们为约束 Hamilton 系统,分析它们所含的第一类约束,可以生成相应的规范变换(见 3-1 节). 下面讨论有限自由度系统.

先考察约束的自洽性方程对 Lagrange 乘子的限制,并且不限定仅含第一类约束的情形. 现将初级和次级约束记为

$$\psi_j(q,p) = (\phi_a^0, \phi_a^k) \approx 0 \tag{1-5-1}$$

由约束的自洽性条件有

$$\{\psi_j, H_c\} + \lambda^a\{\phi_j, \phi_a^0\} = 0 \tag{1-5-2}$$

假如式(1-5-2)是那种不能化为约束方程的情形,这时式(1-5-2)是一组系数 λ^a 应满足的方程组.

现假设乘子 λ^a 是未知的,式(1-5-2)是关于 λ^a 的非齐次线性方程,其系数是 q,p 的函数,则式(1-5-2)的通解为

$$\lambda^a = X^a(q,p) + \xi^{a'}(t)Y^a_{a'}(q,p) \tag{1-5-3}$$

式中：$X^a(q,p)$ 为方程式(1-5-2)的特解；$Y^a_{a'}(q,p)$ 为式(1-5-2)对应的齐次方程的通解，即

$$Y^a_{a'}\{\psi_j,\phi^0_a\} = 0 \tag{1-5-4}$$

式(1-5-3)中 $\xi^{a'}$ 为时间 t 的任意函数. 系数 $\xi^{a'}$ 的数目通常小于系数 λ^a 的数目. 将式(1-5-3)代入总 Hamilton 量 H_T 中，有

$$H_T = H_c + \lambda^a\phi^0_a = H' + \xi^{a'}\phi_{a'} \tag{1-5-5}$$

式中

$$H' = H_c + X^a\phi^0_a \tag{1-5-6}$$

$$\phi_{a'} = Y^a_{a'}\phi^0_a \tag{1-5-7}$$

力学量 $F(q,p)$ 随时间演化的运动方程为

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} \tag{1-5-8}$$

由式(1-5-8)看出，奇异 Lagrange 量系统的正则形式表述和正规系统有一个显著的不同之处：在给定初始条件后，奇异 Lagrange 量系统的正则方程的解中出现了含时间的任意函数 $\xi^{a'}(t)$. 由于

$$\{\phi_{a'},\psi_j\} = Y^a_{a'}\{\phi^0_a,\psi_j\} + \{Y^a_{a'},\psi_j\}\phi^0_a \approx Y^a_{a'}\{\phi^0_a,\psi_j\} \tag{1-5-9}$$

$$\{H',\psi_j\} = \{H_c,\psi_j\} + \{X^a\phi^0_a,\psi_j\} \approx$$
$$\{H_c,\psi_j\} + X^a\{\phi^0_a,\psi_j\} \tag{1-5-10}$$

根据式(1-5-4)和 X^a 是式(1-5-2)的特解，可得

$$\{\phi_{a'},\psi_j\} \approx 0 \tag{1-5-11}$$

$$\{H',\psi_j\} \approx 0 \tag{1-5-12}$$

$\phi_{a'}$ 和 H' 是第一类的. 这样，总 Hamilton 量可以由第一类 Hamilton 量 H' 和第一类约束 $\phi_{a'}$ 给出

$$H_T = H' + \xi^{a'}\phi_{a'} \tag{1-5-13}$$

运动方程的解中出现的含时间任意函数的数目，恰好等于独立的初级第一类约束的数目. $t=0$ 时其初值为 F_0 的动力学变量 $F(q,p)$，经过 δt 时间到 t 时刻的值为

$$F(t) = F_0 + \dot{F}\delta t = F_0 + \{F,H_T\}\delta t =$$
$$F_0 + (\{F,H'\} + \xi^{a'}\{F,\phi_{a'}\})\delta t \tag{1-5-14}$$

式中：系数 $\xi^{a'}$ 是完全任意的. 当选取不同值 $\bar{\xi}^{a'}$，可得到不同的 $\bar{F}(t)$，两者之差为

$$\Delta F(t) = \delta t(\xi^{a'} - \bar{\xi}^{a'})\{F,\phi_{a'}\} = \epsilon^{a'}\{F,\phi_{a'}\} \tag{1-5-15}$$

式中：$\epsilon^{a'} = \delta t(\xi^{a'} - \bar{\xi}^{a'})$. 这说明 $\xi^{a'}$ 不同的选取，相应的 $F(t)$ 和 $\bar{F}(t)$ 之间进

行了一个无穷小的正则变换(规范变换),这种变换不影响物理态.由此可见,第一类初级约束 $\phi_{a'}$ 是无穷小正则变换的生成元,它们导致正则变量 q,p 的改变,而这种改变不影响物理态.

如果考虑相继进行两次正则变换,先作一个生成元 $\varepsilon^{a'}\phi_{a'}$ 的正则变换,然后再做一个生成元为 $\omega^{a''}\phi_{a''}$ 的正则变换,最后得

$$\begin{aligned}\overline{F} = F_0 + \varepsilon^{a'}\{F,\phi_{a'}\} + \omega^{a''}\{F_0 + \varepsilon^{a'}\{F,\phi_{a'}\},\phi_{a''}\} + \\ O(\varepsilon^2) + O(\omega^2)\end{aligned} \tag{1-5-16}$$

将上述两次变换次序反过来,则有

$$\begin{aligned}\overline{\overline{F}} = F_0 + \omega^{a''}\{F,\phi_{a''}\} + \varepsilon^{a'}\{F_0 + \omega^{a''}\{F,\phi_{a''}\},\phi_{a'}\} + \\ O(\varepsilon^2) + O(\omega^2)\end{aligned} \tag{1-5-17}$$

由式(1-5-16)和式(1-5-17)之差,有

$$\Delta F = \varepsilon^{a'}\omega^{a''}(\{\{F,\phi_{a'}\},\phi_{a''}\} - \{\{F,\phi_{a''}\},\phi_{a'}\}) \tag{1-5-18}$$

利用 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式,得

$$\Delta F = \varepsilon^{a'}\omega^{a''}\{F,\{\phi_{a'},\phi_{a''}\}\} \tag{1-5-19}$$

由此可见,$\{\phi_{a'},\phi_{a''}\}$ 也可以作为无穷小正则变换生成元,它所生成的变换不影响物理态.约束 $\phi_{a'}$ 是第一类的,它们的 Poisson 括号弱等于 0.两个第一类量的 Poisson 括号也是第一类的[1],即 $\{\phi_{a'},\phi_{a''}\}$ 为第一类约束,它不仅可以是初级第一类约束,也可以是次级第一类约束.从式(1-5-19)推知,所有第一类约束(初级和次级)都可以作为正则变换的生成元,它们生成的变换不改变物理态,这就是著名的 Dirac 猜想[26].当系统不含第二类约束时,有人指出,所有第一类约束(初级和次级)均为为正则(规范)变换的独立的生成元,它们生成的变换既不改变系统的状态,也不影响规范不变的量[35].这样,规范变换的生成元可写为

$$G(t;q,p) = \varepsilon^a(t)\Lambda_a(q,p) \tag{1-5-20}$$

式中:$\Lambda_a(q,p)(a = 1,2,\cdots,K_1)$ 为所有第一类约束(初级的和次级的);$\varepsilon^a(t)$ 为任意无穷小函数.

现在回到式(1-5-1),出现在 H_T 中的 $\phi_{a'}$ 为初级第一类约束,它是规范变换的生成元.如果 Dirac 猜想成立,所有第一类约束都是规范变换的生成元,因而次级第一类约束 χ_A 也应加入到 Hamilton 量 H_T 中.对于仅含第一类约束的系统,设所含的初级第一类约束为 $\phi_a^0(a = 1,2,\cdots,n-R)$,次级第一类约束为 $\chi_A(A=1,2,\cdots,B_1)$,系统的运动方程应由扩展 Hamilton 量

$$H_E = H' + \lambda^a\phi_a^0 + \mu^A\chi_A = H' + \lambda^a\Lambda_a \tag{1-5-21}$$

导出[35].式(1-5-21)中 $\lambda^a(t)$ 和 $\mu^A(t)$ 为任意的 Lagrange 乘子,并记 $\lambda^a = (\lambda^a,$

μ^A). 系统运动的正则方程为

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_E\} \tag{1-5-22a}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_E\} \tag{1-5-22b}$$

考虑由扩展 Hamilton H_E 决定的正则作用量

$$I_E[q,p,\lambda] = \int dt(p_i\dot{q}^i - H_E) \tag{1-5-23}$$

第一类约束 $\Lambda_a(q,p)$ 生成的变换为

$$\delta q^i = \varepsilon^a(t)\{q^i, \Lambda_a\} \tag{1-5-24a}$$

$$\delta p_i = \varepsilon^a(t)\{p_i, \Lambda_a\} \tag{1-5-24b}$$

在式(1-5-24)变换下正则作用量 I_E 的变分为

$$\delta I_E = \int dt[\delta(p_i\dot{q}^i) - \delta H_E] \tag{1-5-25}$$

式(1-5-21)中的 H' 和 Λ_a 是第一类量,根据第一类约束的性质,有

$$\{H', \Lambda_a\} = C_a^b(q,p)\Lambda_b \tag{1-5-26a}$$

$$\{\Lambda_a, \Lambda_b\} = C_{ab}^c(q,p)\Lambda_c \tag{1-5-26b}$$

在式(1-5-24)的变换下,得

$$\delta H_E = (\varepsilon^a C_a^c + \lambda^a\varepsilon^b C_{ab}^c)\Lambda_c + \delta\lambda^a\Lambda_a \tag{1-5-27}$$

$$\delta(p_i\dot{q}^i) = \dot{\varepsilon}^a\Lambda_a + \frac{d}{dt}\left[\varepsilon^a\left(\frac{\partial\Lambda_a}{\partial p_i}p_i - \Lambda_a\right)\right] \tag{1-5-28}$$

根据正则作用量 I_E 在式(1-5-24)变换下的不变性,即 $\delta I_E=0$,可以得到 Lagrange 乘子的变换规则为

$$\delta\lambda^a = \dot{\varepsilon}^a - \varepsilon^b C_b^a + \lambda^c\varepsilon^b C_{bc}^a \tag{1-5-29}$$

1-6 整体正则对称性 正则 Noether 定理

对称性的研究在物理学中占重要地位. 传统的关于系统对称性和守恒律关系的研究是在位形空间中给出的. 动力学系统的量子化通常由正则变量来实现. 系统在相空间具有的对称性的研究,在量子理论中有更基本的意义. 这里先讨论约束 Hamilton 系统在相空间的经典正则对称性.

众所周知,经典的 Noether 定理是在位形空间中给出的[1-2],这个定理在分析物理系统的对称性所决定的守恒量中起着重要作用. 一个自然的问题是,将位形空间的 Lagrange 量过渡到相空间时,从相空间中系统的对称性如何确定其相应的守恒量,这里来讨论这个问题. 考虑到相空间中系统的整体变换性质,可以得到相空间的正则 Noether 定理[2],它与通常基于 Lagrange 体制在位形空间中的 Noether 定理的不同特点是,分析该系统在相空间中的对称性质,可由相空间中的正则 Noether 定理导出其相应的守恒量,而这种相

空间的对称性质，在位形空间中往往又不明确呈现出来[2]. 下面将从约束 Hamilton 系统的整体正则对称性出发，导出相空间中的经典正则 Noether 定理，经典正则对称性的分析，是研究量子正则对称性的基础.

一个动力学系统可以用 Lagrange 体制来描述，也可以用 Hamilton 体制来描述，对于正规 Lagrange 量系统从 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述，在相空间中正则变量之间彼此是独立的，此时相空间中的对称性与位形空间中的对称性之间的等价性，在文献[1]中已经讨论过. 但是，对于奇异 Lagrange 量系统，在相对空间中正则变量之间存在固有正则约束，两种体制间描述的等价性需另外讨论. 下面讨论有限自由度系统推广到场论的讨论是直接的.

设系统的 Lagrange 量为 $L(t;q^i,\dot{q}^i)(i=1,2,\cdots,n)$，其 Hess 矩阵 $\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\right]$ 的秩为 $R(R<n)$. 利用 Legendre 变换，将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述时，在相空间正则变量之间存在约束，将其初级约束记为

$$\phi_a^0(t;q,p)=0\quad(a=1,2,\cdots,n-R)\tag{1-6-1}$$

式中：$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$. 此约束系统的 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}^i=\{q^i,H_{\mathrm{T}}\}\tag{1-6-2a}$$

$$\dot{p}_i=\{p_i,H_{\mathrm{T}}\}\tag{1-6-2b}$$

式中：$H_{\mathrm{T}}=H_c+\lambda^a\phi_a^0$ 是总 Hamilton 量；H_c 是正则 Hamilton 量；$\lambda^a(t)$ 是约束乘子. 系统在相空间中随时间的演化由总 Hamilton 量 H_{T} 决定.

下面分析约束 Hamilton 系统在相空间中的整体对称性质. 在一定条件下可得到约束 Hamilton 系统在相空间的正则 Noether 定理[2]. 现考虑系统在相空间中李群下的变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}
&t\to t'=t+\Delta t=t+\varepsilon_\sigma\tau^\sigma(t;q,p)\\
&q^i(t)\to q^{i\prime}(t')=q^i(t)+\Delta q^i(t)=q^i(t)+\varepsilon_\sigma\xi^{i\sigma}(t;q,p)\\
&p_i(t)\to p'_i(t')=p_i(t)+\Delta p_i(t)=p_i(t)+\varepsilon_\sigma\eta_i^\sigma(t;q,p)
\end{aligned}\right\}\tag{1-6-3}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小参数；$\tau^\sigma(t;q,p)$，$\xi^{i\sigma}(t;q,p)$ 和 $\eta_i^\sigma(t;q,p)$ 为变换式(1-6-3)的生成函数. 在李群下的变换，ε_σ 是与时间 t 无关的参数，式(1-6-3)为整体变换. 假设在式(1-6-3)变换下，系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{P}}=\int_{t_1}^{t_2}L^{\mathrm{P}}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}[p_i\dot{q}^i-H_c(t;q,p)]\mathrm{d}t\tag{1-6-4}$$

的变分为

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=\int_{t_1'}^{t_2'}L^{\mathrm{p}\prime}(t';q',p')\mathrm{d}t'-\int_{t_1}^{t_2}L^{\mathrm{p}}(t;q,p)\mathrm{d}t=$$

$$\varepsilon_\sigma\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega^\sigma(t,q,p)\mathrm{d}t \tag{1-6-5}$$

式中

$$L^{\mathrm{p}}(t)=L^{\mathrm{p}}(t;q,p)=p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}}(t;q,p) \tag{1-6-6}$$

在式(1-6-3)变换下,有[1]

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)=1+\varepsilon_\sigma\dot{\tau}^\sigma \tag{1-6-7}$$

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=\int_{t_1}^{t_2}\delta L^{\mathrm{p}}(t)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L^{\mathrm{p}}(t)\Delta t]\mathrm{d}t=$$

$$\varepsilon_\sigma\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega^\sigma(t,q,p)\mathrm{d}t \tag{1-6-8}$$

式中:δ 代表等时变分;$\delta L^{\mathrm{p}}(t)$ 为时间 t 不发生改变时 $L^{\mathrm{p}}(t)$ 的变更,即

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L^{\mathrm{p}}(t)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\delta[p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}}(t;q,p)]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}[\delta p_i(\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i})+$$

$$(p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i}\delta q^i)]\mathrm{d}t \tag{1-6-9}$$

式中:$\delta q^i=\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t$; $\delta p_i=\Delta p_i-\dot{p}_i\Delta t$. 将式(1-6-9)中的 $p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^i$ 项作分部积分,得

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L^{\mathrm{p}}(t)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}\right)\delta q^i+\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}\right)\delta p_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q^i)\right\}\mathrm{d}t \tag{1-6-10}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}=-\dot{p}_i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}=\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i} \tag{1-6-11}$$

由式(1-6-5)~式(1-6-10),则有

$$\int_{t_1}^{t_2}[\delta p_i(\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i})+\delta q^i(-\dot{p}_i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i})]\mathrm{d}t+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t]\mathrm{d}t=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(t;q,p)\mathrm{d}t \tag{1-6-12}$$

式中:$\Omega=\varepsilon_\sigma\Omega^\sigma$. 假设式(1-6-1)在式(1-6-3)所确定的等时变分下不变,则

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i = 0 \tag{1-6-13}$$

用 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$ 乘以式(1-6-13)并求和，然后在 $[t_1, t_2]$ 上积分后与式(1-6-12)合并，有

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta p_i(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \lambda^a \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}) + \delta q^i(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i})]\mathrm{d}t +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i + (p_i\dot{q}^i - H_c)\Delta t - \Omega]\mathrm{d}t = 0 \tag{1-6-14}$$

沿着约束 Hamilton 系统运动的轨线，由运动方程式(1-6-2)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i + (p_i\dot{q}^i - H_c)\Delta t - \Omega] = 0 \tag{1-6-15}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\Delta q^i - H_c\Delta t - \Omega) = 0 \tag{1-6-16}$$

由李群的参数 ϵ_σ 的独立性，从式(1-6-16)有

$$p_i\xi^{i\sigma} - H_c\tau^\sigma - \Omega^\sigma = \text{const} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, r) \tag{1-6-17}$$

这样就得到约束 Hamilton 系统在相空间中的经典正则 Noether 第一定理：如果在式(1-6-3)变换下，系统的正则作用量的变化适合式(1-6-5)，且约束方程式(1-6-1)在式(1-6-3)所确定的等时变分下不变，那么该约束 Hamilton 系统在相空间中必存在式(1-6-17)所示的 r 个守恒量.

下面考虑一个特殊情况. 例如，设系统的 Lagrange 量 L 和约束 ϕ_a^0 中均不显含时间 t，那么在时间平移变换下 $t' = t + \Delta t$，有 $\Delta L^p = 0$，$\Delta\phi_a^0 = 0$. 于是有

$$\begin{aligned}\delta\phi_a^0 &= \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = \\ &\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\Delta q^i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\Delta p_i - \left(\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\Delta t = \\ &-\left(\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\Delta t = -\frac{\mathrm{d}\phi_a^0}{\mathrm{d}t}\Delta t\end{aligned} \tag{1-6-18}$$

由约束的自洽性条件，按约束 Hamilton 系统相空间中的正则 Noether 定理，可得系统的能量(Hamilton 量)守恒. 这个结果与 Lagrange 体制下的结果是一致的. 反过来，如果要求约束 Hamilton 系统的能量守恒与 Lagrange 体制下的结果一致，那么约束 $\phi_a^0 = 0$ 在时间平移变换下应有 $\delta\phi_a^0 = 0$. 由式(1-6-18)可知，约束 ϕ_a^0 随时间变化应是稳定的. 这就是约束的自洽性条件. 由此可见，为使 Lagrange 体制描述与 Hamilton 体制描述的结果相同，约束就必须适合自洽性条件.

1-7 定域正则变换 正则 Noether 恒等式

系统的作用量在定域变换下的不变性，就必存在含作用量泛函微商的微分恒等式(简称为 Noether 恒等式)，此恒等式在电动力学和广义相对论、流体力学以及规范场论[31]等领域均有广泛的应用. 对于系统的作用量在定域变换下非不变系统，也导出了相应的广义 Noether 恒等式，并给出了它们在杨-Mills 场论中的应用[36-37]，所有这些讨论均是在位形空间中给出的. 这里从系统的正则作用量在相空间中正则变量定域变换下的性质出发，导出了该系统在相空间中的正则 Noether 恒等式，借助于正则 Noether 恒等式分析该系统所含的 Dirac 约束 . 下面仍讨论有限自由度系统.

设动力学系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}^i - H_{\mathrm{c}}(t;q,p)] \mathrm{d}t \tag{1-7-1}$$

式中：$H_{\mathrm{c}}(t;q,p)$ 为系统的正则 Hamilton 量. 现考虑正则作用量 I^{p} 在相空间中的定域变换下的变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned} t \to t' &= t + \Delta t = t + R^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}(t) \\ q^i(t) \to q^{i\prime}(t') &= q^i(t) + \Delta q^i(t) = \\ & \quad q^i(t) + S^{i\sigma}\varepsilon_{\sigma}(t) \\ p_i(t) \to p_i'(t') &= p_i(t) + \Delta p_i(t) = \\ & \quad p_i(t) + T_i^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}(t) \\ (\sigma = 1,2,\cdots,r&;i = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{1-7-2}$$

式中：$\varepsilon_{\sigma}(t)$ 为时间 t 的任意函数，并称变换式(1-7-2)为定域变换；$R^{\sigma} = a_k^{\sigma}\mathrm{D}^k$；$S^{i\sigma} = b_l^{i\sigma}\mathrm{D}^l$；$T_i^{\sigma} = c_{im}^{\sigma}\mathrm{D}^m$ $\left(\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$，其中系数 a,b,c 等均为时间 t 和正则变量 q、p 的函数. 假设在式(1-7-2)的变换下，系统正则作用量式(1-7-1)的变分适合

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1'}^{t_2'} L^{\mathrm{p}}(t';q',p')\mathrm{d}t' - \int_{t_1}^{t_2} L^{\mathrm{p}}(t;q,p)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{D}(\Omega^{\sigma}\varepsilon_{\sigma})\mathrm{d}t \tag{1-7-3}$$

式中：$\Omega^{\sigma} = e_n^{\sigma}\mathrm{D}^n$，且 e_n^{σ} 仍为时间 t 和正则变量 q,p 的函数. 由式(1-7-2)、式(1-7-3)可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}\delta p_i + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}\delta q^i\right)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i + (p_i\dot{q}^i - H_{\mathrm{c}})\Delta t - \Omega]\mathrm{d}t = 0 \tag{1-7-4}$$

式中

$$\Omega = \Omega^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}$$

$$\delta q^i = \Delta q^i - \dot{q}^i \Delta t, \quad \delta p_i = \Delta p_i - \dot{p}_i \Delta t \tag{1-7-5}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta p_i} = \dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta q^i} = -\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} \tag{1-7-6}$$

将式（1-7-2）和式（1-7-5）代入式（1-7-4），可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta p_i}(T_i^{\sigma} - \dot{p}_i R^{\sigma})\varepsilon_{\sigma} + \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta q^i}(S^{i\sigma} - \dot{q}^i R^{\sigma})\varepsilon_{\sigma}\right]\mathrm{d}t +$$

$$\left[p_i(S^{i\sigma} - \dot{q}^i R^{\sigma}) + (p_i \dot{q}^i - H_c)R^{\sigma} - \Omega^{\sigma}\right]\varepsilon_{\sigma}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{1-7-7}$$

因为 $\varepsilon_{\sigma}(t)$为时间 t 的任意函数，故可以任意选取 $\varepsilon_{\sigma}(t)$，使其满足

$$\varepsilon_{\sigma}(t_1) = \dot{\varepsilon}_{\sigma}(t_1) = \cdots = \mathrm{D}^N \varepsilon_{\sigma}(t_1) = 0$$

及

$$\varepsilon_{\sigma}(t_2) = \dot{\varepsilon}_{\sigma}(t_2) = \cdots = \mathrm{D}^N \varepsilon_{\sigma}(t_2) = 0$$

$$(N = \max\{k, l, m, n\})$$

这样式（1-7-7）中的表面项（端点项）为 0，然后对式（1-7-7）剩下的项作分部积分，再利用 $\varepsilon_{\sigma}(t)$的端点条件和 $\varepsilon_{\sigma}(t)$的任意性，由变分学中的基本引理，可得相空间中的正则 Noether 恒等式，即

$$\widetilde{T}_i^{\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta p_i}\right) - \widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{p}_i \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta p_i}\right) + \widetilde{S}^{i\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta q^i}\right) - \widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{q}^i \frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta q^i}\right) = 0 \tag{1-7-8}$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, r)$$

式中：$\widetilde{R}^{\sigma}$，$\widetilde{S}^{i\sigma}$和$\widetilde{T}_i^{\sigma}$ 分别为R_{σ}，$S^{i\sigma}$和 T_i^{σ} 的伴随算符．例如：

$$\int_{t_1}^{t_2} f R^{\sigma} g \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} g \widetilde{R}^{\sigma} f \,\mathrm{d}t + [\cdot]_{t_1}^{t_2} \tag{1-7-9}$$

在导出相空间的正则 Noether 恒等式（1-7-8）时，没有利用系统的动力学方程．因此，式（1-7-8）的成立与系统的动力学方程无关．式（1-7-8）表明，定域不变系统泛函微商$\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta q^i}$和$\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta p_i}$彼此是不独立的.

1-8 不变性和 Dirac 约束

众多的物理系统是用奇异 Lagrange 量描述的，它们在相空间存在固有约束为约束 Hamilton 系统．所有定域变换下不变的 Lagrange 量均是奇异的．例如，描述自然界基本相互作用的量子电动力学（QED），量子味动力学（QFD，弱电统一理论），量子色动力学（QCD，强相互作用理论），广义相对论（GR，引力理论），以及超对称、超弦理论中一些模型的 Lagrange 量均是奇异的，约束 Hamilton 系统的经典和量子理论在现代场论中有重要地位.

制约自然界基本相互作用（引力、电磁、弱作用、强作用）的基本规律，普遍认为是来源于理论中的规范不变性．在位形空间中，基于Lagrange

体制可以证明，定域变换不变的系统，必含 Dirac 约束[1]. 下面利用相空间的正则 Noether 恒等式来讨论这个问题.

假设一个系统的正则作用量在下面的变换下不变，即变换为

$$\left.\begin{aligned} t \to t' &= t \\ q^i(t) \to q^{i\prime}(t') &= q^i(t) + (b_0^{i\sigma} + b_1^{i\sigma}\mathrm{D})\varepsilon_\sigma(t) \\ p_i(t) \to p'_i(t') &= p_i(t) + (c_{i0}^{\sigma} + c_{i1}^{\sigma}\mathrm{D})\varepsilon_\sigma(t) \\ (\sigma = 1,2,\cdots,r;\, i &= 1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{1-8-1}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(t)$为时间 t 的任意函数；系数 b，c 等均为时间 t 和正则变量 q，p 的函数. 例如杨-Mills 场中的规范变换就属于这种情况，此时相空间中的正则 Noether 恒等式（1-7-8）将化为

$$c_{i0}^{\sigma}\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right) - \mathrm{D}\left[c_{i1}^{\sigma}\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\right] - b_0^{i\sigma}\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right) + \mathrm{D}\left[b_1^{i\sigma}\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\right] = 0 \tag{1-8-2}$$

并注意到

$$\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j \tag{1-8-3}$$

将式（1-8-3）代入式（1-8-2）可见，q^i 的最高阶导数出现在 $\mathrm{D}(b_1^{i\sigma}\dot{p}_i)$一项中，即出现在 $\mathrm{D}\left(b_1^{i\sigma}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j\right)$一项中，其中 q^i 的最高阶导数是三阶的。由于 $q^i(t)$是任意的，因此相空间中的正则 Noether 恒等式（1-8-2）中所有 q^i 的三阶导数项之和应为 0 而与其他项无关，即

$$b_1^{i\sigma}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\dddot{q}^j = 0 \tag{1-8-4}$$

式（1-8-4）对任意 q^i 的三阶导数均满足，于是

$$b_1^{i\sigma}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0 \tag{1-8-5}$$

因为 $b_1^{i\sigma}$ 不全为 0（例如杨-Mills 场中的规范变换），所以由式（1-8-5）可得

$$\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right| = 0 \tag{1-8-6}$$

这表明对应的 Hess 矩阵是退化的. 因此，定域不变系统，必含 Dirac 约束，即

$$\phi_j(q,p) = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,J) \tag{1-8-7}$$

将这些约束条件与相空间中正则 Noether 恒等式结合，可以给出正则变量间

更多的关系式，或者可以判明 Dirac-Bergmann 算法求次级约束的过程应该终止于哪一步. 设定域不变系统所含的初级约束为 $\phi_a^0(q,\ p)\approx 0$，系统的运动方程为

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \tag{1-8-8a}$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} \tag{1-8-8b}$$

沿着约束 Hamilton 系统运动的轨线，利用式（1-8-8），相空间中的正则 Noether 恒等式（1-7-8）可化为

$$\widetilde{T}_i^\sigma\left(\lambda^\sigma \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\right) - \widetilde{R}^\sigma\left(\dot{p}_i \lambda^\sigma \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\right) +$$

$$\widetilde{S}^{i\sigma}\left(\lambda^\sigma \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\right) - \widetilde{R}^\sigma\left(\dot{q}^i \lambda^\sigma \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\right) \approx 0 \tag{1-8-9}$$

式（1-8-9）可能为平凡的等式，或者可以导出系统的守恒定律[37]，或者可以给出正则变量和乘子间更多的关系式. 因此，在相空间中正则 Noether 定理和正则 Noether 恒等式的应用，可以获得该系统 Dirac 约束和对应的 Lagrange 约束乘子的更多的信息。

1-9 关于 Dirac 猜想

用奇异 Lagrange 量描述的系统在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统. 虽然对约束系统的 Dirac 理论及其推广的研究取得了相当的进展，特别是规范场等场论量子化过程中的一些主要问题已经得到解决，但是约束系统的 Dirac 理论中的若干问题，至今在文献中仍被广泛地、不断地被讨论，其中之一就是 Dirac 猜想[26,34]. Dirac 在他的广义正则形式理论中，曾猜想：所有第一类约束均是规范变换的生成元，它们是生成物理态之间的等价变换. 该猜想涉及约束 Hamilton 系统量子化中规范条件的选取，在现代量子场论中占基本地位. 长期以来，关于 Dirac 猜想是否有效一直不断有争议，所有争议均是考察由扩展 Hamilton 量 H_E 导出的运动方程不严格等价于对应的 EL 方程[35,38-39]. Cawley 等人还给出了若干反例[40-42]. 近来，有人重新讨论了这其中若干反例[6,43-46]，指出 Cawley 等人的反例不是真正的反例，因为他们采用了将约束线性化的步骤，导致了强等和弱等概念的混淆. 因为 $\phi\approx 0$ 必有 $\phi^2\simeq 0$，而 $\phi^2\simeq 0$ 不能简单地认为 $\phi\approx 0$.

本节指出 Dirac 猜想提出的基础是与第一类约束相联系的约束乘子具有任意性，但考虑到正则 Noether 恒等式时，Dirac 猜想提出的基础值得讨论.

从约束 Hamilton 系统在相空间中的对称性分析，由扩展 Hamilton 量可导出扩展正则 Noether 恒等式，从正则 Noether 恒等式和扩展正则 Noether 恒等式出发可得到. 与第一类约束相联系的 Lagrange 乘子可能不是任意的，从而对 Dirac 猜想提出了疑问. 并且本节给出了另一个反例，详细讨论了 Dirac 猜想在此反例中的失效，而这些讨论均未涉及对约束作线性化处理.

1-9-1 约束乘子的任意性问题

前面已经指出，在总 Hamilton 量中与第二类约束相联系的约束乘子(Lagrange 乘子)，由约束的自洽性条件是完全确定的，而与第一类约束相联系的约束乘子则不能确定，它们的任意性是 Dirac 猜想提出的基础，因为规范变换中的参变量是任意函数. 下面从正则 Noether 恒等式来分析约束乘子的任意性问题.

约束 Hamilton 系统力学量 F 随时间的演化方程为[1]

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} \tag{1-9-1}$$

式中：$H_T = H' + \xi^{a'}\phi_{a'}$，$H' = H_c + X^a\phi_a^0$(对仅含第一类约束的系统 $H' = H_c$)，H_c 为正则 Hamilton 量，H_T 为总 Hamilton 量，$\phi_{a'}$ 为初级第一类约束，$\xi^{a'}$ 是与初级第一类约束相联系的约束乘子，从 1-5 节中的讨论可知，$\xi^{a'}(t)$为任意函数，$\xi^{a'}(t)$的数目恰好等于初级第一类约束的数目. 设 $t=0$ 时，力学量 F 的初值为 F_0，取一组 $\xi^{a'}(t)$，经过 δt 时间后，F 的值为 $F(t)$，取另一组$\overline{\xi}^{a'}(t)$，则得到不同的$\overline{F}(t)$值，两者之差为

$$\Delta F(t) = \delta t(\xi^{a'} - \overline{\xi}^{a'})\{F, \phi_{a'}\} = \varepsilon^{a'}\{F, \phi_{a'}\} \tag{1-9-2}$$

式中：$\varepsilon^{a'}(t) = (\xi^{a'} - \overline{\xi}^{a'})\delta t$. 这说明任意乘子 $\xi^{a'}$ 的不同选取，相当于 $F(t)$和$\overline{F}(t)$之间进行了一个无穷小正则(规范)变换，第一类初级约束 $\phi_{a'}$ 为无穷小正则变换(规范变换) 的生成元. 由它生成的正则变换，导致正则变量的改变，但这种改变不影响物理态。

考虑相继进行两次正则变换，先以生成元 $\varepsilon^{a'}\phi_{a'}$ 作正则变换，再以生成元 $\omega^{a''}\phi_{a''}$ 作正则变换. 然后把上述两变换的次序倒过来做，求出两次变换后之差，利用 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式，得

$$\Delta F = \varepsilon^{a'}\omega^{a''}\{F, \{\phi_{a'}, \phi_{a''}\}\} \tag{1-9-3}$$

由此可见，$\{\phi_{a'}, \phi_{a''}\}$也是无穷小正则变换的生成元. 约束 $\phi_{a'}$ 和 $\phi_{a''}$ 均是第一类初级约束，两个第一类约束的 Poisson 括号$\{\phi_{a'}, \phi_{a''}\}$仍是第一类的，$\{\phi_{a'}, \phi_{a''}\}$可以是初级第一类约束，也可以是次级第一类约束. Dirac 提出猜想：所有第一类约束均是正则(规范)变换的生成元. 可见，Dirac 猜想的提出基

于 $\xi^{a'}(t)$为任意函数.

如果 Dirac 猜想成立，那么，不仅初级第一类约束应计入 Hamilton 量中，次级第一类约束也应计入其中. 对于仅含第一类约束的系统，设所含的初级第一类约束为 $\phi_{a'}^{0}\approx 0$ $(a=1, 2, \cdots, N')$，次级第一类约束为 $\chi_{l}\approx 0$ $(l=1,2,\cdots,L')$，则系统的正则方程可由扩展 Hamilton 量 H_{E} 导出[35]，即

$$H_{\mathrm{E}}=H_{\mathrm{c}}+\lambda^{a'}\phi_{a'}^{0}+\mu^{l}\chi_{l}=H_{\mathrm{c}}+\lambda^{a}\Lambda_{a} \tag{1-9-4}$$

式中：Lagrange 约束乘子为 $\lambda^{a'}$；μ^{l} 是时间的任意函数；Λ_{a} 代表所有第一类约束；$\lambda^{a}=(\lambda^{a'}, \mu^{l})$为相应的约束乘子，由约束的自洽性要求不能确定它们.

下面考察与第一类约束相应的约束乘子的任意性问题.

假设系统的正则作用量在下列变换

$$\left.\begin{aligned} t'&=t+R^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}=t+a_{k}^{\sigma}\mathrm{D}^{k}\varepsilon_{\sigma}(t)\\ q^{i\prime}(t')&=q^{i}(t)+S^{i\sigma}\varepsilon_{\sigma}(t)=q^{i}(t)+b_{l}^{i\sigma}\mathrm{D}^{l}\varepsilon_{\sigma}(t)\\ p_{i}'(t')&=p_{i}(t)+T_{i}^{\sigma}\varepsilon_{\sigma}(t)=p_{i}(t)+c_{im}^{\sigma}\mathrm{D}^{m}\varepsilon_{\sigma}(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-9-5}$$

下（其中 $\varepsilon_{\sigma}(t)$ $(\sigma=1, 2, \cdots, r)$ 为任意函数，a，b，c 是 t，q，p 的函数）是不变的，且系统的正则方程是由扩展 Hamilton 量 H_{E} 导出的，正则 Noether 恒等式为

$$\widetilde{T}_{i}^{\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_{i}}\right)-\widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{p}_{i}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_{i}}\right)+\widetilde{S}^{i\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^{i}}\right)-\widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{q}^{i}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^{i}}\right)=0 \tag{1-9-6}$$

利用 H_{E} 决定的运动方程，沿着系统运动的轨线，有

$$\widetilde{T}_{i}^{\sigma}\left(\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial p_{i}}\right)-\widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{p}_{i}\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial p_{i}}\right)+\widetilde{S}^{i\sigma}\left(\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial q^{i}}\right)-\widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{q}^{i}\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial q^{i}}\right)=0 \tag{1-9-7}$$

式中：$\widetilde{S}^{i\sigma}$，$\widetilde{T}_{i}^{\sigma}$，$\widetilde{R}^{\sigma}$ 分别为相应于 $S^{i\sigma}$，T_{i}^{σ}，R^{σ} 的伴随算符. 对允许的 Lagrange 量，式（1-9-7）若给出不自洽的结果，表明 Dirac 猜想失效. 如果式（1-9-7）确定出与第一类约束相联系的约束乘子间的某些关系，这说明该约束乘子并非是任意的。

考虑由扩展 Hamilton 量 H_{E} 决定的正则作用量

$$I_{\mathrm{E}}(q,p,\lambda)=\int_{t_{1}}^{t_{2}}\mathrm{d}t\,(p_{i}\dot{q}^{i}-H_{\mathrm{E}}) \tag{1-9-8}$$

在下列无穷小定域变换

$$\left.\begin{aligned} \delta q^{i}&=\varepsilon^{a}(t)\{q^{i},\Lambda_{a}\}=S_{b}^{i}\varepsilon^{b}(t)\\ \delta p_{i}&=\varepsilon^{a}(t)\,\{p_{i},\Lambda_{a}\}=T_{ib}\varepsilon^{b}(t)\\ \delta\lambda^{a}&=\delta_{b}^{a}\dot{\varepsilon}^{b}(t)-C_{b}^{a}\varepsilon^{b}(t)+\lambda^{c}c_{bc}^{a}\varepsilon^{b}(t)=U_{b}^{a}\varepsilon^{b}(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-9-9}$$

下不变，其中$\epsilon^b(t)$（$b=1, 2, \cdots, m$）为无穷小任意函数，S^i_b，T_{ib}和U^a_b为线性微分算符，对第一类量H_c和Λ_a有

$$\{H_c, \Lambda_a\} = c^b_a \Lambda_b, \quad \{\Lambda_a, \Lambda_b\} = c^c_{ab} \Lambda_c \tag{1-9-10}$$

在式（1-9-9）变换下，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta I_E}{\delta p_i} \delta p_i + \frac{\delta I_E}{\delta q^i} \delta q^i + \frac{\delta I_E}{\delta \lambda^a} \delta \lambda^a\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [p_i S^i_b \epsilon^b(t)] dt = 0 \tag{1-9-11}$$

式中

$$\frac{\delta I_E}{\delta p_i} = \dot{q}^i - \frac{\partial H_E}{\partial p_i}, \quad \frac{\delta I_E}{\delta q^i} = -\dot{p}_i - \frac{\partial H_E}{\partial q^i}, \quad \frac{\delta I_E}{\delta \lambda^a} = -\frac{\partial H_E}{\partial \lambda^a} \tag{1-9-12}$$

由于$\epsilon^b(t)$的任意性，可选取它们及其微商在区间端点为零，式（1-9-11）左端第二个积分为零，将左端第一个积分各项作分部积分，由$\epsilon^b(t)$的任意性，利用变分学基本引理，可得扩展正则 Noether 恒等式，即

$$\widetilde{T}_{ib}\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_E}{\partial p_i}\right) - \widetilde{S}^i_b\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_E}{\partial q^i}\right) - \widetilde{U}^a_b\left(\frac{\partial H_E}{\partial \lambda^a}\right) = 0 \tag{1-9-13}$$

利用由H_T决定的运动方程，式（1-9-13）也许可确定出与第一类约束相联系的约束乘子间的某些关系．此时式（1-9-13）表明与第一类约束相联系的约束乘子可能受到限制，这违背了 Dirac 猜想中乘子的任意性，从而对 Dirac 猜想提出的基础产生了疑问。该猜想在一些反例[3,6,43-45]中失效也就很自然了．下面讨论一个反例．

1-9-2 Dirac 猜想的反例

考虑 Lagrange 量[46]

$$L = \frac{1}{2} e^{2u(y)} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} e^{-2v(-y)} \dot{z}^2 \tag{1-9-14}$$

函数$u(y)$，$v(-y)$满足的条件下面给出．由 EL 方程表明系统的运动是允许的。过渡到 Hamilton 描述，坐标x，y，z相应的正则动量为

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{2u(y)} \dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = e^{-2v(-y)} \dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{1-9-15}$$

正则 Hamilton 量为

$$H_c = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L =$$
$$\frac{1}{2}e^{-2u(y)}p_x^2 + \frac{1}{2}e^{2v(-y)}p_z^2 \tag{1-9-16}$$

初级约束为 $\phi^0 = p_y \approx 0$，总 Hamilton 量 $H_T = H_c + \lambda\phi^0$，其中 $\lambda(t)$为约束乘子. 由初级约束的自洽性条件给出次级约束

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \{\phi^0, H_T\} = \\ &e^{-2u(y)}u'(y)p_x^2 + e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^2 \approx 0\end{aligned} \tag{1-9-17}$$

当函数 $u(y)$，$v(-y)$满足

$$u''(y) = u'(y) + 2[u'(y)]^2 \tag{1-9-18}$$
$$-v''(-y) = v'(-y) + 2[v'(-y)]^2 \tag{1-9-19}$$

时，ϕ^1 的自洽性条件不再产生出新的次级约束. 全部约束 ϕ^0，ϕ^1 为两个独立的第一类约束. 令 $f(y)=u'(y)$，式(1-9-18)可化为

$$\frac{df}{f} - \frac{2df}{1+2f} = dy \tag{1-9-20}$$

由式（1-9-20），得

$$u'(y) = e^{y+c}[1+2u'(y)]^2 \tag{1-9-21}$$

式中：c 为积分常数．取 $c=0$，可解出

$$u(y) = \frac{1}{8}\int_0^y (e^{-y} - 4 \pm e^{-y}\sqrt{1-8e^y})dy \tag{1-9-22}$$

由式（1-9-19）同样可解，得

$$v(-y) = -\frac{1}{8}\int_0^y (e^{-y} - 4 \pm e^{-y/2}\sqrt{e^{-y}-8})dy \tag{1-9-23}$$

式（1-9-14）在整体变换

$$x' = x - \alpha e^{-w}z, \quad z' = z + \alpha e^{w}x \quad (|\alpha| \ll 1) \tag{1-9-24}$$

下不变（其中，α 为无穷小参数，$w = u(y) + v(-y)$），由位形空间的 Noether 定理可得守恒量[1]

$$e^{\theta(y)}(x\dot{z} - z\dot{x}) = \text{const} \tag{1-9-25}$$

式中：$\theta(y) = u(y) - v(-y)$. 正则 Lagrange 量

$$L^p = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - H_c =$$
$$\frac{1}{2}e^{-2u(y)}p_x^2 + \frac{1}{2}e^{2v(-y)}p_z^2 \tag{1-9-26}$$

在相应的相空间中的变换

$$p'_x = p_x - \alpha e^{w}p_z, \quad p'_z = p_z + \alpha e^{-w}p_x \quad (|\alpha| \ll 1) \tag{1-9-27}$$

下，L^p，ϕ^0 不变，应用相空间的 Noether 定理，由 H_T 决定的运动方程可得守恒量

$$e^{\theta(y)}(x\dot{z}-z\dot{x})=\text{const} \tag{1-9-28}$$

此结果与式（1-9-25）一致.

如果 Dirac 猜想成立，其运动方程应该由扩展 Hamilton 量 H_E 导出

$$\begin{aligned} H_E &= H_c+\lambda\phi^0+\mu\phi^1 = H_c+H_1 \\ (H_1 &= \lambda\phi^0+\mu\phi^1) \end{aligned} \tag{1-9-29}$$

其中 $\mu(t)$为第一类约束乘子. 在式（1-9-27）的变换下，因为 ϕ^1 不具有变换不变性，所以不能按正则 Noether 定理，由 H_E 出发得到式（1-9-25）所示守恒量，说明 Dirac 猜想失效. 下面，从相空间的正则 Noether 恒等式来考察这个问题. 系统正则 Lagrange 量 L^p 在定域变换

$$x'=x-\alpha(t)e^{w}z,\quad z'=z+\alpha(t)e^{-w}x\quad (|\alpha|\ll 1) \tag{1-9-30a}$$

$$p'_x=p_x-\alpha(t)e^{w}p_z,\quad p'_z=p_z+\alpha(t)e^{-w}p_x\quad (|\alpha|\ll 1) \tag{1-9-30b}$$

下不变，由式（1-9-7）得

$$\tilde{\Upsilon}_x\frac{\partial H_1}{\partial p_x}+\tilde{\Upsilon}_z\frac{\partial H_1}{\partial p_z}=0 \tag{1-9-31}$$

从而有

$$\mu e^{-\theta(y)}p_xp_z[v'(-y)-u'(y)]=0 \tag{1-9-32}$$

由于 $v'(-y)\neq u'(y)$. 这说明约束乘子受到限制，Dirac 猜想在这个例子中不成立.

下面从扩展正则 Noether 恒等式（1-9-13）来讨论 Dirac 猜想在此反例中失效. 在式（1-9-9）变换下，由式（1-9-10），此时 $c_1^1=c_2^1=c_2^2=0$，$c_1^2=-1$，$c_{12}^2=-c_{21}^2=-1$，$c_{12}^1=c_{21}^1=c_{11}^2=c_{22}^2=0$，变换式（1-9-9）可具体写为

$$\left.\begin{aligned} \delta x&=\varepsilon_b(t)\{x,\Lambda^b\}=2u'(y)e^{-2u(y)}p_x\varepsilon_2(t) \\ \delta y&=\varepsilon_1(t) \\ \delta z&=2v'(-y)e^{2v(-y)}p_z\varepsilon_2(t) \\ \delta\lambda_1&=\dot{\varepsilon}_1(t) \\ \delta\lambda_2&=\dot{\varepsilon}_2(t)+\varepsilon_1(t)+\lambda_1\varepsilon_2(t)-\lambda_2\varepsilon_1(t) \\ \delta p_x&=\delta p_z=0 \\ \delta p_y&=-\Lambda_2\varepsilon_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-9-33}$$

将 H_E 和变换式（1-9-33）代入扩展正则 Noether 恒等式（1-9-13），由 H_T 决定的运动方程，得

$$\lambda\phi^1=0 \tag{1-9-34}$$

上式表明离开约束 $\phi^1=0$ 决定的超曲面，$\lambda_1=0$，则此约束乘子不是任意的.

通过用正则 Noether 恒等式（1-9-6）和扩展正则 Noether 恒等式（1-9-13）对约束 Hamilton（正则）系统的分析，可知与第一类约束相联系的约束乘子在某些情形下也许不具有任意性，这样基于该乘子任意性提出的 Dirac 猜想就存在问题，该猜想一般情形无效就很自然了.

以上从约束 Hamilton 系统的整体对称性和定域对称性几个方面讨论 Dirac 猜想在此反例中失效，而在所有的讨论中均未对约束线性化. 尽管 Dirac 猜想在某些例子中无效，但对一些重要的物理系统，Dirac 猜想还没有导致不合理的结果.

1-10 场论中的奇异 Lagrange 量系统

场是无穷多自由度的连续系统，将场所在空间区域分为许多小格，场量在每一个小格的值用它的平均值作代表，这样把连续系统离散化后作为多自由度系统来处理，就可将有限自由度系统的研究推广到场论中的系统.

设描述场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi^\alpha,\ \varphi^\alpha_{,\mu})(x=(t,\ \boldsymbol{x}),\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$来描述，$\varphi^\alpha(x)$为描写场运动的场量，$\alpha$ 为场量 $\varphi^\alpha(x)$的分量指标. 平坦时空度规取 $q_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1\ \ -1\ \ -1\ \ -1)$，其中 $\varphi^\alpha_{,\mu}=\partial_\mu\varphi^\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi^\alpha$. 场的 Lagrange 量为

$$L[\varphi^\alpha,\dot{\varphi}^\alpha]=\int_V \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu}) \tag{1-10-1}$$

场量 φ^α 相对应的正则共轭动量

$$\pi_\alpha=\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}^\alpha}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^\alpha} \tag{1-10-2}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c[\varphi^\alpha,\pi_\alpha]=\int_V \mathrm{d}^3x\mathscr{H}_c=\int_V \mathrm{d}^3x(\dot{\varphi}^\alpha\pi_\alpha-\mathscr{L}) \tag{1-10-3}$$

由最小作用原理，可得 EL 方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial_\mu\varphi^\alpha}\right)=0 \tag{1-10-4}$$

引入 Hess 矩阵的矩阵元为

$$H_{\alpha\beta}=\frac{\delta^2L}{\delta\dot{\varphi}^\alpha\,\delta\dot{\varphi}^\beta}=\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^\alpha\,\partial\dot{\varphi}^\beta} \tag{1-10-5}$$

当 $\det|H_{\alpha\beta}|\neq0$ 时，Hess 矩阵是非退化的，此时该系统的 Lagrange 量是

正规的．由正规 Lagrange 量描述的系统称为正规系统，这时由式（1-10-2）能解出 $\dot{\varphi}^a$ 作为 φ^a 和 π_a 的函数．当 $\det|H_{a\beta}|=0$ 时，Hess 矩阵是退化的．此时 Lagrange 量是奇异的．对奇异 Lagrange 量描述的系统，由式（1-10-2）不能解出所有 $\dot{\varphi}^a$ 作为 φ^a 和 π_a 的函数，正则变量 φ^a 和 π_a 间必存在约束，此时该系统称为约束 Hamilton 系统．

Hess 矩阵为 n 阶矩阵，设它的秩为 R，则正则变量间存在 $n-R$ 个约束条件，即

$$\phi_a^0(\varphi^a,\pi_a)\approx 0 \quad (a=1,2,\cdots,n-R) \tag{1-10-6}$$

并称这些约束为初级约束．其中已省略了场量的空间微商，记号"≈"表示 Dirac 理论中的"弱等"，代表等式在约束超曲面上成立．考虑在正则作用量 $\varphi^a(x)$ 和 $\pi_a(x)$ 变分下，式（1-10-3）中正则 Hamilton 量的变更和 EL 方程（1-10-4）有

$$\int_V \mathrm{d}^3x\left[\left(\dot{\varphi}^a-\frac{\delta H_c}{\delta\pi_a}\right)\delta\pi_a-\left(\dot{\pi}_a+\frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a}\right)\delta\varphi^a\right]=0 \tag{1-10-7}$$

对于奇异 Lagrange 量系统，在相空间存在约束关系式（1-10-6），因而正则变量彼此不独立，而有

$$\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\delta\pi_a+\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a=0 \tag{1-10-8}$$

对正则作用量 $\varphi^a(x)$ 和 $\pi_a(x)$ 的两个任意泛函 F 和 G，在场论中，它们的 Poisson 括号为

$$\{F,G\}=\int_V \mathrm{d}^3x''\left\{\frac{\delta F}{\delta\varphi^a(t,\boldsymbol{x}'')}\frac{\delta G}{\delta\pi_a(t,\boldsymbol{x}'')}-\frac{\delta F}{\delta\pi_a(t,\boldsymbol{x}'')}\frac{\delta G}{\delta\varphi^a(t,\boldsymbol{x}'')}\right\} \tag{1-10-9}$$

例如，

$$\begin{aligned}\{\varphi^a(t,\boldsymbol{x}),\pi_a(t,\boldsymbol{x}')\}&=\int_V \mathrm{d}^3x''\left\{\frac{\delta\varphi^a(t,\boldsymbol{x})}{\delta\varphi^\gamma(t,\boldsymbol{x}'')}\frac{\delta\pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')}{\delta\pi_\gamma(t,\boldsymbol{x}'')}\right\}=\\&\int_V \mathrm{d}^3x''\,\delta_\gamma^a\,\delta_\beta^\gamma\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'')\,\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')=\\&\delta_\beta^a\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned} \tag{1-10-10}$$

$$\{\varphi^a(t,\boldsymbol{x}),\varphi^\beta(t,\boldsymbol{x}')\}=0 \tag{1-10-11}$$

$$\{\pi_a(t,\boldsymbol{x}),\pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')\}=0 \tag{1-10-12}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t,\boldsymbol{x})$，由式（1-10-7）和式（1-10-8），可得约束 Hamilton 系统的正则方程，即

$$\dot{\varphi}^a = \frac{\delta H_T}{\delta \pi_a} = \{\varphi^a, H_T\} \tag{1-10-13}$$

$$\dot{\pi}_a = -\frac{\delta H_T}{\delta \varphi^a} = \{\pi_a, H_T\} \tag{1-10-14}$$

式中：$H_T = H_c + \lambda^a \phi_a^0$ 为总 Hamilton 量；$\{\cdot, \cdot\}$ 表示场论中的 Poisson 括号. 由式 (1-10-13) 和式 (1-10-14)，相空间的函数 $F(\varphi^a, \pi_a)$随时间的演化为

$$\dot{F} = \{F, H_T\} \tag{1-10-15}$$

对于奇异系统，系统的运动应始终保持在由约束决定的相空间中的超曲面上，约束随时间的演化是稳定的（自洽性条件），即

$$\dot{\phi}_a^0 = \{\phi_a^0, H_T\} \approx 0 \tag{1-10-16}$$

由初级约束的自洽性条件可给出新的次级约束，即

$$\phi_a^1(q,p) = \{\phi_a^0, H_T\} \approx 0 \tag{1-10-17}$$

次级约束同样满足自洽性条件，重复上面步骤，逐次求得次级约束，并记为

$$\phi_a^k(q,p) = \{\phi_a^{k-1}, H_T\} \approx 0 \quad (k = 1,2,\cdots,m) \tag{1-10-18}$$

直至 ϕ_a^m 适合

$$\phi_a^{m+1} = \{\phi_a^m, H_T\} = c_{ak}^b \phi_b^k \quad (k \leqslant m) \tag{1-10-19}$$

为止. 这就是场论中求奇异 Lagrange 量系统约束的 Dirac-Bergmann 的算法.

将全部独立的约束（包括初级约束 ϕ_a^0 和次级约束 ϕ_a^k）记为

$$\Phi_a(\varphi^a, \pi_a) \approx 0 \quad (a = 1,2,\cdots,j) \tag{1-10-20}$$

按照 Dirac 的处理，可定义第一类量和第二类量. 一个与所有约束构成的 Poisson 括号都弱等于 0 的量称为第一类的；否则称为第二类的. 这样可将约束 Φ_a 分为两类. 如果一个约束是第一类量就称为第一类约束，记为 Λ_k，且

$$\{\Lambda_k, \Phi_a\} \approx 0 \tag{1-10-21}$$

否则，称为第二类约束. 第二类约束 θ_i 满足

$$\det | \{\theta_i, \theta_j\} | \neq 0 \tag{1-10-22}$$

当全部初级约束和次级约束的某些线性组合能够化为第一类约束时，则用独立的线性组合使尽可能多的约束归为第一类.

将约束分为第一类约束和第二类约束，可把力学量随时间的演化式 (1-10-15) 化为另外的形式. 通过 Dirac 括号可把约束 Hamilton 系统的经典运动方程表达得更简洁. 在系统的量子化中，Dirac 括号占有重要地位. 该系

统从经典理论过渡到量子理论是通过 Dirac 括号来实现的.

相空间正则变量的泛函 $F(\varphi^a, \pi_a)$ 随时间的演化方程式（1-10-15）可写为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\{F,H_{\mathrm{T}}\}=\{F,H_{\mathrm{c}}+\int_V \mathrm{d}^3x\lambda^a\phi_a^0\}=$$

$$\{F,H_{\mathrm{c}}\}+\int_V \mathrm{d}^3x\lambda^a\{F,\Lambda_a\}+\int_V \mathrm{d}^3x\lambda^j\{F,\theta_j\} \quad (1\text{-}10\text{-}23)$$

式中：Λ_a 和 θ_j 分别为初级第一类和第二类约束。按约束的自洽性条件分别用第一类约束和第二类约束，就有

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_a}{\mathrm{d}t}=\{\Lambda_a,H_{\mathrm{c}}\}\approx 0 \quad (1\text{-}10\text{-}24\mathrm{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t}=\{\theta_i,H_{\mathrm{c}}\}+\int_V \mathrm{d}^3x\lambda^j\{\theta_i,\theta_j\}\approx 0 \quad (1\text{-}10\text{-}24\mathrm{b})$$

式（1-10-24a）中不含与初级第一类约束相联系的 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)$，这表明此乘子是不确定的. 未确定的乘子数目等于初级第一类约束的数目.

定义矩阵元

$$c_{ij}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}_{x^0=y^0} \quad (1\text{-}10\text{-}25)$$

则式（1-10-24b）变为

$$\{\theta_i,H_{\mathrm{c}}\}+\int_V \mathrm{d}^3x c_{ij}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\lambda^j(t,\boldsymbol{y})\approx 0 \quad (1\text{-}10\text{-}26)$$

由式（1-10-24b）求解 $\lambda_i(x)=\lambda_i(t, \boldsymbol{x})$的问题归结为求矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$的逆矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$，设 $\boldsymbol{C}^{-1}$的矩阵元为 $c_{ij}^{-1}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，则

$$\int_V \mathrm{d}^3z c_{ij}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})c_{jj'}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}')=\delta_{jj'}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \quad (1\text{-}10\text{-}27)$$

利用 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵也可定义场论中的 Dirac 括号. 设 $F(t, \boldsymbol{x})$和 $G(t, \boldsymbol{x})$是由 $\varphi^a(t, \boldsymbol{x})$，$\pi_a(t, \boldsymbol{x})$及其空间微商构成的泛函，它们之间的 Dirac 括号定义为

$$\{F(t,\boldsymbol{x}),G(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{D}}=\{F(t,\boldsymbol{x}),G(t,\boldsymbol{x}')\}-\int_V \mathrm{d}^3y\mathrm{d}^3z\{F(t,\boldsymbol{x}),\theta_i(t,\boldsymbol{y})\}c_{ij}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\{\theta_j(t,\boldsymbol{z}),G(t,\boldsymbol{x}')\} \quad (1\text{-}10\text{-}28)$$

由式（1-10-28）得

$$\{F(t,\boldsymbol{x}),\theta_j(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{D}}=0 \quad (1\text{-}10\text{-}29)$$

即在 Dirac 括号下可以把第二类约束条件视为强方程. 当 F 是第一类量时，F 和 G 之间的 Dirac 括号弱等于通常的 Poisson 括号.

从前面的讨论中可以看出，有限自由度系统过渡到场论时，相应的普通微商改为泛函微商，即

$$\frac{\partial W}{\partial u} \to \frac{\delta W}{\delta u}$$

$$\delta W = \int \frac{\delta W}{\delta u} \delta u(x) \mathrm{d}^k x$$

1-11 电磁场 标量电动力学

本节分析电磁场与荷电粒子场相互作用时系统的正则约束，这里先讨论自由电磁场.

1-11-1 电磁场

自由电磁场（无源电磁场）的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \tag{1-11-1}$$

式中：$F_{\mu\nu}$为势$A_\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$确定的 2 阶反对称张量，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，$A^0 = \varphi$为标势，$\boldsymbol{A}$为矢势. 自由电磁场的 EL 方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{1-11-2}$$

显然式（1-11-1）在下列规范变换

$$A'_\mu = A_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x) \tag{1-11-3}$$

下不变，其中$\varepsilon(x)$为任意函数，按 1-8 节中的讨论，式(1-11-1)所示 Lagrange 量密度是奇异的，场A_μ的共轭动量为

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} \tag{1-11-4}$$

所以初级约束为

$$\phi^0 = \pi^0(x) \approx 0 \tag{1-11-5}$$

利用式(1-11-4)，自由电磁场的 Lagrange 量密度可写为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{1-11-6}$$

系统的正则 Hamilton 量密度为

$$\mathscr{H}_c = \pi_i \dot{A}_i - \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{1-11-7}$$

式中，$\dot{A}_i$ 可表示为

$$\dot{A}_i = \partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0 = \pi_i + \partial_i A_0 \tag{1-11-8}$$

将式(1-11-8)代入式(1-11-7)，可得

$$\mathscr{H}_c = \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \pi_i\,\partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{1-11-9}$$

系统的正则 Hamilton 量为 $H_c = \int_V \mathrm{d}^3 x \mathscr{H}_c$，分部积分略去表面项后，得

$$H_c = \int \mathrm{d}^3 x\left(\frac{1}{2}\pi_i\pi_i - A_0\,\partial_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}\right) \tag{1-11-10}$$

系统的总 Hamilton 量为

$$H_T = H_c + \int \mathrm{d}^3 x \lambda(x)\pi^0(x) \tag{1-11-11}$$

以 A_μ，π^μ 为正则变量的基本 Poisson 括号为

$$\{A_\mu(x),\pi^\nu(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_\mu^\nu\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1-11-12a}$$

$$\{A_\mu(x),A_\nu(y)\}_{x^0=y^0} = \{\pi^\mu(x),\pi^\nu(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{1-11-12b}$$

由初级约束的自洽性条件有

$$\{\pi^0(x),H_T\} = -\left\{\pi^0(x),\int \mathrm{d}^3 x A_0\partial_i\pi_i\right\} \approx 0 \tag{1-11-13}$$

从而所得的次级约束

$$\phi^1 = \partial_i\pi_i \approx 0 \tag{1-11-14}$$

式(1-11-14)恰好是 Gauss 定律，次级约束按式(1-11-14)的自洽性条件，不导致其他新的约束.

由式(1-11-12)计算约束之间的 Poisson 括号为

$$\{\pi^0(x),\pi^0(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{1-11-15a}$$

$$\{\pi^0(x),\,\partial_{iy}\pi_i(y)\}_{x^0=y^0} = \partial_{iy}\,\{\pi^0(x),\pi_i(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{1-11-15b}$$

$$\{\,\partial_{ix}\pi_i(x),\,\partial_{iy}\pi_i(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{1-11-15c}$$

这表明所有约束都是第一类的. 不难验证，H_c 与每一个第一类约束的 Poisson 括号都弱等于 0，因此 H_c 也是第一类量。

在自由电磁场的正则形式表述中，含两个 $2\times\infty^3$ 约束(空间坐标无穷)，即 $\phi^0=\pi^0(x)\approx 0$(初级约束)和 $\phi^1=\partial_i\pi_i\approx 0$(次级约束)，它们均是第一类约束.

1-11-2 标量电动力学

复标量场 $\varphi(x)$代表荷电 Bose 场，自由复标量场的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L} = -(\partial_\mu\varphi)^*(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi \tag{1-11-16}$$

带电 Bose 场与电磁场的相互作用可通过协变微商 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}A_\mu$ 来实现，考虑到式 (1-11-1) 所示自由电磁场的 Lagrange 量密度，电磁场和荷电 Bose

场系统（标量电动力学）的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-(D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi)-m^2\varphi^*\varphi \tag{1-11-17}$$

此 Lagrange 量在下列定域 U（1）规范变换

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x)&=e^{i\varepsilon(x)}\varphi(x)\\ \varphi^{*\prime}(x)&=\varphi^*(x)e^{-i\varepsilon(x)}\\ A'_\mu(x)&=A_\mu(x)+\partial_\mu\varepsilon(x)\end{aligned}\right\} \tag{1-11-18}$$

下是不变的. 可见，上述标量电动力学的 Lagrange 量是奇异的. 场量 A_μ，φ 和 φ^* 的正则共轭动量分别为

$$\pi^i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i}=-F^{0i} \tag{1-11-19a}$$

$$\pi^0=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_0}=0 \tag{1-11-19b}$$

$$\pi_\varphi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=(D_0\varphi)^* \tag{1-11-19c}$$

$$\pi_{\varphi^*}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=D_0\varphi \tag{1-11-19d}$$

系统的初级约束为

$$\Lambda_1=\pi^0\approx 0 \tag{1-11-20}$$

系统的正则 Hamilton 量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c&=\pi^\mu\dot{A}_\mu+\pi_\varphi\dot{\varphi}+\dot{\varphi}^*\pi_{\varphi^*}-\mathscr{L}=\\ &\mathscr{H}_0+A_0[i(\pi_\varphi\varphi-\varphi^*\pi_{\varphi^*})-\partial_i\pi_i]\end{aligned} \tag{1-11-21a}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_0&=\pi_\varphi\pi_{\varphi^*}-(D_i\varphi)^*(D^i\varphi)+\\ &\frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}-\frac{1}{2}\pi_i^2-m^2\varphi^*\varphi\end{aligned} \tag{1-11-21b}$$

初级约束（$\pi^0\approx 0$）的自洽性条件给出的次级约束为

$$\Lambda_2=i(\pi_\varphi\varphi-\dot{\varphi}^*\pi_{\varphi^*})-\partial_i\pi_i\approx 0 \tag{1-11-22}$$

次级约束的自洽性条件不给出新的约束. 容易看出，$\Lambda_1\approx 0$ 和 $\Lambda_2\approx 0$ 均为第一类约束。类似地可以分析电磁场与 Fermi 场耦合系统（旋量电动力学）中的正则约束，该系统同时含第一类约束和第二类约束[2].

1-12 非 Abel 规范场

量子电动力学（QED）具有 Abel 定域规范不变性，将定域规范不变性

推广到非 Abel 规范群，首先是杨振宁和 Mills 给出的，该不变性要求引入新的非 Abel 规范场（或杨-Mills 场）．非 Abel 规范场理论的主要进展是在自发破缺规范场理论建立后，特别是粒子物理中弱电统一理论（QFD，量子味动力学）和强相互作用理论的量子色动力学（QCD）所取得的成功．人们普遍认为，基本粒子间的相互作用都是受规范原理所制约的．强相互作用、弱电统一理论都是通过非 Abel 规范场（杨-Mills 场）所描述的粒子来传递的．本节讨论纯杨-Mills 场，其 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{a} \tag{1-12-1}$$

式中

$$F^{a}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A^{a}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{a}_{\mu}+gf^{a}_{bc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu} \tag{1-12-2}$$

式中：f^{a}_{bc} 为规范群的结构常数．式（1-12-1）具有定域规范不变性（见 3-1 节），式（1-12-1）所示 Lagrange 量是奇异的．下面给出杨-Mills 规范场的正则形式表述．以 $x^0=t$ 为动力学演化参数，相应于杨-Mills 规范势 A^{a}_{μ} 的正则共轭动量

$$\pi^{\mu}_{a}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^{a}_{\mu}}=-F^{0\mu}_{a} \tag{1-12-3}$$

因为 $F^{\mu\nu}_{a}$ 关于指标 μ 和 ν 是反对称的，所以初级约束为

$$\phi^{0}_{a}=\pi^{0}_{a}\approx 0 \tag{1-12-4}$$

系统的正则 Hamilton 量

$$H_{c}=\int d^{3}x\mathscr{H}_{c}=\int d^{3}x(\pi^{\mu}_{a}\dot{A}^{a}_{\mu}-\mathscr{L})=\int d^{3}x\left(\pi^{a}_{i}\dot{A}^{a}_{i}-\frac{1}{2}\pi^{a}_{i}\pi^{a}_{i}+\frac{1}{4}F^{a}_{ij}F^{a}_{ij}\right) \tag{1-12-5}$$

将

$$\dot{A}^{a}_{i}=F^{a}_{0i}+\partial_{i}A^{a}_{0}+gf^{a}_{bc}A^{b}_{0}A^{c}_{i} \tag{1-12-6}$$

代入式（1-12-5），分部积分再略去表面项后，可得

$$H_{c}=\int d^{3}x\left(\frac{1}{2}\pi^{a}_{i}\pi^{a}_{i}-A^{a}_{0}\partial_{i}\pi^{a}_{i}+\frac{1}{4}F^{a}_{ij}F^{a}_{ij}+gf^{a}_{bc}A^{b}_{0}A^{c}_{i}\pi^{a}_{i}\right) \tag{1-12-7}$$

正则变量 A^{a}_{μ}，π^{μ}_{a} 间的基本 Poisson 括号为

$$\{A^{\alpha}_{\mu}(t,\boldsymbol{x}),\pi^{\nu}_{\beta}(t,\boldsymbol{y})\}=\delta^{\alpha}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\mu}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1-12-8a}$$

$$\{A^{\alpha}_{\mu}(t,\boldsymbol{x}),A^{\beta}_{\nu}(t,\boldsymbol{y})\}=\{\pi^{\mu}_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}),\pi^{\nu}_{\beta}(t,\boldsymbol{y})\}=0 \tag{1-12-8b}$$

系统的总 Hamilton 量为

$$H_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{c}} + \int \mathrm{d}^3 x \lambda^a(x)\pi_a^0(x) \tag{1-12-9}$$

由初级约束的自洽性条件给出次级约束

$$\phi_a^1 = \{\pi_a^0(x), H_{\mathrm{T}}\} = \partial_i \pi_a^i - g f_{bc}^a A_i^b \pi_c^i \approx 0 \tag{1-12-10}$$

用 D_μ 代表协变微商，对任意带群指标的函数 f^a，有

$$\mathrm{D}_\mu f^a = \partial_\mu f^a - g f_{bc}^a A_\mu^b f^c \tag{1-12-11}$$

用协变微商表示，$\phi_a^1 = \mathrm{D}_i \pi_a^i \approx 0. H_{\mathrm{c}}$ 又可写为

$$H_{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{1}{2}\pi_i^a \pi_i^a + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a - A_0^a \phi_a^1 \right) \tag{1-12-12}$$

次级约束的自洽性条件在约束 $\phi_a^0 \approx 0$ 和 $\phi_a^1 \approx 0$ 所决定的超曲面上已自动满足，因为

$$\{\phi_a^1, H_{\mathrm{T}}\} = g f_{ab}^c A_0^b \phi_c^1 \tag{1-12-13}$$

进一步计算表明

$$\{\phi_a^0(t,\boldsymbol{x}), \phi_b^0(t,\boldsymbol{y})\} = 0 \tag{1-12-14a}$$

$$\{\phi_a^0(t,\boldsymbol{x}), \phi_b^1(t,\boldsymbol{y})\} = 0 \tag{1-12-14b}$$

$$\{\phi_a^1(t,\boldsymbol{x}), \phi_b^1(t,\boldsymbol{y})\} = - g f_{ab}^c \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \phi_c^1 \tag{1-12-14c}$$

所以，约束间的 Poisson 括号弱等于 0，即 ϕ_a^0 和 ϕ_a^1 均是第一类约束.

参考文献

[1] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1993.

[2] 李子平. 约束哈密顿系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1999.

[3] Li Ziping. Symmetry in a constrained Hamiltonian system with a singular higher-order Lagrangian. J Phys A：Math Gen，1991，24：4216-4274.

[4] 李子平. 高阶微商场论中奇异系统正则形式的 Noether 定理和 Poincaré-Cartan 积分不变量. 中国科学：A 辑，1992，22(9)：977-986.

[5] Li Ziping. Generalized Noether's theories in canonical formalism for field theories and their applications. Int J Theor Phys，1993，32(1)：201-215.

[6] Li Ziping. Symmetry in phase space for a system with a singular Lagrangian. Phys Rev，1994，E50：876-887.

[7] Li Ziping. Generalized Noether's identities for non-local transformation. Int J Theor Phys，1995，34 (9)：1945-1954.

[8] Li Ziping，Jiang Jinhuan. Symmetries in constrained canonical systems. Beijing：Science Press，2002.

[9] Li Ziping. Ward identities in phase space and their applications. Acta Phys Sin (O-

verseas Edition), 1994, 3 (7): 481-492.

[10] Li Ziping. Ward identities in canonical formalism for a system with a singular higher-order Lagrangian. Euro Phys Lett , 1994, 27: 563-567.

[11] Li Ziping. Canonical symmetry of a constrained Hamiltonian system and canonical Ward identities. Int J Theor Phys, 1995, 34 (4): 523-543.

[12] Li Ziping. Canonical symmetry in a system with a singular Lagrangian and canonical Ward identities. High Ener phys & Nucl phys (USA), 1994, 18 (3): 265-273.

[13] Li Ziping, Yang Chi. Quantal canonical symmetry for a constrained Hamiltonian system. J Phys A: Math Gen, 1995, 28 (20-21): 5931-5941.

[14] Li Ziping. Global canonical symmetry in the phase space path integral for a system with a singular Lagrangian. Euro Phys Lett, 1996, 34 (5): 325-329.

[15] 李子平. 量子系统的整体正则对称性. 中国科学: A辑, 1996, 26 (7): 649-656.

[16] 李子平. 奇异拉氏量系统的整体量子正则对称性质. 物理学报, 1996, 45 (10): 1601-1608.

[17] Li Ziping. Canonical global symmetry in the functional integral formalism of the system and conservation laws. Z Phys , 1997, C76: 181-189.

[18] Li Ziping, Bao Jun. Canonical symmetry in the functional formalism. Int J Theor Phys, 1999, 38 (6): 1677-1695.

[19] Li Ziping, Long Zengwen. Quantum symmetry for a system with a singular higher-order Lagrangian. J Phys A: Math Gen, 1999, 32: 6391-6407.

[20] 李子平. 量子水平的 Noether 恒等式. 高能物理与核物理, 2002, 26 (3): 230-238.

[21] Li Ziping, Long Zengwen. Qauntum Noether identities for non-local transformations in higher-order derivatives theories. Euro Phys J, 2003, C30 (2): 263-272.

[22] Zhang Ying, Li Ziping. The quantal Poincaré-Cartan integral invariant for field theory. Int Theor Phys, 2004, 43 (12): 1412-1417.

[23] Zhang Ying, Li Ziping. The quantal Poincaré-Cartan integral invariant for singular higher-order Lagrangian in field theories. Euro Phys J, 2005, C41: 257-263.

[24] Li Ruijie , Li Ziping. Symmetries in a constrained systems with a singular higher-order Lagrangian. Int J Theor Phys, 2006, 45 (2): 395-420.

[25] Jiang Jinhuan, Li Ziping. Transformation properties of dynamical system at the quantum level. Int J Theor Phys, 2007, 46 (6): 1738-1746.

[26] Dirac P. A. M. Lecture on quantum mechanics. New York: Yeshiva University, 1964.

[27] Anderson J L , Bergmann P G. Constraints in covariant field theories. Phys Rev, 1951, 83 (5): 1018-1025.

[28] Bergmann P G, Anderson J L. Dirac bracket transformations in phase space. Phys Rev, 1955, 98 (2): 531-538.

[29] Sudarshan E, Mukunda N. Classical dynamics. New York: John Wiley, 1974.

[30] Hanson A, Regge T, Teitelboim C. Constrained Hamiltonian system. Rome: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

[31] Sundrmeyer K. Constrained dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[32] Gitman D M , Tyutin I V. Quantization of fields with constraints. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[33] Henneaux M, Teitelboim C. Quantization of gauge system. Princeton: Princeton University Press, 1992.

[34] Wang Anmin, Ruan Tunan. Extension of the Dirac-Bergmann theory of constrained system. Phys Rev, 1996, A54: 57-80.

[35] Costa M E V, Girotti H O, Simoes T J M. Dynamics of gauge system and Dirac's conjecture. Phys Rev, 1985, D32: 405-410.

[36] Li Ziping. Generalized Noether identities and application to Yang-Mills field theory. Int J Theor Phys, 1987, 26(9): 853-860.

[37] Li Ziping, Li Xin. Generalized Noether theorems and applications. Int J Theor Phys, 1991, 30(2): 225-233.

[38] Cabo A. Dirac's Conjecture for systems having only first-class constraints. J Phys A: Math Gen, 1986, A19: 629-638.

[39] Henneaux M, Teitelboim C , Zanelli J. Gauge invariance and degree of freedom count. Nucl Phys, 1990, B322: 169-188.

[40] Allock G R. The intrinsic properties of rank and nullity of the Lagrange bracket in the one dimensional calculus of variations. Phil Trans Roy Soc, 1975, A279: 485-545.

[41] Cawley R. Determination of the Hamiltonian in the presence of constraints. Phys Rev Lett, 1979, 42: 413-416.

[42] Cawley R. Augmented algorithm for the Hamiltonian. Phys Rev, 1980, D21: 2988-2990.

[43] Li Ziping, Li Aimin, Jiang Jinhuan, et al. On Dirac's conjecture. Commun Theor Phys, 2005, 43: 1115-1118.

[44] Li Ziping, On the invalidity of a conjecture of Dirac. Chinese Phys Lett , 1993, 10 (2): 68-70.

[45] Jin Xiaoyue, Li Ziping. On the invalidity of Dirac's conjecture for a system with a singular higher-order Lagrangian. J Phys A: Math Gen, 2001, 34: 10201-10207.

[46] 李爱民，江金环，李子平. Dirac 猜想的一个反例. 物理学报，2002，51(5)：943-945.

第 2 章

约束系统的量子化

本章阐述约束系统的算符形式正则量子化和路径积分量子化．奇异 Lagrange 量系统过渡到相空间中描述时，其正则变量间存在固有约束，为约束 Hamilton 系统，初等量子力学(和场论)中用 Poisson 括号与量子括号的对应来实现约束系统的量子化已不适用．在约束系统的算符形式量子化中将分别阐述 Dirac 量子化和 Faddeev-Jackiw(FJ)量子化；而路径积分量子化方案将分别阐述 Faddeev-Popov(FP)量子化、Faddeev-Senjanovic(FS)量子化以及 Batalin-Fradkin-Vilkovisky(BFV)量子化，并通过一些具体场论模型(如杨-Mills 场、Chern-Simons(CS)理论等)作详细分析．

2-1 Dirac 量子化

一个用奇异 Lagrange 量描述的系统(包括所有定域不变理论)在相空间中描述时存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统. 由于存在约束，在初等量子力学中对系统作量子化的方法不能直接用于该系统.

约束 Hamilton 系统的量子化问题关键在于处理约束，其中最直接的方法就是解约束方程，分离真正的独立正则变量(约化相空间)，然后再对独立的物理自由度量子化. 此方法虽然原则上可行，但是对实际的约束系统，在处理上常常是很困难的.

另一种方法是量子化所有动力学变量，用约束条件来挑选物理态. 这种对约束系统的 Hamilton 形式量子化的基础是由 Dirac 首先奠定的[1]，这是一种算符形式的正则量子化方案.

至今对约束 Hamilton 系统量子化的认识已有了相当的进展. Faddeev 提出了对含第一类约束系统的路径积分量子化方案[2]，其后 Senjanovic 给出了同时含第一类约束和第二类约束的路径积分量子化方案[3]. 相对论协变形式的正则量子化方法是由 Fradkin 及其合作者给出的，通常将这种方法称为 BFV 量子化方法. 在此量子化方法中至关重要的是 BRST(Becchi-Rouet-Stora-Tyutin)对称和 BRST 荷. 这方面无论在经典理论还是路径积分理论以及算符理论中均开展了大量研究[4-5]. 对奇异 Lagrange 量系统，除了 Hamilton 形式量子化外，还存在其他形式的量子化方案，其中最著名的 Lagrange

量子化方案是所谓 FP 量子化方法[6-7]，其他的 Lagrange 量子化方案也已给出，其中 BV(Batalin-Vilkovisky)量子方案日益受到人们的关注[8]. 此外，Faddeev 和 Jackiw 还给出了另一种量子化方案[9].

基本粒子分 Bose 子和 Fermi 子. Bose 场的量子化场量适合对易关系，而 Fermi 场的量子化则适用反对易关系. 对易关系中的量的经典对应为普通的数，即经典的数(C-数). 本节讨论 C-数描述的系统的 Dirac 量子化.

所谓系统的量子化就是要将该系统的经典理论过渡到量子理论. 有限自由度的正规 Lagrange 量系统过渡到 Hamilton 体制后，其正则量子化(正则算符量子化形式)是通过以下几个步骤来实现的.

(1)系统的量子态用 Hilbert 空间中的态矢$\boldsymbol{\Psi}$来描述.

(2)经典理论中任一物理量 $F(q,p)$，在量子理论中相应于 Hilbert 空间中一算符 $\hat{F}=\hat{F}(\hat{q},\hat{p})$，其坐标和动量算符 $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$ 适合下列正则对易关系(取 $\hbar=1$)：

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{q}^a,\hat{p}_b]_-=\mathrm{i}\delta^a_b\\&[\hat{q}^a,\hat{q}^b]_-=[\hat{p}_a,\hat{p}_b]_-=0\end{aligned}\right\}\tag{2-1-1}$$

(3)态矢$\boldsymbol{\Psi}$随时间的演化满足Schrödinger方程，即

$$\mathrm{i}\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t}=\hat{H}\boldsymbol{\Psi}\tag{2-1-2}$$

式中：算符 $\hat{H}$ 是量子 Hamilton 量，它相应于经典正则 Hamilton 量 H_c.

物理量 $\hat{F}$ 在态$|\rangle$中的平均值为$\langle|\hat{F}|\rangle=\langle\hat{F}\rangle$(这里用 Dirac 记号来表征量子态). 由 Schrödinger 方程，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{F}\rangle=-\mathrm{i}\langle[\hat{F},\hat{H}]\rangle\tag{2-1-3a}$$

在经典力学中，对正规 Lagrange 量系统力学量 $F(q,p)$ 随时间的演化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F=\{F,H\}\tag{2-1-3b}$$

式中：$\{\cdot,\cdot\}$代表 Poisson 括号.

由此可见，只要将相空间中的函数 F 过渡到量子可观察算符 $\hat{F}$，并将经典 Poisson 括号用量子对易式，按

$$\{A,B\}\longrightarrow\mathrm{i}[\hat{A},\hat{B}]_-\tag{2-1-4}$$

方式代替，那么经典的正则方程式(2-1-3b)形式上就变为式(2-1-3a). 式中，

$$[\hat{A},\hat{B}]_-=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

对正规 Lagrange 量系统上述正则量子化的算符形式在初等量子力学中

是人们熟知的. 对奇异 Lagrange 量系统，在相空间存在固有约束 $\phi_a(q,p)=0$，过渡到量子理论中其相应的算符方程为

$$\hat{\phi}_a(\hat{q},\hat{p})=0 \quad (a=1,2,\cdots,k) \tag{2-1-5}$$

在一些实际物理系统中，如果将经典理论中，的约束条件过渡到量子理论时，视为算符方程将会导致与对易关系式(2-1-1)不相容，例如电磁场的量子化就出现了这种情况. 于是，约束条件量子化后，将它作为对物理态的挑选. 也就是说，式(2-1-5)作用在物理态 $|\rangle_P$ 上为 0，即

$$\hat{\phi}_a\ (\hat{q},\hat{p})\ |\rangle_P=0 \tag{2-1-6}$$

适合这种要求的态矢量称为物理态矢量，记为 $|\rangle_P$. 全部物理态矢量的集合构成一个物理态子空间. 设系统仅存在两个约束，即

$$\phi_1(q,p)=0,\quad \phi_2(q,p)=0 \tag{2-1-7}$$

相应于这些约束的量子力学表述为

$$\hat{\phi}_1(\hat{q},\hat{p})\ |\rangle_P=0,\quad \hat{\phi}_2(\hat{q},\hat{p})\ |\rangle_P=0 \tag{2-1-8}$$

由式(2-1-8)，有

$$[\hat{\phi}_1(\hat{q},\hat{p}),\hat{\phi}_2(\hat{q},\hat{p})]_-\,|\rangle_P=0 \tag{2-1-9}$$

将式(2-1-9) 回到经典的对应式，可见约束 ϕ_1 和 ϕ_2 为第一类约束.

由此可见，当系统存在第二类约束时，如果采用类似于式(2-1-4)的对应关系，那么在经典力学和量子力学对应上将会出现矛盾. 为了克服这个困难，Dirac 引进了所谓Dirac 括号. 由于第二类约束的 Dirac括号为 0，对含第二类约束的系统，就采用 Dirac 括号与量子括号(对易式)相对应的方法. 这样，经典理论和量子理论的对应关系就不再出现不自洽的情况了.

在上述量子化条件中，从经典的可观察量过渡到量子可观察量存在算符的次序问题，经典物理量不对应于唯一的量子物理量. 值得注意的是，当 Dirac 括号后的结果仍然依赖 于(q,p) 时，这样的量子化条件一般是难于使用的. 例如，杨-Mills 理论的量子化就出现了这种情况.

当系统同时含第一类约束和第二类约束时，可将其中的约束作线性组合，使尽可能多的约束归到第一类约束. 在场论中，可能出现约束和约束的空间微商的线性组合转变为第一类约束.

通常第一类约束与系统的规范自由度相联系. 对每一个第一类约束，相应选取一个规范条件，以固定规范自由度. 设系统所含的第一类约束为

$$\Lambda_a(q,p)\approx 0 \qquad (a=1,2,\cdots,m) \tag{2-1-10}$$

对每一个第一类约束，需选取相应的规范条件，即

$$\Omega_a(q,p)\approx 0 \qquad (a=1,2,\cdots,m) \tag{2-1-11}$$

原则上规范条件至少要满足如下一些要求[10].

(1)规范条件必须固定规范,即当 q 和 p 适合规范条件式(2-1-11)时,经规范变换后的 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$ 将不再满足式(2-1-11).

(2)规范条件必须与系统的运动方程不相矛盾,即规范条件的选取必须与系统的运动方程相自洽.

(3)规范条件必须为系统动力学演化(运动方程和初始条件)所保持,即规范条件随时间演化是稳定的,规范条件(与约束条件一样)适合(约束的)相容性条件.

(4)规范条件必须是可以达到的.从 q 和 p 不满足规范条件式(2-1-11)出发,必须能找到一规范变换,将 q 和 p 变为 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$,使得 $\Omega_a(\bar{q},\bar{p})\approx 0$.

(5)规范条件必须适合

$$\det|\{\Omega_a,\Lambda_b\}|\neq 0 \tag{2-1-12}$$

于是,由约束的相容性条件可知,Hamilton 量中与第一类约束相联系的 Lagrange 乘子就完全确定了.这样选取的规范条件,可将第一类约束均转变为第二类约束,等等.

对同时含第一类约束和第二类约束的系统,相应于每一个第一类约束,需选取适当的规范条件使其对全部约束来说(包括规范约束)已成为第二类约束了,这样就可按仅含第二类约束的情况来量子化.

在约束 Hamilton 系统量子化结果中,不依赖于规范条件的选取,即不同规范下量子化结果是等价的[11].

以上说明的约束系统的 Dirac 括号量子化方法,可以直接推广到场论中的奇异 Lagrange 量系统.如果该系统同时存在第一类约束和第二类约束,则需对第一类约束引入规范条件使其变为只含第二类约束的情况来处理.

在 Schrödinger 表象中,算符与时间无关,并且满足如下的对易关系

$$[\hat{\varphi}^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\hat{\varphi}^\beta(t,\boldsymbol{y})]_-=\mathrm{i}\{\varphi^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\varphi^\beta(t,\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}}\,|_{\varphi^\alpha\to\hat{\varphi}^\alpha} \tag{2-1-13a}$$

$$[\hat{\pi}_\alpha(t,\boldsymbol{x}),\hat{\pi}_\beta(t,\boldsymbol{y})]_-=\mathrm{i}\{\pi_\alpha(t,\boldsymbol{x}),\pi_\beta(t,\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}}\,|_{\pi_\alpha\to\hat{\pi}_\alpha} \tag{2-1-13b}$$

$$[\hat{\varphi}^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\hat{\pi}_\beta(t,\boldsymbol{y})]_-=\mathrm{i}\{\varphi^\alpha(t,\boldsymbol{x}),\pi_\beta(t,\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}}\,|_{\varphi^\alpha\to\hat{\varphi}^\alpha,\pi_\alpha\to\hat{\pi}_\alpha} \tag{2-1-13c}$$

如果这些关系式的右端含有场算符,这样的量子化条件一般是不便于使用的,例如,在 Coulomb 规范下非 Abel 规范场的量子化问题就出现了这种情况.然而,用路径积分(或泛函积分)量子化就无此困难.在规范场论中用路径积分表述比正则算符形式表述更方便,例如,导出 Feynman 规则、给出 Ward-Takahashi恒等式的证明,以及非微扰现象的研究等.路径积分量子化[12]等将在本章后面讨论.其他形式的量子化方案有随机量子化形式,采用不定度规形式来实现对系统的量子化,在电磁场量子化中早已采用.

2-2 含 Fermi 变量的系统

在旋量场(Fermi 场)的量子化中，场量作为算符适合反对易量子化规则. 场算符的经典对应为反对易 C-数，即 Grassmann 数. Grassmann 代数是复数域 C 上的线性空间，数乘和加法运算具有双线性. 抽象的有限维 Grassmann 代数 G_n 由 n 个元素 $\eta_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$生成，它们满足

$$[\eta_\alpha,\eta_\beta]_+ = \eta_\alpha\eta_\beta + \eta_\beta\eta_\alpha = 0 \quad (\alpha,\beta = 1,2,\cdots,n) \tag{2-2-1}$$

式中：η_α 和 η_β 之间是反对易的；G_n 为 2^n 维线性空间，此空间的基底可取为

$$1,\eta_\alpha,\eta_\alpha\eta_\beta(\alpha<\beta),\cdots,\eta_1\eta_2\cdots\eta_n \tag{2-2-2}$$

G_n 中任一元素可写为

$$u(\eta) = \omega_0 + \omega_\alpha\eta_\alpha + \omega_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta + \cdots + \omega_{12\cdots n}\eta_1\eta_2\cdots\eta_n \tag{2-2-3}$$

式中：$\omega_0,\omega_\alpha,\cdots,\omega_{12\cdots n}\in C$；$u(\eta)$ 至多是 2^n 项之和. 由于式(2-2-1)$\eta_\alpha\eta_\alpha=\eta_\alpha^2=0$，因此，式(2-2-3)中同一个 η_α 不会出现两次. 空间 G_n 可分为两个子空间 $G_n^{(0)}$ 和 $G_n^{(1)}$ 之和，即

$$G_n = G_n^{(0)} + G_n^{(1)} \tag{2-2-4}$$

式中：$G_n^{(0)}$ 由 G_n 的偶元素组成，即式(2-2-3)中仅含偶数个 η_α 之积的那些元素；$G_n^{(1)}$ 是 G_n 的奇元素(奇数个 η_α 之积)所构成的子空间. 对偶元素和奇元素分别定义它们的 Grassmann 宇称，偶元素 u 其 Grassmann 宇称为 $n_u=0$；奇元素 u 其 Grassmann 宇称为 $n_u=1$. 于是就有

$$uv = (-1)^{n_u n_v} vu \tag{2-2-5}$$

$G_n^{(0)}$ 中的元素为 Bose 型，$G_n^{(1)}$ 中的元素为 Fermi 型. 对式(2-2-3)求微商，除遵从一般的求导规则外，还须考虑到不同 η_α 之间的反对易关系，并且对 Grassmann 数还应区分左微商$\dfrac{\partial_l u}{\partial\eta_\alpha}$或右微商$\dfrac{\partial_r u}{\partial\eta_\alpha}$. 左微商和右微商分别有两种微分表达式，即

$$\mathrm{d}u(\eta) = \mathrm{d}\eta_\alpha\frac{\partial_r u}{\partial\eta_\alpha},\quad \mathrm{d}u(\eta) = \frac{\partial_l u}{\partial\eta_\alpha}\mathrm{d}\eta_\alpha \tag{2-2-6}$$

一般来说，左微商、右微商是不同的，它们之间的关系为

$$\frac{\partial_l u}{\partial\eta_\alpha} = -(-1)^{n_u}\frac{\partial_r u}{\partial\eta_\alpha} \tag{2-2-7}$$

G_n 中任意两个元素 u_1 和 u_2 之积的微商规则为

$$\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}(u_1u_2) = \left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}u_1\right)u_2 + (-1)^{n_{u_1}}u_1\left(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}u_2\right) \tag{2-2-8}$$

下面考虑同时由C-数 q^i 和 Grassmann 数 η^a 描述的动力学系统. 设系统的 Lagrange 量为 $L(q^i,\dot{q}^i,\eta^a,\dot{\eta}^a)$，则系统的 EL 方程为

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q^i},\quad \dot{\pi}_a=\frac{\partial_l L}{\partial \eta^a} \tag{2-2-9}$$

其中

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i},\quad \pi_a=\frac{\partial_l L}{\partial \dot{\eta}^a} \tag{2-2-10}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c=\dot{q}^i p_i+\dot{\eta}^a\pi_a-L \tag{2-2-11}$$

类似地，根据 Lagrange 量的 Hess 矩阵$\left[\frac{\partial_r^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}^i\partial \dot{Q}^j}\right]$$(Q^i=(q^i,\eta^i))$是否退化，来区分正规 Lagrange 量和奇异 Lagrange 量. 对正规Lagrange量系统，其正则方程为

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H_c}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H_c}{\partial q^i} \tag{2-2-12a}$$

$$\dot{\eta}^a=\frac{\partial_r H_c}{\partial \pi_a}=-\frac{\partial_l H_c}{\partial \pi_a},\quad \dot{\pi}_a=-\frac{\partial_l H_c}{\partial \eta^a} \tag{2-2-12b}$$

相空间由变量(q^i,p_i,η^a,π_a)张成. C-数变量可视为 Grassmann 代数中的偶元素.

含 Grassmann 变量的 Poisson 括号需略加修改. 设 F 和 G 均为 Grassmann 变量 η^a 和 π_a 的函数，F 与 G 的 Poisson 括号为

$$\{F,G\}=\frac{\partial_r F}{\partial \eta^a}\frac{\partial_l G}{\partial \pi_a}-(-1)^{n_F n_G}\frac{\partial_r G}{\partial \eta^a}\frac{\partial_l F}{\partial \pi_a} \tag{2-2-13}$$

式中：n_F 和 n_G 分别为 F 和 G 的 Grassmann 宇称，此 Poisson 括号具有与通常 Poisson 括号相似的性质，但要注意相应的 Grassmann 宇称. 含 Grassmann 变量正规 Lagrange 量系统的量子化规则为

$$\mathrm{i}\{F,G\}\to\hat{F}\hat{G}-(-1)^{n_F n_G}\hat{G}\hat{F} \tag{2-2-14}$$

式中：右端 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 分别为 F 和 G 对应的算符. 例如，对于 Fermi 场，式(2-2-14)给出反对易量子化规则.

对于同时含 C-数和 Grassmann 数系统的 Poisson 括号，采用 Bose-Fermi 括号(简记为 BFB)[7].

对于含 Grassmann 变量的奇异 Lagrange 系统，过渡到 Hamilton 形式后，在相空间存在约束. 对含第二类约束 $\theta_i(i=1,2,\cdots,I)$ 的系统，类似可定义 Dirac 括号，即

$$\{F,G\}_D=\{F,G\}-\{F,\theta_i\}c_{ij}^{-1}\{\theta_j,G\} \tag{2-2-15}$$

式中

$$c_{ij}^{-1}\{\theta_j,\theta_k\}=\delta_{ik} \tag{2-2-16}$$

此 Dirac 括号具有如下性质

$$\{F,G\}_{\mathrm{D}}=-(-1)^{n_F n_G}\{G,F\}_{\mathrm{D}} \tag{2-2-17}$$

$$\{F,GK\}_{\mathrm{D}}=\{F,G\}_{\mathrm{D}}K+(-1)^{n_F n_G}G\{F,K\}_{\mathrm{D}}+ \tag{2-2-18}$$

$$(-1)^{n_F n_K}\{F,\{G,K\}_{\mathrm{D}}\}_{\mathrm{D}}+(-1)^{n_G n_F}\{G,\{K,F\}_{\mathrm{D}}\}_{\mathrm{D}}+$$

$$(-1)^{n_K n_G}\{K,\{F,G\}_{\mathrm{D}}\}_{\mathrm{D}}=0 \tag{2-2-19}$$

具有 Grassmann 变量含第二类约束的奇异 Lagrange 量系统的量子化规则为

$$\mathrm{i}\{F,G\}_{\mathrm{D}}\rightarrow\hat{F}\hat{G}-(-1)^{n_F n_G}\hat{G}\hat{F} \tag{2-2-20}$$

对于同时含第一类约束和第二类约束的 Grassmann 数系统，像 C-数系统一样需选取规范条件，首先使其转化为第二类约束然后，按第二类约束系统实现量子化.

旋量场描写自旋为 1/2 的粒子及其反粒子. 根据自旋和统计的关系，该粒子为 Fermi 子. 旋量场的经典场函数 $\psi(x)$ 应为Grassmann 代数中的元素. 自由旋量场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi \tag{2-2-21}$$

式中：$\psi=\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}=\bar{\psi}(x)=\psi^+(x)\gamma^0$ 均为 Grassmann 代数中的奇元素. 按它们在 Lorentz 群下的变换性质，$\psi(x)$ 为 Dirac 旋量，$\bar{\psi}(x)$ 为 Dirac 共轭旋量，γ^μ 为 Dirac γ-矩阵，有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \tag{2-2-22}$$

场的 EL 方程为

$$\frac{\delta_{\mathrm{r}}I}{\delta\bar{\psi}}=-(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0 \tag{2-2-23a}$$

$$\frac{\delta_{\mathrm{r}}I}{\delta\psi}=-\bar{\psi}(\mathrm{i}\overleftarrow{\partial_\mu}\gamma^\mu+m)=0 \tag{2-2-23b}$$

式中：I 为作用量，$I=\int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x$. 式(2-2-21) 是奇异的，因为其中不含 $\bar{\psi}$ 的时间微商，并且 $\mathscr{L}$ 对 $\dot{\psi}$ 的依赖是线性的.

下面过渡到 Hamilton 形式，相应 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的正则动量分别为

$$\pi_\psi=\frac{\partial_{\mathrm{r}}\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \tag{2-2-24}$$

$$\pi_{\bar{\psi}}=\frac{\partial_{\mathrm{r}}\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}=0 \tag{2-2-25}$$

这两个式子均不能确定 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\bar{\psi}}$，因此初级约束分别为

$$\theta_1 = \pi_{\bar{\psi}} \approx 0 \tag{2-2-26}$$

$$\theta_2 = \pi_{\psi} - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \tag{2-2-27}$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \dot{\psi}\pi_\psi + \dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}} - \mathscr{L} = \bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^k\partial_k + m)\psi \tag{2-2-28}$$

式中：$\dot{\psi}\pi_\psi = (\partial_0\psi_a)(\pi_\psi)_a$. 总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}} = \int[\mathscr{H}_c + \lambda^1\pi_{\bar{\psi}} + \lambda^2(\pi_\psi - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0)]\mathrm{d}^3x \tag{2-2-29}$$

式中：$\lambda^1(x)$ 和 $\lambda^2(x)$ 为 Lagrange 乘子，它们均为奇变量. 由初级约束 θ_1 和 θ_2 的自洽性条件 $\{\theta_i, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0 (i=1,2)$，给出了确定 Lagrange 乘子 $\lambda^i(x)(i=1,2)$ 的方程，且不产生次级约束. 显然，约束 θ_1 和 θ_2 为第二类约束.

为了计算与第二类约束相应的 Dirac 括号，先计算 θ_i 和 θ_j 之间的 Poisson 括号. 场论中含 Fermi 子情形相空间变量的函数 F 和 G 的 Poisson 括号为

$$\{F(x), G(y)\} = \int\mathrm{d}^3z\left[\frac{\partial_r F(x)}{\partial\psi(\boldsymbol{z})}\frac{\partial_l G(y)}{\partial\pi_\psi(\boldsymbol{z})} - (-1)^{n_F n_G}\frac{\partial_r G(y)}{\partial\psi(\boldsymbol{z})}\frac{\partial_l F(x)}{\partial\pi_\psi(\boldsymbol{z})}\right] \tag{2-2-30}$$

由式(2-2-26)、式(2-2-27)，约束 θ_i 和 θ_j 间的 Poisson 括号 $\{\theta_i, \theta_j\}$ 构成的矩阵

$$\boldsymbol{C} = -\mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 & \gamma_0^{\mathrm{T}} \\ \gamma_0 & 0 \end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-2-31}$$

其逆矩阵

$$\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 & \gamma_0 \\ \gamma_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-2-32}$$

场论中的 Dirac 括号

$$\{F(x), G(y)\}_{\mathrm{D}} = \{F(x), G(y)\} - \int\mathrm{d}z\mathrm{d}w\{F(x), \theta_i(z)\} \cdot c_{ij}^{-1}(z,w)\{\theta_j(w), G(y)\} \tag{2-2-33}$$

式中：$c_{ij}^{-1}\{\theta_j, \theta_k\} = \delta_{ik}$. 由此可求出：

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_{\mathrm{D}} = -\mathrm{i}\gamma^0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-2-34}$$

$$\{\psi(x), \pi_\psi(y)\}_{\mathrm{D}} = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-2-35}$$

Fermi 场 ψ 过渡到量子理论时，

$$\{\psi, \pi\}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathrm{i}[\hat{\psi}, \hat{\pi}]_+ \tag{2-2-36}$$

式中：$[\cdot,\cdot]_+$ 为场算符的反对易子；$\hat{\psi}$ 和 $\hat{\pi}$ 分别为 ψ 和 π 相应的算符（下面常略去"^"符号）. 这样就给出了旋量场的量子化规则.

2-3 电磁场的量子化

电磁场为矢量场，它描写自旋为 1 的光子. 电磁场四维势 A_μ 为 Bose 变量. 自由电磁场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2-3-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2-3-2}$$

式中：电磁势 A_μ 的正则共轭动量 $\pi^\mu = -F^{0\mu}$. 系统的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L} = \pi_i\pi_i - A_0\partial_i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{2-3-3}$$

初级约束

$$\phi^0 = \pi^0 \approx 0 \tag{2-3-4}$$

由初级约束的自洽性条件，导出次级约束

$$\phi^1 = \partial_i\pi_i \approx 0 \tag{2-3-5}$$

次级约束 $\phi^1 \approx 0$ 的自洽性条件，不产生其他新的约束. 全部约束 $\phi^0 \approx 0$ 和 $\phi^1 \approx 0$ 均为第一类约束.

Lagrange 量式(2-3-1)在 A_μ 的规范变换下是不变的. 系统仅含第一类约束，第一类约束是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换. 在 A_μ 和 $\dot{A}_\mu$ 的确定初值下，根据系统的运动方程只能把 $A_\mu(x)$ 确定到相差任意的一个规范变换. 第一类约束系统的量子化，需选取规范条件（固定规范）.

对系统中的每一个第一类约束需引入相应的规范条件（规范约束）. 电动力学中常取 Coulomb 规范和 Lorentz 规范. 其中 Lorentz 规范条件为

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 - \partial_i A^i = 0 \tag{2-3-6}$$

这条件对约束系统的 Dirac 处理不合适，这里 A_0 起着 Lagrange 乘子的作用，使 Lorentz 规范条件含有乘子的时间微商；另一原因是式(2-3-6)仅有一个规范条件，而系统有两个第一类约束，需有两个规范条件. 由式(2-3-6)也可看到，这个条件未能完全固定规范，它仅限制了规范变换 $A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu\varepsilon$ 中，函数 $\varepsilon(x)$ 需适合 $\partial_\mu\partial^\mu\varepsilon(x) = 0$. 考虑选取 Coulomb 规范，Coulomb 规范条件为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} \approx 0 \tag{2-3-7}$$

它与系统的运动方程不矛盾. 设场 A_μ 在无穷远处足够快地趋于 0. 规范条件随时间是稳定的,式(2-3-7)的自洽性条件要求

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{A}} \approx 0 \tag{2-3-8}$$

由 $\pi^\mu = -F^{0\mu}$,有 $\pi^0 \approx 0$. 又 $\boldsymbol{\pi} = -(\nabla A_0 - \dot{\boldsymbol{A}})$,利用次级约束条件$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} \approx 0$,得

$$\boldsymbol{\nabla}^2 A_0(x) \approx 0 \tag{2-3-9}$$

根据这个方程式和场的边界条件,由调和函数的性质可以 确定 $A_0(x)$,即

$$A_0(x) \approx 0 \tag{2-3-10}$$

式(2-3-7)、式(2-3-10)为 Coulomb 规范下的全部规范约束条件(系统具有两个第一类约束,此处恰好有两个规范条件),并称为辐射规范,其辐射规范为

$$\Omega_1 = A_0 \approx 0 \tag{2-3-11}$$

$$\Omega_2 = \partial_i A_i \approx 0 \tag{2-3-12}$$

系统所具有的第一类约束,记为

$$\Lambda_1 = \pi^0 \approx 0 \tag{2-3-13}$$

$$\Lambda_2 = \partial_i \pi_i \approx 0 \tag{2-3-14}$$

规范条件式(2-3-11)、式(2-3-12)不仅适合 $\det|\{\Omega,\Lambda\}| \not\approx 0$,而且也完全消除了 A_μ 的规范自由度. 由于

$$\{\Omega_1(x),\Lambda_1(y)\}_{x^0=y^0} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-3-15a}$$

$$\{\Omega_1(x),\Lambda_2(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{2-3-15b}$$

$$\{\Omega_2(x),\Lambda_2(y)\}_{x^0=y^0} = -\partial_i\partial_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{\nabla}^2\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-3-15c}$$

$$\{\Omega_2(x),\Lambda_1(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{2-3-15d}$$

将约束 Λ_a 和规范 Ω_a 合起来,记为

$$\psi_i = (\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4) = (\Omega_1,\Omega_2,\Lambda_1,\Lambda_2)$$

并记矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的矩阵元$G_{ij} = \{\psi_i,\psi_j\}$. 于是

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{\nabla}^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\nabla}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-3-16}$$

可见,$\boldsymbol{G}$ 是非奇异的.

下面给出辐射规范下的 Dirac 括号. 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的逆矩阵

$$\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \\ \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-3-17}$$

于是，辐射规范下的 Dirac 括号为

$$\{A(x),B(y)\}_D=\{A(x),B(y)\}-\iint d^3 z_1 d^3 z_2 \{A(x),\psi_i(z_1)\}\cdot$$
$$G_{ij}^{-1}(z_1,z_2)\{\psi_j(z_2),B(y)\} \tag{2-3-18}$$

式中：$\psi_i=(\Omega_1,\Omega_2,\Lambda_1,\Lambda_2)$，所有括号均是“等时”的. 求出基本的 Dirac 括号为

$$\{A_\mu(x),\pi^\nu(y)\}_D=(\delta_\mu^\nu-\delta_\mu^0 g_0^\nu)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-$$
$$\partial_\mu\partial^\nu\frac{1}{4\pi\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\mid} \tag{2-3-19a}$$

$$\{A_\mu(x),A_\nu(y)\}_D=0 \tag{2-3-19b}$$

$$\{\pi^\mu(x),\pi^\nu(y)\}_D=0 \tag{2-3-19c}$$

同时还得到

$$\{A_0(x),\pi^\nu(y)\}_D=0 \tag{2-3-20}$$

$$\{A_\mu(x),\pi^0(y)\}_D=0 \tag{2-3-21}$$

式(2-3-20)、式(2-3-21)与 $A^0=\pi^0=0$ 在 Dirac 括号下视为强方程是一致的. 这样

$$\{A_i(x),\pi^j(y)\}_D=\delta_i^j\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\partial_i\partial^\nu\frac{1}{4\pi\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\mid} \tag{2-3-22}$$

式中：右端有时称为“横向 δ-函数”.

$$\delta_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\delta_{ij}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\partial_i\partial_j\frac{1}{4\pi\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\mid}=$$
$$\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\right) \tag{2-3-23}$$

相空间变量的函 数 $F(A,\pi)$ 的 运动方程为

$$\dot{F}=\{F,H_c\}_D \tag{2-3-24}$$

式中：H_c 为正则 Hamilton 量. 对正则变量有

$$\dot{A}_i=\pi_j \tag{2-3-25}$$

$$\dot{\pi}_j=\partial^i\partial_j A_i-\partial^i\partial_i A_j \tag{2-3-26}$$

现在给出用 A 和 $\boldsymbol{\pi}$ 表达的量子化条件. A_μ 和 π^μ 的算符$\hat{A}_\mu$ 和 $\hat{\pi}^\mu$(在 Schrödinger 表象中) 满足如下关系：

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_\mu(x)=\frac{d}{dt}\hat{\pi}^\mu(x)=0 \tag{2-3-27}$$

$$[\hat{A}_\mu(x),\hat{A}_\nu(y)]_-=0 \tag{2-3-28}$$

$$[\hat{\pi}^\mu(x),\hat{\pi}^\nu(y)]_-=0 \tag{2-3-29}$$

$$[\hat{A}_\mu(x),\hat{\pi}^\nu(y)]_-=i(\delta_\mu^\nu-\delta_\mu^0 g_0^\nu)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-$$
$$i\partial_\mu\partial^\nu\frac{1}{(\boldsymbol{\nabla}^2)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-3-30}$$

$$\hat{\pi}^0(x)=0 \tag{2-3-31}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}(x)=0 \tag{2-3-32}$$

$$\hat{A}_0(x)=0 \tag{2-3-33}$$

$$\boldsymbol{\Delta}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}=0 \tag{2-3-34}$$

这里约定,算符$\frac{1}{(\boldsymbol{\nabla}^2)}$的意义由被作用量的 Fourier 展开来确定.

$$-\frac{1}{(\boldsymbol{\nabla}^2)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=-\int \mathrm{d}^3k\,\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \tag{2-3-35}$$

式(2-3-27) ~ 式(2-3-34) 中的$\hat{A}_0(x)$ 和 $\hat{\pi}^0(x)$ 可根据约束条件从对易关系式和各种物理量的表达式中消去,剩下的$\hat{\boldsymbol{A}}(x)$ 及 $\hat{\boldsymbol{\pi}}(x)$ 满足如下关系:

$$[\hat{A}_j(x),\hat{A}_k(y)]_-=0 \tag{2-3-36}$$

$$[\hat{\pi}_j(x),\hat{\pi}_k(y)]_-=0 \tag{2-3-37}$$

$$[\hat{A}_j(x),\hat{\pi}^k(y)]_-=\mathrm{i}\delta_j^k\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\mathrm{i}\partial_j\partial^k\frac{1}{(\boldsymbol{\nabla}^2)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-3-38}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{A}}(x)=0 \tag{2-3-39}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}(x)=0 \tag{2-3-40}$$

以上仅讨论了辐射规范下电磁场的量子化,而在其他文献中还研究了采用其他规范条件进行量子化的问题[13]. 对不采用 Dirac 括号算符形式的量子化的 Gupta-Bleuler 理论,在有关量子场论的书中有讨论.

2-4 光孤子约束系统

光孤子通信近来受到人们极大的关注. 描述光孤子传输的非线性 Schrödinger 方程,可由 Lagrange 量导出. 在光孤子传输经典理论不断发展和完善的同时,光孤子传输的量子理论也得到较大的发展. 它的量子效应的研究一般是在位形空间中给出的. 在位形空间中,描述光孤子的场量满足量子非线性 Schrödinger 方程. 它是非线性 Schrödinger 方程的量子改形,是按对应原理写出的,给出的对易关系和量子运动方程未计及系统存在约束,这种处理不能认为是严格的. 按 Dirac 约束理论,用奇异 Lagrange 量描述的光孤子系统是约束(正则)Hamilton 系统,它的量子化应该用 Dirac 括号量子化或约束正则系统的路径积分量子化. 这里应用 Dirac 约束理论,对该光孤子系统实行了严格的量子化,给出了系统的对易关系和量子运动方程. 在某些情况下,与对应原理写出的结果相同[14].

对光孤子量子效应的研究一般是通过量子化满足非线性 Schrödinger 方程的场．实际光孤子传输系统，并不能用标准非线性 Schrödinger 方程进行精确描述，而必须考虑一些高阶色散及高阶非线性的影响，传输方程为如下的高阶非线性 Schrödinger 方程(这里采用自然单位制)[14]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2C\Phi\mid\Phi^2\mid=-\mathrm{i}b\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}-\mathrm{i}pC\mid\Phi^2\mid\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

式中：Φ 为光波包络函数；C，p 和 b 为常数．当 $p=6b$ 时，有孤子解，相应系统的Lagrange密度为

$$\mathcal{L}=\mathrm{i}\Phi^*\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+C\Phi^*\Phi^*\Phi\Phi-\mathrm{i}b\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+$$

$$\mathrm{i}3bC\Phi^*\Phi^*\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad (2\text{-}4\text{-}2)$$

式(2-4-2)所示 Lagrange 量密度是奇异的．下面分析系统在相空间中的约束，并给出其量子化．系统的正则动量为

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}}=\mathrm{i}\Phi^* \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

$$\pi^*=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}^*}=0 \qquad (2\text{-}4\text{-}4)$$

相应系统的正则 Hamilton 量为

$$H_c=\int\mathrm{d}x[\pi\dot{\Phi}+\pi\Phi^*-\mathcal{L}]=\int\mathrm{d}x\mathcal{H}_c \qquad (2\text{-}4\text{-}5)$$

式中

$$\mathcal{H}_c=\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}-C\Phi^*\Phi^*\Phi\Phi+\mathrm{i}b\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\mathrm{i}3bC\Phi^*\Phi^*\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

为正则Hamilton量密度．按 Dirac 的约束理论，由式(2-4-3)和式(2-4-4)可知，系统有两个初级约束，即

$$\phi^1=\pi-\mathrm{i}\Phi^*\approx 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}6)$$

$$\phi^2=\pi^*\approx 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}7)$$

系统的总 Hamilton 量为

$$H_T=\int\mathrm{d}x[\mathcal{H}_c+\lambda_1\phi^1+\lambda_2\phi^2] \qquad (2\text{-}4\text{-}8)$$

初级约束的自洽性条件

$$\dot{\phi}^1=\{\phi^1,H_T\}\approx 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}9)$$

$$\dot{\phi}^2=\{\phi^2,H_T\}\approx 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}10)$$

确定两个 Lagrange 乘子 λ_1 和 λ_2，不给出新的约束．这里符号“≈”为 Dirac 意义下的弱等，$\{\cdot,\cdot\}$代表场的 Poisson 括号．容易看出，系统的约束均为第二类，记为 $\theta^1=\phi^1$，$\theta^2=\phi^2$．设 F 和 G 是正则变量的函数，F 和 G 的 Dirac 括号为

$$\{F(t,\boldsymbol{x}),G(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{D}} = \{F(t,\boldsymbol{x}),G(t,\boldsymbol{x}')\} - \int \mathrm{d}^3u\mathrm{d}^3v\{F(t,\boldsymbol{x}),\theta_i(t,\boldsymbol{u})\} \cdot c_{ij}^{-1}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\{\theta_j(t,\boldsymbol{v}),G(t,\boldsymbol{x}')\} \tag{2-4-11}$$

式中:$\boldsymbol{C}$是以第二类约束函数的 Poisson 括号为元素构成的矩阵,且

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \{\theta^1,\theta^1\} & \{\theta^1,\theta^2\} \\ \{\theta^2,\theta^1\} & \{\theta^2,\theta^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ \mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') & 0 \end{bmatrix} \tag{2-4-12}$$

它的逆矩阵为

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2-4-13}$$

经计算,场量的 Dirac 括号为

$$\{\Phi(x),\pi(x')\}_{\mathrm{D}} = \{\Phi,\pi\} - \{\Phi,\theta_i\}c_{ij}^{-1}\{\theta_j,\pi\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2-4-14}$$

$$\{\Phi^*(x),\pi^*(x')\}_{\mathrm{D}} = \{\Phi^*,\pi^*\} - \{\Phi^*,\theta_i\}c_{ij}^{-1}\{\theta_j,\pi^*\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2-4-15}$$

$$\{\Phi(x),\Phi^*(x')\}_{\mathrm{D}} = \{\Phi,\Phi^*\} - \{\Phi,\theta_i\}c_{ij}^{-1}\{\theta_j,\Phi^*\} = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2-4-16}$$

$$\{\Phi(x),\Phi(x')\}_{\mathrm{D}} = \{\Phi^*(x),\Phi^*(x')\}_{\mathrm{D}} = \{\pi(x),\pi^*(x')\}_{\mathrm{D}} = 0 \tag{2-4-17}$$

因此,按 Dirac 量子化规则$\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}} \to -\mathrm{i}\{\cdot,\cdot\}$,相应的场算符满足下列对易关系:

$$[\hat{\Phi}(x),\hat{\pi}(x')] = \mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2-4-18}$$

$$[\hat{\Phi}^*(x),\hat{\pi}^*(x')] = \mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2-4-19}$$

$$[\hat{\Phi}(x),\hat{\Phi}^*(x')] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2-4-20}$$

$$[\hat{\Phi}(x),\hat{\Phi}(x')] = [\hat{\Phi}^*(x),\hat{\Phi}^*(x')] = [\hat{\pi}(x),\hat{\pi}(x')] = 0 \tag{2-4-21}$$

对仅含第二类约束的系统,其经典运动方程为

$$\dot{F} = \{F,H_c\}_{\mathrm{D}} \tag{2-4-22}$$

对光孤子系统,有

$$\dot{\Phi} = \{\Phi,H_c\}_{\mathrm{D}} = \{\Phi,H_c\} - \{\Phi,\theta_i\}c_{ij}^{-1}\{\theta_j,H_c\} = -\mathrm{i}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2C\mid\Phi^2\mid\Phi - \mathrm{i}b\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} - \mathrm{i}6bC\mid\Phi^2\mid\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] \tag{2-4-23}$$

过渡到量子情形,相应的量子运动方程为

$$\mathrm{i}\dot{\hat{\Phi}} = -\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial x^2} - 2C\mid\hat{\Phi}^2\mid\hat{\Phi} - \mathrm{i}b\frac{\partial^3\hat{\Phi}}{\partial x^3} - \mathrm{i}6bC\mid\hat{\Phi}^2\mid\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x} \tag{2-4-24}$$

当 $p=6b$ 时，这种严格推导方法所得结果和用对应原理得到的结果一致[14]。

2-5 Faddeev-Jackiw(FJ)量子化

Dirac 括号量子化是基于 Hamilton 体制，在相空间中是由正则变量来实现的，其中的初级约束通常是奇异 Lagrange 量系统过渡到相空间中的 Hamilton体制时出现的固有约束，它不是来源于系统的运动方程. 按初级约束的自洽性条件，利用总 Hamilton 量决定的运动方程，由 Dirac-Bergmann 算法可求出所有相空间次级约束. 将全部约束分为第一类约束和第二类约束，对仅含第二类约束的系统，用 Dirac 括号与量子括号对应实现该约束 Hamilton 系统的量子化；对含有第一类约束的系统，相应于每一个第一类约束，需选取适当的规范条件，使全部约束和规范条件一起变为第二类约束，然后再按第二类约束系统量子化.

FJ 从 Lagrange 体制出发提出了另一种量子化方案[9]，它与传统的 Dirac 方案不同，无须区分第一类约束和第二类约束等. 众多的系统已用此方案进行了量子化，如自对偶场、电磁场和杨-Mills 场、超对称系统、非线性 σ -模型[15]、超引力系统以及其他一些系统[16]等. FJ 量子化与 Dirac 量子化之间的关系现在已开展了研究[17].

2-5-1 辛矩阵正规

FJ 量子化方案的提出最先是针对一次 Lagrange 量系统的，所谓一次 Lagrange量系统是指 Lagrange 量中只含广义速度的一次幂，而不含高次幂. 对于含广义速度高次幂的系统，可以通过引入辅助变量方式使其化为一次幂的 Lagrange 量系统. 考虑一次 Lagrange 量

$$L = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2-5-1}$$

式中：重复指标代表求和；ξ 称为辛变量；$V(\xi)$ 称为辛势. ξ 可以是相空间中的正则变量 q^i 和 p_i. 将式(2-5-1)的 Lagrange 量关于 ξ^i 求出 EL 方程，则有

$$\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i}\dot{\xi}^j - \frac{\partial V}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}\dot{\xi}^j = 0 \tag{2-5-2}$$

即
$$f_{ij}\dot{\xi}^j = \frac{\partial V}{\partial \xi^i} \tag{2-5-3}$$

其中

$$f_{ij}=\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i}-\frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} \tag{2-5-4}$$

$[f_{ij}]$ 称为辛矩阵. 如果辛矩阵正规,它的逆矩阵存在,式(2-5-3)又可写为

$$\dot{\xi}^i=f_{ij}^{-1}\frac{\partial V}{\partial \xi^j} \tag{2-5-5}$$

定义辛变量之间的 FJ 括号为

$$\{\xi^i,\xi^j\}_*=f_{ij}^{-1} \tag{2-5-6}$$

任意两个力学量 $F(\xi)$ 与 $G(\xi)$ 之间的 FJ 括号定义为

$$\{F,G\}_*=\frac{\partial F}{\partial \xi^i}\{\xi^i,\xi^j\}_*\frac{\partial G}{\partial \xi^j}=\frac{\partial F}{\partial \xi^i}f_{ij}^{-1}\frac{\partial G}{\partial \xi^j} \tag{2-5-7}$$

于是系统的运动方程式(2-5-5)可写为

$$\dot{\xi}^i=\{\xi^i,\xi^j\}_*\frac{\partial V}{\partial \xi^j}=\{\xi^i,V(\xi)\}_* \tag{2-5-8}$$

由式(2-5-1)描述的系统,与 ξ^i 相应的正则动量为

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i}=a_i(\xi) \tag{2-5-9}$$

系统的正则 Hamilton 量为

$$H_c(\xi)=p_i\dot{\xi}^i-L(\xi,\dot{\xi})=V(\xi) \tag{2-5-10}$$

将式(2-5-10)代入式(2-5-8),得

$$\dot{\xi}^i=\{\xi^i,H_c\}_* \tag{2-5-11a}$$

由式(2-5-8)和式(2-5-10),任一力学量随时间的演化为

$$\dot{F}(\xi)=\frac{\partial F}{\partial \xi^i}\dot{\xi}^i=\frac{\partial F}{\partial \xi^i}\{\xi^i,V(\xi)\}_*=\{F,H_c(\xi)\}_* \tag{2-5-12}$$

当辛矩阵正规时,由式(2-5-1)描述的系统在 Dirac 理论中,仅含第二类约束(下面证明),此约束 Hamilton 系统的运动方程为

$$\dot{\xi}^i=\{\xi^i,H_c(\xi)\}_D \tag{2-5-11b}$$

与式(2-5-11)比较,可见 FJ 括号与 Dirac 括号等价,$\{\xi^i,\xi^j\}_*=f_{ij}^{-1}=\{\xi^i,\xi^j\}_D$. 这样由辛变量间 FJ 括号就给出 Dirac 括号结果,无须像 Dirac 理论中那样,对约束进行分类再求 Dirac 括号,显得更直接更简便.

当辛矩阵正规时,FJ 量子化程序是:

(1)系统的量子态由 Hilbert 间的态矢 $\boldsymbol{\Psi}$ 描述.

(2)经典理论中任一力学量 $F(\xi)$,在量子理论中对应于 Hilbert 空间一算符 $\hat{F}(\hat{\xi})$,量子化规则为($\hbar=1$)

$$[\hat{F}(\hat{\xi}),\hat{G}(\hat{\xi})]_-=\mathrm{i}\{F(\xi),G(\xi)\}_*|_{\xi\to\hat{\xi}} \tag{2-5-13}$$

$$[\hat{\xi},\hat{\xi}]_{-}=\mathrm{i}\{\xi,\xi\}_{*}|_{\xi\to\hat{\xi}}=\mathrm{i}f_{ij}^{-1}|_{\xi\to\hat{\xi}} \tag{2-5-14}$$

对于含 Grassmann 数系统，需要计及量的 Grassmann 宇称，此时的 FJ 括号与算符的反对易式相对应.

(3)态矢$\boldsymbol{\Psi}$随时间的演化由 Schrödinger 方程确定

$$i=\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t}=\hat{H}\boldsymbol{\Psi} \tag{2-5-15}$$

式中：$\hat{H}$ 为 Hamilton 算符.

2-5-2 辛矩阵非正规

当辛矩阵$[f_{ij}]$退化时，它不存在逆矩阵，将首次出现的辛矩阵记为$[f_{ij}^{0}]$，并设它的秩为 R，其零模(零本征矢)$\nu_{\alpha}^{(0)}$ 有 $n-R$ 个，适合

$$(\nu_{\alpha}^{(0)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^{0}=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,n-R) \tag{2-5-16}$$

式中：$\boldsymbol{f}^{0}=[f_{ij}^{0}]$ 为 n 阶方阵，将系统的运动方程(2-5-3)左乘零模$(\nu_{\alpha}^{(0)})^{\mathrm{T}}$，得

$$\Phi_{\alpha}^{(0)}=(\nu_{\alpha}^{(0)})^{\mathrm{T}}\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\xi^{(0)}}=(\nu_{\alpha}^{(0)})_{i}^{\mathrm{T}}\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\xi^{(0)i}}=0$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,n-R) \tag{2-5-17}$$

以上各量均加上标(0)，以表示各量的初值. $\Phi_{\alpha}^{(0)}$ 就是 $\boldsymbol{f}^{(0)}$退化时 FJ 方法的零级约束. 求出零级约束后，按 FJ 方法，将 $\Phi_{\alpha}^{(0)}$ 乘以 Lagrange 乘子(辅助场的时间导数)$\dot{\lambda}_{\alpha}^{(0)}$，再加到式(2-5-1)所示一次 Lagrange 量中，并令辛势 $V^{(0)}$ 中约束强等于 0，就得到首次迭代后的一次 Lagrange 量，即

$$L^{(1)}=a_{i}^{(0)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(0)i}+\Phi_{\alpha}^{(0)}\dot{\lambda}_{\alpha}^{(0)}-V^{(1)}(\xi^{(0)}) \tag{2-5-18}$$

式中

$$V^{(1)}(\xi^{(0)})=V^{(0)}(\xi^{(0)})\,|_{\Phi_{\alpha}^{(0)}=0} \tag{2-5-19}$$

引入辅助场 $\lambda_{\alpha}^{(0)}$ 后，系统的辛变量扩充为

$$\xi^{(1)i}=(\xi^{(0)i},\lambda_{\alpha}^{(0)}) \tag{2-5-20}$$

$L^{(1)}$又可写为

$$L^{(1)}=a_{i}^{(1)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(1)i}-V^{(1)}(\xi^{(0)}) \tag{2-5-21}$$

式中

$$a_{i}^{(1)}=(a_{i}^{(0)},\Phi_{\alpha}^{(0)}) \tag{2-5-22}$$

与 $L^{(1)}$和 $\xi^{(1)i}$相应的运动方程为

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(1)j}=\frac{\partial V^{(1)}}{\partial\xi^{(1)i}} \tag{2-5-23}$$

其中，首次迭代后的辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 的矩阵元为

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(0)})=\frac{\partial a_j^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)i}}-\frac{\partial a_i^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)j}} \tag{2-5-24}$$

如果 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 正规，那么就可以用于 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 之逆定义 FJ 括号，进行量子化，FJ 量子化完成. 如果 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 仍然退化，可求其相应的零模，并结合运动方程可得 FJ 方法中的第一级约束，重复上述步骤继续迭代，直至 N 步，会出现两种情况：

(1) $\boldsymbol{f}^{(N)}$ 正规．第 N 次迭代后的辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(N)}$ 为

$$f_{ij}^{(N)}=\frac{\partial a_j^{(N)}}{\partial \xi^{(N)i}}-\frac{\partial a_i^{(N)}}{\partial \xi^{(N)j}} \tag{2-5-25}$$

此 FJ 算法终止，其量子化规则为

$$[\hat{\xi}^{(N)i},\hat{\xi}^{(N)j}]_-=\mathrm{i}\{\xi^{(N)i},\xi^{(N)j}\}_*\Big|_{\xi^{(N)}\to\hat{\xi}^{(N)}}=\mathrm{i}f_{ij}^{(N)^{-1}} \tag{2-5-26}$$

(2) $\boldsymbol{f}^{(N)}$ 退化，但不出新的约束．这种情形辛势具有某种对称性，需要选取规范条件，使辛势

$$V\to V+V_g \tag{2-5-27}$$

然后再按 FJ 算法继续作迭代计算，直至得到非退化的辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(H)}$ 为止，用 $\boldsymbol{f}^{(H)}$ 进行量子化.

2-5-3　辛矩阵正规时 FJ 方案与 Dirac 方案的关系

前面已经阐述了一次 Lagrange 量系统的 FJ 方法，这里用约束系统的 Dirac 理论来分析这一系统，并证明在辛矩阵可逆时用两种方法进行正则量子化的等价性. 设系统的一次 Lagrange 量为

$$L=a_i(\xi)\dot{\xi}^i-V(\xi) \tag{2-5-28}$$

与 ξ^i 相应的正则共轭动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i}=a_i(\xi) \tag{2-5-29}$$

因为 $a_i(\xi)$ 中不含 $\dot{\xi}^i$，因而可从式(2-5-29)得到 Dirac 方法中系统的初级约束，即

$$\phi_i^0=p_i-a_i(\xi)\approx 0 \tag{2-5-30}$$

式中：符号“$\approx$”表示弱等于(表示等式在 Dirac 意义下约束超曲面上成立).

在相空间(ξ^i,p_i)中，ξ^i，p_i 间的基本泊松括号为

$$\{\xi^i,\ \ \xi^j\}=0,\quad \{p_i,p_j\}=0 \tag{2-5-31}$$

$$\{\xi^i,p_j\}=-\{p_j,\xi^i\}=\delta_j^i \tag{2-5-32}$$

初级约束 ϕ_i^0 之间的泊松括号为

$$\{\phi_i^0,\phi_j^0\}=\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i}-\frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}=f_{ij} \tag{2-5-33}$$

其中，f_{ij}就是式(2-5-4)的辛矩阵的元素. 与式(2-5-1)所示一次 Lagrange 量相应的正则 Hamilton 量为

$$H_c(\xi)=p_i\dot{\xi}^i-L=V(\xi) \tag{2-5-34}$$

系统的总 Hamilton 量为

$$H_T=H_c+\mu^i\phi_i=V(\xi)+\mu^i\phi_i^0 \tag{2-5-35}$$

式中：μ^i 为与约束 ϕ_i^0 相对应的 Lagrange 乘子(约束乘子). 由初级约束 ϕ_i^0 的自洽性条件 $\dot{\phi}_i^0=0$，有

$$\dot{\phi}_i=\{\phi_i^0,H_T\}=\{\phi_i^0,V(\xi)+\mu^j\phi_j^0\}=0 \tag{2-5-36}$$

将式(2-5-33)代入式(2-5-36)，得

$$\mu^j f_{ij}=\frac{\partial V}{\partial \xi^i} \tag{2-5-37}$$

下面证明 Dirac 方法中系统的 Hamilton 正则运动方程与 FJ 方法中系统的 EL 运动方程式(2-5-3)等价. 系统的 Hamilton 正则运动方程为

$$\dot{\xi}^i=\{\xi^i,H_T\}=\{\xi^i,\mu^j\phi_j^0\}=\mu^i \tag{2-5-38}$$

$$\dot{p}_i=\{p_i,H_T\}=-\frac{\partial V}{\partial \xi^i}+\mu^j\frac{\partial a^j}{\partial \xi^i} \tag{2-5-39}$$

利用式(2-5-37)、式(2-5-38)，得

$$\dot{\xi}^j f_{ij}=\frac{\partial V}{\partial \xi^i} \tag{2-5-40}$$

这就证明了，无论辛矩阵$[f_{ij}]$是否可逆，FJ 方法中的运动方程与 Dirac 方法中的正则方程相同.

下面将证明在辛矩阵正规时，广义括号(FJ 括号)与 Dirac 括号等价. 事实上，当辛矩阵$[f_{ij}]$正规时，$[f_{ij}]^{-1}$存在，由初级约束 ϕ_i^0 的自洽性条件导致的式(2-5-36)可解出所有 Lagrange 乘子 μ^i，而不会导致任何次级约束，故系统的全部约束就只有初级约束 ϕ_i^0. 由式(2-5-33)，得

$$\det|\{\phi_i^0,\phi_j^0\}|=\det|f_{ij}|\neq 0 \tag{2-5-41}$$

式(2-5-41)表明所有约束 ϕ_i^0 为第二类约束.

对只含第二类约束 ϕ_i^0 的系统，依据约束系统的 Dirac 理论，任意两个力学量 F 和 G 的 Dirac 括号为

$$\{F,G\}_D=\{F,G\}-\{F,\phi_i^0\}c_{ij}^{-1}\{\phi_j^0,G\} \tag{2-5-42}$$

其中 $\mathbf{c}_{ij}^{-1}$ 为$\mathbf{C}^{-1}$的矩阵元，$\mathbf{C}^{-1}$是矩阵 $\mathbf{C}=[\{\phi_i^0,\phi_j^0\}]=[f_{ij}]$的逆矩阵. 所以式(2-5-42)可写成

$$\{F,G\}_{\mathrm{D}}=\{F,G\}-\{F,\phi_i^0\}f_{ij}^{-1}\{\phi_j^0,G\} \tag{2-5-43}$$

特别是 ξ^i 之间的基本 Dirac 括号为

$$\{\xi^i,\xi^j\}_{\mathrm{D}}=-\{\xi^i,p_k-a_k(\xi)\}f_{kl}^{-1}\{p_l-a_l(\xi),\xi^j\}=$$
$$f_{ij}^{-1}=\{\xi^i,\xi^j\}_* \tag{2-5-44}$$

这表明，辛变量 ξ^i 之间的广义括号等价于它们之间的 Dirac 括号，由两者得到的量子化规则是一致的.

任意两个力学量 $F(\xi)$ 和 $G(\xi)$ 之间的 Dirac 括号为

$$\{F(\xi),G(\xi)\}_{\mathrm{D}}=-\{F(\xi),\phi_i^0\}f_{ij}^{-1}\{\phi_j^0,G(\xi)\}=$$
$$-\{F(\xi),p_i\}f_{ij}^{-1}\{p_j,G(\xi)\}=$$
$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^i}f_{ij}^{-1}\frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi^j}=\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^i}\{\xi^i,\xi^j\}_*\frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi^j}=$$
$$\{F(\xi),G(\xi)\}_* \tag{2-5-45}$$

即任意两个力学量 $F(\xi)$ 和 $G(\xi)$ 之间的 FJ 括号等价于它们之间的 Dirac 括号. 系统的 Hamilton 正则运动方程为

$$\dot{\xi}^i=\{\xi^i,H_c\}_{\mathrm{D}}=\{\xi^i,V(\xi)\}_{\mathrm{D}}=$$
$$-\{\xi^i,\phi_k^0\}f_{kl}^{-1}\{\phi_l^0,V(\xi)\}=f_{ij}^{-1}\frac{\partial V}{\partial \xi^j} \tag{2-5-46}$$

这正是 FJ 方法中辛矩阵$[f_{ij}]$正规时系统的运动方程式(2-5-5). 任一力学量 $F(\xi)$ 随时间的演化为

$$\dot{F}(\xi)=\{F(\xi),H_c\}_{\mathrm{D}}=\{F(\xi),V(\xi)\}_{\mathrm{D}}$$

利用式(2-5-45)，得

$$\dot{F}(\xi)=\{F(\xi),V(\xi)\}_* \tag{2-5-47}$$

这也与 FJ 方法中力学量 $F(\xi)$ 随时间的演化方程式(2-5-12)一致. 因此这样就证明了辛矩阵$[f_{ij}]$正规时 FJ 方法与 Dirac 方法的等价性.

2-6 Chern-Simons(CS)项与复标量场的耦合

根据传统的量子力学对全同粒子的认识，自然界中只有两类粒子，一类叫做玻色子(Boson)，一类叫做费米子(Fermion)；粒子统计性质由粒子内禀性质之一的自旋决定，它们的自旋分别为 $\hbar$ 的整数倍和 1/2 的奇数倍，并且分别服从 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计. 根据传统的理论，描述全同粒子体系状态的波函数只能是对称的或反对称的，它们的对称性不随时间的变化而改变. 那么，能否存在这样的全同粒子，描述这种粒子的波函数既不是反对称的，也不是对称的. 也就是说，两个粒子交换位置后，描述粒子状态的波

函数获得的附加相角既不是 π 的奇数倍也不是 2π 的整数倍，而是任意值. 事实上，在二维空间中的系统就会出现这样的情况，并将这种粒子称为任意子(Anyon). 其统计性质可介于 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计之间连续变化，并称为分数统计性. 根据自旋和统计的关系，任意子的自旋也是分数的.

F. Wilczeck 建议用 CS 场实现对任意子的分数自旋和统计的描述[18]. 其后的许多学者都证明了其观点. 在量子力学水平上对 CS 场的研究已有不少. 人们发现，CS 项起到把粒子的电荷和磁通束缚在一起的作用，并且耦合后的角动量取任意值，它取决于 CS 项前面的系数. 在场论水平上的研究也取得了类似的结果[19]. 近年来，分数量子统计受到人们广泛关注，它涉及众多不同领域. 目前关于任意子的研究主要在经典场论和量子力学方面，在量子场论方面的研究尚不充分，且没有对 CS 项与物质场耦合的系统的约束进行深入的研究. 因此，从约束系统的量子理论来建立任意子的量子理论，进而研究各种 CS 理论的场论模型及其在凝聚态理论中的应用是十分有意义的.

任意子的基本理论有两种形式，即 Lagrange 形式和 Hamilton 形式. 下面简要说明 CS 项 Lagrange 量的性质[20]. 一般情况下，CS 项 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{CS}}=\varepsilon^{\mu\nu\rho}\operatorname{tr}\left(A_\mu\partial_\nu A_\rho+\frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right) \tag{2-6-1}$$

式中：$\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ 为 Levi-Civita 记号. 在规范变换

$$A_\mu\to A_\mu^g=g^{-1}A_\mu g+g^{-1}\partial_\mu g \tag{2-6-2}$$

下，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{CS}}(A)\to\mathscr{L}_{\mathrm{CS}}(A)-\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\operatorname{tr}(\partial_\nu g g^{-1}A_\rho)-\\ \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\operatorname{tr}(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\rho g)\end{aligned} \tag{2-6-3}$$

对 Abel 规范理论，式(2-6-3)中的后一项为 0. 作用量在规范变换下不变. 然而，对于非 Abel CS 理论，式(2-6-3)中的最后一项比例于群元素 g 的绕数. 因此在规范变换(具有非平凡的绕数)下，非 Abel CS 作用量改变一常数. 在量子非 Abel CS 理论中，为保证其量子跃迁幅 $\exp\{\mathrm{i}I\}$ 在规范变换下不变，CS Lagrange 量密度式(2-6-3)应乘以耦合常数 $\theta=\frac{\kappa}{4\pi}$ $(\kappa\in\mathbf{Z})$[21-22].

在(2+1)维时空中任意子呈现出的分数自旋和分数统计性质，与凝聚态物质的某些现象相关(特别是分数量子 Hall 效应和高温超导)，受到了人们的广泛关注并开展了大量研究[22-30]. 在任意子的场论水平研究中，Abel CS 项与物质场的最小耦合系统认为是基本系统[30]. 这里先讨论 Abel CS 项与复标量

场耦合系统的 FJ 量子化[16]，其分数自旋性质将在后面分析. 前面介绍了有限自由度系统的 FJ 量子化方法，这里先扼要地叙述一下场论的 FJ 方法. 再给出 FJ 方法在 Abel CS 理论中的应用.

设场的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=a_i(\varphi)\dot{\varphi}_i-V(\varphi)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2-6-4}$$

式中：$\varphi_i=\varphi_i(x)=\varphi_i(t,\boldsymbol{x})$ 为场量. 当从有限自由度系统过渡到场时，Lagrange 量应换成 Lagrange 量密度，辛势换成辛势密度. 因此，场的辛矩阵为

$$f_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\delta a_j(\boldsymbol{y})}{\delta\varphi_i(\boldsymbol{x})}-\frac{\delta a_i(\boldsymbol{x})}{\delta\varphi_j(\boldsymbol{y})}\tag{2-6-5}$$

式中：$\varphi_i(t,\boldsymbol{x})$ 代表任一属于辛变量集的场量. 由于在用辛矩阵 $[f_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$ 的逆进行 FJ 正则量子化时，需求等时对易关系式，故在(2-6-5)中没有明确地写出各量对时间的依赖关系.

当求因辛矩阵退化所导致的约束时，因辛势换成了辛势密度，需对辛势密度积分. 式(2-5-17)变为

$$\Phi_\alpha^{(0)}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\nu_\alpha^{(0)}(t,\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\frac{\delta}{\delta\varphi(t,\boldsymbol{x})}\int\mathrm{d}\boldsymbol{y}V(t,\boldsymbol{y})=0$$
$$(\alpha=1,2,\cdots,m)\tag{2-6-6}$$

场的 FJ 方法的其他步骤与有限自由度系统时相同.

(2+1)维时空中复标量场与 Abel CS 项最小耦合系统的 Lagrange 量密度[30]

$$\mathscr{L}=(\mathrm{D}_\mu\varphi)^*(\mathrm{D}^\mu\varphi)+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda\tag{2-6-7}$$

式中：$\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu$，$\varepsilon^{012}=1$，$(\mu,\nu=0,1,2)$. 时空度规取 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1)$.

在规范变换

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda(x)}\varphi(x)\\A_\mu(x)&\to A_\mu(x)+\partial_\mu\Lambda(x)\end{aligned}\right\}\tag{2-6-8}$$

下，系统的作用量不变，其中 $\Lambda(x)$ 为时空的任意函数.

现在对此系统进行 FJ 正则量子化. 在式(2-6-7)中与 $A_\mu(x)$ 相应的项已是一次形式，但 $(\mathrm{D}_\mu\varphi)^*(\mathrm{D}^\mu\varphi)$ 项需降为一次形式. 这里通过引入与 φ 和 φ^* 相应的正则动量作为辅助场达到此目的.

$$\left.\begin{aligned}\pi&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=(\mathrm{D}_0\varphi)^*\\\pi^*&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\mathrm{D}_0\varphi\end{aligned}\right\}\tag{2-6-9}$$

于是有

$$\pi\dot{\varphi}+\pi^*\dot{\varphi}^*-\mathscr{L}=\pi\pi^*-(\mathrm{D}_i\varphi)^*(\mathrm{D}^i\varphi)+A_0J_0-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}A_0\partial_iA_j+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_i\dot{A}_j \tag{2-6-10}$$

式中：$J_0=\mathrm{i}(\pi\varphi-\pi^*\varphi^*)$为复标量场的电荷密度. 根据式(2-6-10)，可得出系统一次形式的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=\pi\dot{\varphi}+\pi^*\dot{\varphi}^*+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_i\dot{A}_j-V \tag{2-6-11}$$

式中：V 为辛势，且

$$V=\pi\pi^*-(\mathrm{D}_i\varphi)^*(\mathrm{D}^i\varphi)+A_0J_0-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}A_0\partial_iA_j \tag{2-6-12}$$

即辛变量集为

$$\xi=\{\varphi,\varphi^*,A_0,A_i,\pi,\pi^*\} \tag{2-6-13}$$

从式(2-6-11)得出与 ξ^i 相应的各系数 a_i，它们分别为

$$\left.\begin{aligned}&a_\varphi=\pi,a_{\varphi^*}=\pi^*,a_{A_0}=0\\&a_{A_i}=\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j,a_\pi=0,a_{\pi^*}=0\end{aligned}\right\} \tag{2-6-14}$$

由式(2-6-14)求出的辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$为

$$\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-6-15}$$

显然，$\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$是奇异的，其零模为

$$\boldsymbol{v}^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\\nu^{A_0}\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{2-6-16}$$

式中：ν^{A_0}是任意函数. 将其代入式(2-6-6)，有

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}(\nu_\alpha^{(0)}(t,\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\frac{\delta}{\delta\xi(t,\boldsymbol{x})}\int \mathrm{d}\boldsymbol{y}V(t,\boldsymbol{y})=0 \tag{2-6-17}$$

得

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \nu^{A_0}\left[J_0-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j\right]=0 \tag{2-6-18}$$

因 ν^{A_0} 是一任意函数，于是得出 FJ 方法的第 0 级约束为

$$\Phi=J_0-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j=0 \tag{2-6-19}$$

值得注意的是，这里求出的 FJ 方法中的第 0 级约束 Φ 与文献[30]中用 Dirac 方法求出的次级约束相同. 按 FJ 算法，将约束 Φ 乘以 Lagrange 乘子 $\dot{\lambda}$ 以后加到式(2-6-11)的正则形式部分，同时令 V 中 Φ 强等于零，得第一次迭代后的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}^{(1)}=\pi\dot{\varphi}+\pi^*\dot{\varphi}^*+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_i\dot{A}_j+\left(\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j-J_0\right)\dot{\lambda}-V^{(1)} \tag{2-6-20}$$

其中

$$V^{(1)}=V|_{\Phi=0}=\pi\pi^*-(D_i\varphi)^*(D^i\varphi) \tag{2-6-21}$$

注意到 $\mathscr{L}^{(1)}$ 中 A_0 已消失，所以第一次迭代后的辛变量集应取为

$$\xi^{(1)}=\{\varphi,\varphi^*,A_i,\pi,\pi^*,\lambda\} \tag{2-6-22}$$

相应的正则形式 $a_i^{(1)}$ 的分量分别为

$$\left.\begin{aligned}&a_\varphi^{(1)}=\pi,\quad a_{\varphi^*}^{(1)}=\pi^*,\quad a_{A_i}^{(1)}=\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j,\\&a_\pi^{(1)}=0,\quad a_{\pi^*}^{(1)}=0,\quad a_\lambda^{(1)}=\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j-J_0\end{aligned}\right\} \tag{2-6-23}$$

由此得到第一次迭代的辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为

$$\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}0&0&0&-1&0&-\mathrm{i}\pi(x)\\0&0&0&0&-1&\mathrm{i}\pi^*(x)\\0&0&-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}&0&0&-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_j^x\\1&0&0&0&0&-\mathrm{i}\varphi(x)\\0&1&0&0&0&\mathrm{i}\varphi^*(x)\\\mathrm{i}\pi(y)&-\mathrm{i}\pi^*(y)&-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ji}\partial_i^y&\mathrm{i}\varphi(y)&-\mathrm{i}\varphi^*(y)&0\end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-6-24}$$

$\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 仍为奇异. 由于系统具有规范对称性，由 $\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的零模求出 FJ 方法中的第一级约束恒等于零[16]. 此时，必须选取规范条件以继续 FJ 算法. 取 Coulomb 规范

$$\partial_i A_i=0 \tag{2-6-25}$$

并引入约束乘子 $\dot{\eta}$，得到的第二次迭代后的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}^{(2)}=\pi\dot{\varphi}+\pi^*\dot{\varphi}^*+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j\dot{A}_i+\left(\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_iA_j-J_0\right)\dot{\lambda}+(\partial_iA_i)\dot{\eta}-V^{(2)} \tag{2-6-26}$$

式中

$$V^{(2)}=V^{(1)}\Big|_{\partial_iA_i=0}=\pi\pi^*-(\mathrm{D}_i\varphi)^*(\mathrm{D}^i\varphi) \tag{2-6-27}$$

第二次迭代后的辛变量集为

$$\xi^{(2)}=\{\varphi,\varphi^*,A_i,\pi,\pi^*,\lambda,\eta\} \tag{2-6-28}$$

相应的正则形式 $a_i^{(2)}$ 的分量分别为

$$\left.\begin{array}{l}a_\varphi^{(2)}=\pi,\quad a_{\varphi^*}^{(2)}=\pi^*,\quad a_{A_i}^{(2)}=\dfrac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j,\quad a_\pi^{(2)}=0\\ a_{\pi^*}^{(2)}=0,\quad a_\lambda^{(2)}=\dfrac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_iA_j-J_0,\quad a_\eta^{(2)}=\partial_iA_i\end{array}\right\} \tag{2-6-29}$$

由此可得第二次迭代的辛矩阵为

$$\boldsymbol{f}^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}0&0&0&-1&0&-\mathrm{i}\pi(x)&0\\0&0&0&0&-1&\mathrm{i}\pi^*(x)&0\\0&0&-\dfrac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}&0&0&-\dfrac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_j^x&\partial_i^x\\1&0&0&0&0&-\mathrm{i}\varphi(x)&0\\0&1&0&0&0&\mathrm{i}\varphi^*(x)&0\\\mathrm{i}\pi(y)&-\mathrm{i}\pi^*(y)&-\dfrac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ji}\partial_i^y&\mathrm{i}\varphi(y)&-\mathrm{i}\varphi^*(y)&0&0\\0&0&\partial_j^y&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-6-30}$$

由于 $\boldsymbol{f}^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的元素含有场量及微商，其逆矩阵不能用通常的逆矩阵公式计算. 在此，利用逆矩阵的原始定义

$$\int f_{ij}^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f_{jk}^{(2)-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\mathrm{d}^2y=\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) \tag{2-6-31}$$

将式(2-6-30)代入式(2-6-31)后，式(2-6-31)变成 7 个方程组，每一个方程组由 7 个微分方程联立组成，这样通过解这 7 个微分方程组，最终可求出 $\boldsymbol{f}^{(2)-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ 的各元素. 这里给出由此求出的几个主要 FJ 括号分别为

$$
\left.\begin{aligned}
\{\varphi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{y})\}_{*}&=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\{\varphi^{*}(t,\boldsymbol{x}),\pi^{*}(t,\boldsymbol{y})\}_{*}&=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\{\varphi(t,\boldsymbol{x}),A_{i}(t,\boldsymbol{y})\}_{*}&=-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\kappa}\varphi(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_{x}^{j}\,\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^{2}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\{\varphi^{*}(t,\boldsymbol{x}),A_{i}(t,\boldsymbol{y})\}_{*}&=\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\kappa}\varphi^{*}(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_{x}^{j}\,\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^{2}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\{\pi(t,\boldsymbol{x}),A_{i}(t,\boldsymbol{y})\}_{*}&=\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\kappa}\pi(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_{x}^{j}\,\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^{2}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\{\pi^{*}(t,\boldsymbol{x}),A_{i}(t,\boldsymbol{y})\}_{*}&=-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\kappa}\pi^{*}(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_{x}^{j}\,\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^{2}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}\right\}\tag{2-6-32}
$$

其中算子$\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^{2}}$的意义借助于被作用的量的 Fourier 展开来确定，则有

$$
\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^{2}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=-\int\mathrm{d}^{2}k\,\frac{1}{\boldsymbol{k}^{2}}\frac{1}{(2\pi)^{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\tag{2-6-33}
$$

式(2-6-32)对应的量子括号与用 Dirac 量子化方法得到的对易式相同[30]. 这表明 FJ 量子化方法对此系统适用.

2-7 Dirac 量子化与 Faddeev-Jackiw(FJ)量子化的关系

在 2-5 中已经证明，无论辛矩阵$[f_{ij}]$是否正规，系统在 FJ 方法中的 EL 运动方程与系统在 Dirac 方法中的 Hamilton 正则运动方程一致. 辛矩阵$[f_{ij}]$正规时，FJ 方法中的 FJ 括号与 Dirac 方法中的 Dirac 括号一致，因而两种方法正则量子化的结果相同.

现在来论述在 FJ 方法中当辛矩阵$[f_{ij}]$退化时，FJ 量子化方法与 Dirac 量子化方法的等价性[17]. 在 FJ 方法中，当辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(0)}$ 奇异时，可求出 FJ 方法中的第 0 级约束为

$$
\Phi_{\alpha}^{(0)}=(\nu_{\alpha}^{(0)})^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\xi^{(0)}}=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,m)\tag{2-7-1}
$$

式中：$\nu_{\alpha}^{(0)}$ 为 $\boldsymbol{f}^{(0)}$ 的零模，即$(\nu_{\alpha}^{(0)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^{(0)}=0$. 在求出第 0 级约束 $\Phi_{\alpha}^{(0)}$ 后，按照 FJ 算法，可将 $\Phi_{\alpha}^{(0)}$ 乘以约束乘子(辅助场的时间导数)$\dot{\lambda}_{\alpha}^{(0)}$，再加入到 Lagrange 量式(2-5-1)中，并令其中辛势 $V(=V^{(0)})$中约束 $\Phi_{\alpha}^{(0)}$ 强等于零，得第一次迭代后的一次 Lagrange 量为

$$
L^{(1)}=a_{i}^{(0)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(0)i}+\Phi_{\alpha}^{(0)}\dot{\lambda}_{\alpha}^{(0)}-V^{(1)}(\xi^{(0)})\tag{2-7-2}
$$

式中：$V^{(1)}(\xi^{(0)})=V^{(0)}(\xi^{(0)})\Big|_{\Phi_{\alpha}^{(0)}=0}$. 引入辅助场 $\lambda_{\alpha}^{(0)}$ 后，系统的辛变量扩充为

$$\xi^{(1)i}=\{\xi^{(0)i},\lambda_\alpha^{(0)}\} \tag{2-7-3}$$

$L^{(1)}$可写成

$$L^{(1)}=a_i^{(1)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(1)i}-V^{(1)}(\xi^{(0)}) \tag{2-7-4}$$

式中

$$a_i^{(1)}(\xi^{(0)})=a_i^{(0)}(\xi^{(0)}) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$a_i^{(1)}(\xi^{(0)})=\Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)}) \quad (i=n+1,n+2,\cdots,n+m)$$

与$L^{(1)}$和$\xi^{(1)}$相应的运动方程为

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(1)j}=\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi^{(1)i}} \tag{2-7-5}$$

其中第一次迭代后的辛矩阵$\boldsymbol{f}^{(1)}$的元素为

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(0)})=\frac{\partial a_j^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)i}}-\frac{\partial a_i^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)j}} \tag{2-7-6}$$

如果$\boldsymbol{f}^{(1)}$正规,则就可以用$\boldsymbol{f}^{(1)}$之逆进行正则量子化,FJ 算法结束. 正则量子化规则为

$$[\hat{\xi}^{(1)i},\hat{\xi}^{(1)j}]_-=\mathrm{i}\boldsymbol{f}^{(1)}(\hat{\xi}^{(0)})_{ij}^{-1} \tag{2-7-7}$$

如果$\boldsymbol{f}^{(1)}$仍然奇异,设其零模为$\nu_\beta^{(1)}(\xi^{(0)})$($\beta=1,2,\cdots,m_1$,$m_1$为$\boldsymbol{f}^{(1)}$的零模数),结合运动方程式(2-7-5)可得 FJ 方法中的第 1 级约束为

$$\Phi_\beta^{(1)}(\xi^{(0)})=(\nu_\beta^{(1)}(\xi^{(0)}))^{\mathrm{T}}\frac{\partial V^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)}}=0$$

$$(\beta=1,2,\cdots,m_1) \tag{2-7-8}$$

求出 FJ 方法中的第一级约束后,再按此算法不断迭代下去. 在辛矩阵退化的情形中,一直迭代到第N步,会出现两种情况:其一是$\boldsymbol{f}^{(N)}$正规;其二是$\boldsymbol{f}^{(N)}$奇异,又无新约束出现. 先讨论第一种情况. 当第N次迭代后的 FJ 矩阵$\boldsymbol{f}^{(N)}$正规时,FJ 算法才终止. 此时,FJ 方法中求得的各级约束为

$$\Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)}),\Phi_\beta^{(1)}(\xi^{(0)}),\cdots,\Phi_\gamma^{(N-1)}(\xi^{(0)}) \tag{2-7-9}$$

共有N级约束. 其中因为$\boldsymbol{f}^{(0)}$只是$\xi^{(0)}$的函数,其零模也应只为$\xi^{(0)}$的函数$\nu_\alpha^{(0)}=\nu_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)})$,$V^{(0)}$也只含$\xi^{(0)}$. 所以,从式(2-7-1)求出的第 0 级约束$\Phi_\alpha^{(0)}$也只含$\xi^{(0)}$,$\Phi_\alpha^{(0)}=\Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)})$. 由式(2-7-6)求出的$\boldsymbol{f}^{(1)}$也只含$\xi^{(0)}$,其零模$\nu_\beta^{(1)}$也应只含$\xi^{(0)}$. 第$N$次迭代后的辛变量集为

$$\xi^{(N)i}=\{\xi^{(0)i},\lambda_\alpha^{(0)},\lambda_\beta^{(1)},\cdots,\lambda_\gamma^{(N-1)}\} \tag{2-7-10}$$

其中$\lambda_\alpha^{(i)}$为与第i级约束$\Phi_\alpha^{(i)}$($i=1,2,\cdots,N-1$)相应的辅助场(约束乘子). 第

N 次迭代后的一次 Lagrange 量为

$$L^{(N)}=a_i^{(0)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(0)i}+\Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)})\dot{\lambda}_\alpha^{(0)}+\Phi_\beta^{(1)}(\xi^{(0)})\dot{\lambda}_\beta^{(1)}+\cdots+$$
$$\Phi_\gamma^{(N-1)}(\xi^{(0)})\dot{\lambda}_\gamma^{(N-1)}-V^{(N)}(\xi^{(0)})=$$
$$a_i^{(N)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}^{(N)i}-V^{(N)}(\xi^{(0)}) \tag{2-7-11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_{\xi^{(0)i}}^{(N)}(\xi^{(0)}) &= a_i^{(0)}(\xi^{(0)}) \\ a_{\lambda_\alpha^{(0)}}^{(N)}(\xi^{(0)}) &= \Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)}) \\ &\cdots \\ a_{\lambda_\gamma^{(N-1)}}^{(N)}(\xi^{(0)}) &= \Phi_\gamma^{(N-1)}(\xi^{(0)}) \end{aligned}\right\} \tag{2-7-12}$$

第 N 次迭代后的辛矩阵为

$$f_{ij}^{(N)}(\xi^{(0)})=\frac{\partial a_j^{(N)}(\xi^{(0)})}{\partial\xi^{(N)i}}-\frac{\partial a_i^{(N)}(\xi^{(0)})}{\partial\xi^{(N)j}} \tag{2-7-13}$$

直至 $f^{(N)}(\xi^{(0)})$正规(非退化). 由前面可知,$f^{(0)}$,$V^{(0)}$,$\Phi_\alpha^{(0)}$;$f^{(1)}$,$V^{(1)}$,$\Phi_\beta^{(1)}$ 等都只含 $\xi^{(0)}$. 按照此算法的步骤,类推可知,$f^{(i)}$,$V^{(i)}$,$\Phi_\alpha^{(i-1)}$ $(i=1,2,\cdots,N)$等都只含 $\xi^{(0)}$.

当 $f^{(N)}(\xi^{(0)})$正规时,FJ 方法给出正则量子化规则为

$$[\hat{\xi}^{(N)i},\hat{\xi}^{(N)j}]_-=\mathrm{i}f^{(N)}(\hat{\xi}^{(0)})_{ij}^{-1} \tag{2-7-14}$$

在 Dirac 方法中,式(2-5-1)描述的一次 Lagrange 量系统的初级约束为式(2-5-30),即

$$\phi_i^0=p_i-a_i(\xi)\approx 0 \tag{2-7-15}$$

系统的总 Hamilton 量为

$$H_\mathrm{T}=H_\mathrm{c}+\mu^i\phi_i^0=V(\xi)+\mu^i\phi_i^0 \tag{2-7-16}$$

式中:μ^i 为与约束 ϕ_i^0 相应的约束乘子. 由初级约束 ϕ_i^0 的自洽性条件 $\dot{\phi}_i^0=0$,得

$$\mu^j f_{ij}^{(0)}=\frac{\partial V}{\partial\xi^i} \tag{2-7-17}$$

当辛矩阵 $f^{(0)}$ 奇异时,式(2-7-17)解不出所有的约束乘子 μ^i,可得出次级约束 $\phi_\alpha^1(\xi^{(0)})$为

$$\phi_\alpha^1(\xi^{(0)})=\Phi_\alpha^{(0)}=(\nu_\alpha^{(0)})^\mathrm{T}\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\xi^{(0)}}=0 \quad (\alpha=1,2,\cdots,m) \tag{2-7-18}$$

式中:$\nu_\alpha^{(0)}$ 为 $f^{(0)}$ 的零模. 可见,Dirac 方法中的次级约束 $\phi_\alpha^1(\xi^{(0)})$就是 FJ 方法中的第 0 级约束 $\Phi_\alpha^{(0)}=0$. 根据 Dirac-Bergmann 算法,次级约束 $\phi_\alpha^1(\xi^{(0)})$的自洽性条件有可能导致新的次级约束

$$\phi_\beta^2(\xi^{(0)})=\dot{\phi}_\alpha^1=\{\phi_\alpha^1(\xi^{(0)}),H_\mathrm{T}\}=$$

$$\mu^i \frac{\partial \phi_\alpha^1(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}} = \mu^i \frac{\partial \Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}} = 0 \tag{2-7-19}$$

由 $\phi_\beta^2(\xi^{(0)})$ 的自洽性条件，又有可能导致新的次级约束. 这样按 Dirac-Bergmann 算法不断进行下去，直到 $\phi_\gamma^{l+1}(\xi^{(0)})$ 是已求出的约束的线性组合，即再也求不出新的约束为止. 这样，在 Dirac 方法中求出一次 Lagrange 量式(2-5-1)描述系统的各级约束为

$$\phi_\alpha^1(\xi^{(0)}), \phi_\beta^2(\xi^{(0)}), \cdots, \phi_\gamma^l(\xi^{(0)}) \tag{2-7-20}$$

从式(2-7-1)和式(2-7-18)可知，$\Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)}) = \phi_\alpha^1(\xi^{(0)})$，类似地有 $\Phi_\beta^1(\xi^{(0)}) = \phi_\beta^2(\xi^0)$ 等。可以证明 FJ 方法中的各级约束式(2-7-9)就等于 Dirac 方法中求出的相应的各级次级约束，即

$$\Phi_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)}) = \phi_\alpha^1(\xi^{(0)}); \Phi_\beta^{(1)}(\xi^{(0)}) = \phi_\beta^2(\xi^{(0)}); \cdots;$$
$$\Phi_\gamma^{(N-1)}(\xi^{(0)}) = \phi_\gamma^l(\xi^{(0)}) \tag{2-7-21}$$

且 $l=N$，即 FJ 方法中的约束个数等于 Dirac 方法中次级约束的个数，FJ 算法求出的各级约束与 Dirac-Bergmann 算法求出的相应的各级次级约束不仅相等，两种算法的终止条件也相同[17].

前面已证明无论辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(0)}$ 是否可逆，FJ 方法中的 EL 运动方程都与 Dirac 方法中的 Hamilton 正则方程等价. 现在要证明 FJ 算法中 $\boldsymbol{f}^{(0)}$ 退化时，辛变量 $\xi^{(0)i}$ 之间的 FJ 括号与 Dirac 括号等价. FJ 算法多次迭代至辛矩阵 $\boldsymbol{f}^{(N)}$ 正规时，求 Dirac 方法中各级约束间的泊松括号组成的矩阵 $\boldsymbol{\Delta} = [\{\phi_i, \phi_j\}]$，其中

$$\phi_i = (\phi_i^0, \phi_\alpha^1(\xi^{(0)}), \phi_\beta^2(\xi^{(0)}), \cdots, \phi_\gamma^l(\xi^{(0)})) \tag{2-7-22}$$

利用式(2-5-33)与式(2-7-21)，可得

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} f_{ij}^{(0)} & -\frac{\partial \phi_\alpha^1}{\partial \xi^{(0)i}} & \cdots & -\frac{\partial \phi_\gamma^l}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \phi_\alpha^1}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \frac{\partial \phi_\gamma^l}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{ij}^{(0)} & -\frac{\partial \Phi_\alpha^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} & \cdots & -\frac{\partial \Phi_\gamma^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \Phi_\alpha^{(0)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \frac{\partial \Phi_\gamma^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \end{bmatrix} \tag{2-7-23}$$

由式(2-7-13),有

$$
f^{(N)}=\begin{bmatrix} f_{ij}^{(0)} & -\frac{\partial \Phi_{\alpha}^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} & \cdots & -\frac{\partial \Phi_{\gamma}^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \Phi_{\alpha}^{(0)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \frac{\partial \Phi_{\gamma}^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \end{bmatrix} \tag{2-7-24}
$$

比较式(2-7-23)和式(2-7-24),得

$$
\det \boldsymbol{\Delta}=\det \boldsymbol{f}^{(N)} \neq 0 \tag{2-7-25}
$$

及

$$
\Delta_{ij}^{-1}=[\boldsymbol{f}^{(N)}]_{ij}^{-1} \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{2-7-26}
$$

因为 $\det \boldsymbol{\Delta} \neq 0$,所以 Dirac 方法中的各级约束为第二类约束. 对只含第二类约束 ϕ_i 的系统,Dirac 括号为

$$
\{F,G\}_{\mathrm{D}}=\{F,G\}-\{F,\phi_i\}\Delta_{ij}^{-1}\{\phi_j,G\} \tag{2-7-27}
$$

此处的 i,j 指标取遍所有的约束. 辛变量 $\xi^{(0)i}$ 之间的 Dirac 括号为

$$
\{\xi^{(0)i},\xi^{(0)j}\}_{\mathrm{D}}=-\{\xi^{(0)i},\phi_k^0\}\Delta_{kl}^{-1}\{\phi_l^0,\xi^{(0)j}\}=\Delta_{ij}^{-1}=
$$
$$
(\boldsymbol{f}^{(N)})_{ij}^{-1}=\{\xi^{(0)i},\xi^{(0)j}\}_{*} \tag{2-7-28}
$$

式中:$i,j=1,2,\cdots,n$. 于是证明了辛变量 $\xi^{(0)i}$ 之间的 FJ 括号与 Dirac 括号等价. 因而由两者得到的正则量子化规则也是一样的.

在 FJ 方法中,当辛矩阵$[f_{ij}^{(N)}]$奇异时,且所有第 N 级约束 $\Phi_{\rho}^{(N)} \equiv 0$,对每个恒等于零的约束需引入规范条件 $\Omega_{\rho}(\xi^{(0)})=0$. 引入规范条件后,将其看做约束处理. 规范条件应满足

$$
\det \boldsymbol{f}^{(N+1)}=\det \begin{bmatrix} f_{ij}^{(N)} & -\frac{\partial \Omega_{\rho}}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \Omega_{\rho}}{\partial \xi^{(0)j}} & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{2-7-29}
$$

然后就用 $\boldsymbol{f}^{(N+1)}$ 之逆进行 FJ 量子化. 在 Dirac 方法中,由式(2-7-23)和式(2-7-24),则有

$$
\det|\{\phi_i,\phi_j\}|=\det \boldsymbol{f}^{(N)}=0 \tag{2-7-30}
$$

所以并不是所有的约束 ϕ_i 都是第二类的,它们可以线性组合为某些第一类约束 ϕ_j. 设第一类约束的个数为 K,对这些约束,需引入 K 个规范条件$\Omega_{\rho}=0$ 来进行量子化. 引入规范条件后,系统的所有约束(包括规范条件)

$$
\phi'_i=(\phi^i,\Omega_{\rho}) \tag{2-7-31}
$$

应变为第二类约束，在 Dirac 方法中规范条件应满足以下条件：

$$\det|\{\phi'_i,\phi'_j\}|=\det\begin{bmatrix}\Delta_{ij} & -\dfrac{\partial\Omega_\rho}{\partial\xi^{(0)i}}\\ \dfrac{\partial\Omega_\rho}{\partial\xi^{(0)j}} & 0\end{bmatrix}=\det f^{(N+1)}\neq0 \qquad (2\text{-}7\text{-}32)$$

这个要求与 FJ 方法中的要求式(2-7-29)是一致的，然后按 $f^{(N+1)}$ 进行量子化. 可见，Dirac 量子化和 FJ 量子化是等价的[17].

由上面的论述已经看到，FJ 量子化是从一次 Lagrange 量出发进行的，一次 Lagrange 量系统必含 Lagrange 约束[7]，它是系统运动方程导致的结果. FJ 方法中的各级约束均是由系统运动方程导致的约束. 而 Dirac 方法中的初级约束是由奇异 Lagrange 量系统从 Lagrange 体制过渡到 Hamilton 体制描述的过程中出现的，是描述体制转换中导致的约束. Dirac 理论中导出次级约束使用了相空间的 Hamilton 运动方程，Dirac 次级约束恰好是 Lagrange 约束[7]，FJ 方法与 Dirac-Bergmann 算法本身就存在着内在联系. FJ 方法不需区分初级约束和次级约束以及第一类约束和第二类约束，进行量子化的关键是计算辛矩阵之逆，一般来说计算量比 Dirac 括号量子化要小. 众多物理系统用 FJ 方法量子化结果与 Dirac 方法量子化结果经验证是相同的.

2-8 路径积分量子化

系统的经典理论过渡到量子理论，除采用正则算符形式的量子化外，也可采用路径积分(泛函积分)量子化. 在量子力学中，这两种形式的量子化结果是等价的. 从正则算符形式量子化出发，可导出路径积分量子化结果；反之，从路径积分量子化出发，也可导出正则算符形式量子化结果. 这里先从量子力学中的路径积分量子化开始，一直讨论到规范场的路径积分量子化，特别是着重阐明约束 Hamilton 系统(奇异 Lagrange 量系统)的路径积分量子化，同时对含第一类约束系统和第二类约束系统分别进行讨论，并说明了基于 BRST 对称的 BFV 量子化方案.

量子力学和量子场论中的路径积分(或称泛函积分)形式的表述始于Dirac，其后 Feynman 的工作奠定了这个理论形式的基础[12]. Faddeev 和 Popov(FP)把 Feynman 提出的路径积分方法用于规范理论，成功地实现了非 Abel 规范场(如杨-Mills 场)的量子化[6]. FP 方法是非 Abel 规范场最简单的量子化方法，它是一种比较直观的、非严格的量子化方法. 路径积分形式量子化在量子力学，特别是在现代量子场论(非 Abel 规范场)中得到了广泛的应用.

关于约束 Hamilton 系统的路径积分量子化，Faddeev 首先给出了仅含第一类约束系统的路径积分量子化[2]，Senjanovic 给出了同时含第一类约束和第二类约束的系统路径积分量子化[3]，通常称为 FS 量子化方案. Batalin、Fradkin 和 Vilkovisky 建立了一种所谓非闭合规范代数的量子化方法[4]，并将这种方法称为 BFV 量子化方案. 它是一种协变性量子理论，不约化相空间，而是通过增添 Grassmann 数扩展相空间. 扩展相空间中的 BFV 路径积分对应于一个无约束的 Hamilton 系统. 目前人们常用的 BFV 方案是建立在 BRST 对称变换基础上的 Hamilton 形式的 BRST 量子化方法(BRST 变换和 BRS 变换是性质上非常相近的变换). 基于 Lagrange 形式的 BRST 路径积分量子化，即所谓 BV 量子化方法[8]，受到人们的关注.

约束 Hamilton 系统算符形式的正则量子化和路径积分量子化，均是建立在经典 Dirac 约束理论基础上的，涉及 Dirac 猜想(所有第一类约束均是规范变换的生成元)是否有效. 一些重要的物理系统，按 Dirac 猜想尚未导致不合理的结果，这样相应每一个第一类约束，需选取一个规范条件. 实际上对于某些特殊的奇异 Lagrange 量系统，Dirac 猜想是不成立的[32-35]. 对此类系统的量子化问题需要重新考虑.

Faddeev 和 Jackiw 提出了一种与 Dirac 方法不同的约束系统的量子化方案[9]，在这种方案中不需要区分初级和次级以及第一类约束与第二类约束. 在众多模型中将这种量子化方法与 Dirac 方法的结果进行了比较，对它们之间的等价性已做了研究[17].

在约束 Hamilton 系统的量子化中，用路径积分形式有其突出的优点，出现在路径积分中的量均是 C-数. 这不仅为分析系统的量子对称性质带来了方便，也为 FP 的直观技巧提供了依据. 为了研究约束系统的路径积分量子化形式，首先简要地介绍一些量子力学和量子场论中路径积分的有关知识. 这里先讨论正规系统(非奇异 Lagrange 量)的情形.

首先说明最简单的一维量子力学问题. 设 $\hat{q}(t)$ 代表 Heisenberg 表象中 t 时刻的广义坐标算符；$\hat{p}(t)$ 代表其正则共轭动量算符；$|q,t\rangle$ 代表 Heisenberg 表象中算符 $\hat{q}(t)$ 的本征态，其本征值为 q，即

$$\hat{q}(t)\mid q,t\rangle = q\mid q,t\rangle \tag{2-8-1}$$

在 Heisenberg 表象中，态矢是不随时间改变的，其记号 $|q,t\rangle$ 中的 t 只是表示 t 时刻算符 $\hat{q}(t)$ 的本征态.

设 Hamilton 算符 $\hat{H}$ 不显含时间，作时间平移得到与时间有关的算符 $\hat{q}(t)$ 和 $\hat{p}(t)$ 以及不同时刻的 Heisenberg 态矢 $|q,t\rangle$ 和 $|p,t\rangle$，则

$$\hat{q}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)}\hat{q}(t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)} \tag{2-8-2a}$$

$$\hat{p}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)}\hat{p}(t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)} \tag{2-8-2b}$$

态矢$|q,t\rangle$和$|q\rangle=|q,t_0\rangle$, $|p,t\rangle$和$|p\rangle=|p,t_0\rangle$之间有以下幺正变换关系

$$|q,t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)}|q\rangle \tag{2-8-3a}$$

$$|p,t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)}|p\rangle \tag{2-8-3b}$$

现在计算t时刻处于本征值为q的量子态$|q,t\rangle$，到t'时刻处于本征值为q'的量子态$|q',t'\rangle$的跃迁矩阵元

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}(t'-t)}|q\rangle \tag{2-8-4}$$

并称它为转换矩阵元或传播函数，记为$K(q',t';q,t)$. 它是t时刻位于q处的粒子到t'时刻位于q'处的概率幅. 将时间区间$[t,t']$分为n个小间隔，每个小间隔的长度$\epsilon=t_j-t_{j-1}(j=1,2,\cdots,n)$，并记$t_0=t, t_n=t'$. 在区间$[t,t']$的一个分点$t_i$，有

$$\int \mathrm{d}q(t_i)|q_i,t_i\rangle\langle q_i,t_i| = 1 \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{2-8-5}$$

将其插入转换矩阵元中，得到

$$\begin{aligned} K(q',t';q,t) = &\langle q',t'|q,t\rangle = \\ &\int \mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_{n-1}\langle q',t'|q_{n-1},t_{n-1}\rangle\langle q_{n-1},t_{n-1}|\cdots \\ &|q_2,t_2\rangle\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle\langle q_1,t_1|q,t\rangle \end{aligned} \tag{2-8-6}$$

在小区间(t_{j-1},t_j)上，有

$$\begin{aligned} \langle q_j,t_j|q_{j-1},t_{j-1}\rangle = &\langle q_j|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}(t_j-t_{j-1})}|q_{j-1}\rangle \simeq \\ &\langle q_j|1-\mathrm{i}\epsilon\hat{H}|q_{j-1}\rangle \end{aligned} \tag{2-8-7}$$

由于Hamilton算符$\hat{H}$是$\hat{q}$和$\hat{p}$的函数，所以当$\hat{H}$是$\hat{q}$和$\hat{p}$的多项式时，利用对易关系将每一项中的算符$\hat{q}$排在算符$\hat{p}$的左边，利用关系式

$$|q_{j-1}\rangle = \int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}|p_j\rangle\langle p_j|q_{j-1}\rangle = \int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_jq_{j-1}}|p_j\rangle \tag{2-8-8}$$

可得

$$\begin{aligned} \langle q_j|\hat{H}|q_{j-1}\rangle = &\int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_jq_{j-1}}\langle q_j|\hat{H}(\hat{q},\hat{p})|p_j\rangle = \\ &\int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_j(q_j-q_{j-1})}H(q,p) \end{aligned} \tag{2-8-9}$$

式中：算符$\hat{H}(\hat{q},\hat{p})$中的$\hat{q}$对左边作用、$\hat{p}$对右边作用后变成C-数的正则Hamilton量$H(q,p)$. 这样，量子系统的转换矩阵元，就转化为对C-数的

积分，即

$$\langle q_j,t_j \mid q_{j-1},t_{j-1}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_j(q_j-q_{j-1})}(1-\mathrm{i}\varepsilon H) \simeq \int \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi} \exp\{\mathrm{i}[p_j(q_j-q_{j-1})-\varepsilon H]\} \tag{2-8-10}$$

从而

$$\langle q',t' \mid q,t\rangle = \int \prod_j^{n-1} \mathrm{d}q_j \prod_j^{n} \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi} \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\sum_j \varepsilon\left[p_j \frac{q_j-q_{j-1}}{\varepsilon} - H\right]\right\} \tag{2-8-11}$$

当 $n\to\infty$ 时，记

$$\mathscr{D}q = \prod_j \mathrm{d}q_j, \quad \mathscr{D}p = \prod_j \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi\hbar} \tag{2-8-12}$$

则式(2-8-11)变为

$$\langle q',t' \mid q,t\rangle = \int \mathscr{D}q(\tau)\mathscr{D}p(\tau) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'}[p(\tau)\dot{q}(\tau) - H(q(\tau),p(\tau))]\mathrm{d}\tau\right\} = \int \mathscr{D}(q)\mathscr{D}(p)\exp\left(\frac{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}}{\hbar}\right) \tag{2-8-13}$$

式中

$$I^{\mathrm{p}} = \int_t^{t'}[p(\tau)\dot{q}(\tau) - H(q(\tau),p(\tau))]\mathrm{d}\tau \tag{2-8-14}$$

为正则作用量. 这里补写了自然单位制中省去的因子 $\hbar$. 式(2-8-13)中积分是无穷维的，积分变量是函数 $q(\tau)$ 和 $p(\tau)$，并将其称为路径(泛函)积分. 积分是对定义在函数空间上的测度施行，而不是对实数或复数域上的测度施行. 这个路径积分的确切意义是由式(2-8-11)右端的极限给出的. 它是所有在 t 时刻坐标为 q 至 t' 时刻坐标为 q' 的相空间中一切路径 $(q(\tau),p(\tau))$ 的贡献之和(在端点 t 和 t' 时刻，对动量没有限制)，所以称为路径积分.

讨论一种简单的情形. 正则 Hamilton 量 H 具有如下形式

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{2-8-15}$$

此时可以作出式(2-8-11)对 p_j 的积分，利用 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_j(q_j-q_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{2m}p_j^2\right]\right\} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\mathrm{i}\varepsilon}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon\frac{m}{2}\dot{q}_j^2\right) \tag{2-8-16}$$

于是当 $n\to\infty$ 时，式(2-8-11) 就化为

$$\langle q',t' \mid q,t\rangle = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}q_j}{[2\pi\hbar \mathrm{i}\varepsilon/m]^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_j-q_{j-1}}{\varepsilon}\right)^2 - V(q_j)\right]\right\} \quad (2\text{-}8\text{-}17)$$

或简写为

$$\langle q',t' \mid q,t\rangle = \left[\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int_q^{q'}\mathscr{D}q(\tau)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))\mathrm{d}\tau\right\} =$$

$$\left[\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int_q^{q'}\mathscr{D}q(\tau)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}I[q(\tau)]\right) \quad (2\text{-}8\text{-}18)$$

式中

$$\mathscr{D}q(\tau) = \prod_j \frac{\mathrm{d}q_j}{[2\pi\hbar \mathrm{i}\varepsilon/m]^{\frac{1}{2}}} \quad (2\text{-}8\text{-}19)$$

$$L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \quad (2\text{-}8\text{-}20)$$

式中：$L(q,\dot{q})$为经典 Lagrange 函数；$I[q(\tau)]$为连接$q(t)=q$和$q(t')=q'$两点的路径的经典作用量，它是$q(\tau)$的泛函. 式(2-8-18)是位形空间(坐标空间)中的路径积分. 对某些特殊形式的 Hamilton 量，相空间中的路径积分式(2-8-13)可化为位形空间中的路径积分式(2-8-18). 式(2-8-18)表明，量子力学中的概率幅$\langle q',t'|q,t\rangle$是位形空间中所有连接$q(t)=q$和$q(t')=q'$两点的路径$q(\tau)$的贡献的叠加；每个路径的贡献的振幅相同而位相不同，且每一路径$q(\tau)$对位相的贡献为$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[Iq(\tau)]\right)$. $\langle q',t'|q,t\rangle$的模的平方代表概率. 不同路径$q(\tau)$对$\langle q',t'|q,t\rangle$的贡献是概率幅的相加，而不是概率相加. 由于不同路径贡献不同的相因子，因此不同路径之间会发生相互干涉. 式(2-8-18)是Feynman原来采用的路径积分形式，他把式(2-8-18)作为量子力学的基本假设，由式(2-8-18)可导出Schrödinger 方程[7]和通常量子力学中算符的对易关系(这个问题将在后面讨论). 这里是从量子力学的算符表述形式推出了Feynman的路径积分形式.

路径积分形式表述中一个突出的优点是传播函数或转换矩阵元中已不再出现算符(Q-数)，而出现的是经典的数(C-数). 这时，经典 Lagrange 量中的对称性质就清楚地呈现出来.

上述对一维量子力学的路径积分形式，很容易将其推广到r个自由度系统. 设系统的广义坐标为$q^1,q^2,\cdots,q^r$，对应的广义动量为$p_1,p_2,\cdots,p_r$，系统的 Hamilton 量为$H(q^i,p_i)$，此时转换矩阵元

$$\langle q^{1\prime},\cdots,q^{r\prime},t' \mid q^1,\cdots,q^r,t\rangle =$$

$$\int\prod_{j=1}^{r}\mathscr{D}q^j\mathscr{D}p_j\ \exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}[p_i\dot{q}^i - H(q,p)]\mathrm{d}\tau\right\} \qquad (2\text{-}8\text{-}21)$$

当给定的 Hamilton 量 $H(q,p)$中对每个自由度 p_i 的 Gauss 积分都可积出时,相空间中的路径积分式(2-8-21)可化为位形空间中的路径积分,即

$$\langle q_1{}',\cdots,q_r{}',t' \mid q_1,\cdots,q_r,t\rangle = \int\prod_{j=1}^{r}\mathscr{D}q_j\exp\{\mathrm{i}I[q]\} \qquad (2\text{-}8\text{-}22)$$

式中

$$I[q] = I[q_1,\cdots,q_r] = \int_t^{t'}\mathrm{d}tL(q_1,\cdots,q_r;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_r) \qquad (2\text{-}8\text{-}23)$$

应该指出的是,位形空间中的路径积分式(2-8-18)不是普遍的形式,相空间中的路径积分式(2-8-13)才是普遍的形式.

量子力学中正则变量之间的对易关系也可由路径积分形式导出. 为了记号简化,以下取 $\hbar=1$. 在量子力学中,动量算符 $\hat{p}$ 在 x 表象中的形式可取为

$$\langle x \mid \hat{p} \mid x'\rangle = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x \mid x'\rangle \qquad (2\text{-}8\text{-}24)$$

在路径积分形式中,坐标 x 的共轭动量 p 适合

$$\langle x'',t'' \mid \hat{p}(t'') \mid x',t'\rangle = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x''}\langle x'',t'' \mid x',t'\rangle \qquad (2\text{-}8\text{-}25)$$

这个关系与正则形式是一致的. 事实上,利用式(2-8-18)有

$$\langle x''+\xi,t'' \mid x',t'\rangle = \langle x'',t'' \mid x',t'\rangle + \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x''}\langle x'',t'' \mid x',t'\rangle =$$

$$\frac{1}{N}\int\mathscr{D}x\left(1+\mathrm{i}\xi\frac{\partial L(t'')}{\partial \dot{x}}\right)\exp\{\mathrm{i}I[x]\} =$$

$$\langle x'',t'' \mid x',t'\rangle + \mathrm{i}\xi\langle x'',t''\left|\frac{\partial\hat{L}(x'')}{\partial\dot{x}}\right|x',t'\rangle \qquad (2\text{-}8\text{-}26)$$

按动量的定义,由式(2-8-26)就得到式(2-8-25). 此外,算符 $\hat{x}(t'')$在$\langle x'',t''|$和$|x',t'\rangle$之间的矩阵元

$$\langle x'',t'' \mid \hat{x}(t'') \mid x',t'\rangle = x''\langle x'',t'' \mid x',t'\rangle \qquad (2\text{-}8\text{-}27)$$

由式(2-8-25)、式(2-8-27),有

$$-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x''}\langle x'',t'' \mid \hat{x}(t'') \mid x',t'\rangle =$$

$$\langle x'',t'' \mid \hat{p}(t'')\hat{x}(t'') \mid x',t'\rangle =$$

$$-\mathrm{i}\langle x'',t'' \mid x',t'\rangle + \langle x'',t'' \mid \hat{x}(t'')\hat{p}(t'') \mid x',t'\rangle \qquad (2\text{-}8\text{-}28)$$

从而得到正则变量 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 之间的对易关系,即

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = \mathrm{i} \qquad (5\text{-}2\text{-}29)$$

可见，路径积分量子化形式和正则（算符）量子化形式是等效的.

算符 $\hat{q}(t)$ 在态矢 $|q',t'\rangle$ 和 $|q'',t''\rangle$ 之间的矩阵元也可用路径积分来表示. 设 $t'<t<t''$，将区间 (t',t'') 划分为 n 等份，并设其中一个分点 $t_i=t$. 记 $t_0=t'$，$t_n=t''$，于是

$$
\begin{aligned}
\langle q'',t''|\,\hat{q}(t)\,|\,q',t'\rangle = \\
\int \langle q'',t''\,|\,q_{n-1},t_{n-1}\rangle\langle q_{n-1},t_{n-1}\,|\,q_{n-2},t_{n-2}\rangle\cdots \\
\langle q_{i+2},t_{i+2}\,|\,q_{i+1},t_{i+1}\rangle\langle q_{i+1},t_{i+1}\,|\,\hat{q}(t_i)\,|\,q_i,t_i\rangle\cdots \\
\langle q_1,t_1\,|\,q',t'\rangle\prod_{j=1}^{n-1}\mathrm{d}q_j
\end{aligned}
\tag{2-8-30}
$$

由于 $|q_i,t_i\rangle$ 是 $\hat{q}(t_i)$ 的本征态，因此

$$
\hat{q}(t_i)\,|\,q_i,t_i\rangle = q(t_i)\,|\,q_i,t_i\rangle \tag{2-8-31}
$$

将式(2-8-31)代入式(2-8-30)，再用上面类似的讨论可得

$$
\begin{aligned}
\langle q'',t''\,|\,\hat{q}(t)\,|\,q',t'\rangle = \\
\int \mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,q(t)\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}[p\dot{q}-H(q,p)]\mathrm{d}t\right\}
\end{aligned}
\tag{2-8-32}
$$

同样的讨论可以求出算符乘积的矩阵元的路径积分，即

$$
\begin{aligned}
\langle q'',t''|\,T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]\,|\,q',t'\rangle = \\
\int \mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,q(t_1)\,q(t_2)\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}[p\dot{q}-H(p,q)]\mathrm{d}t\right\}
\end{aligned}
\tag{2-8-33}
$$

式中，T 代表编时乘积，它的定义是

$$
T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] = \begin{cases}\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2), & t_1>t_2\\ \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1), & t_1<t_2\end{cases} \tag{2-8-34}
$$

推广到多个算符积的情形，有

$$
\begin{aligned}
\langle q'',t''|\,T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]\,|\,q',t'\rangle = \\
\int \mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,q(t_1)\cdots q(t_n)\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}[p\dot{q}-H(q,p)]\mathrm{d}t\right\}
\end{aligned}
\tag{2-8-35}
$$

对于算符 $\hat{q}(t)$ 和 $\hat{p}(t)$ 的任意（算符）函数 $\hat{F}$，有[5]

$$
\begin{aligned}
\langle q'',t''\,|\,\hat{F}\,|\,\hat{q},t'\rangle = \int \mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\,F(q(t),p(t))\,\cdot \\
\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}[p\dot{q}-H(q,p)]\mathrm{d}t\right\}
\end{aligned}
\tag{2-8-36}
$$

式中：F 为 $\hat{F}$ 的经典极限. 出现在本节各式中的 Hamilton 量 H 对正规 La-

grange 量系统就是系统的正则 Hamilton 量 H_c. 本节最后说明一下 Grassmann 数的积分性质[21].

Fermi 场算符的经典对应为 Grassmann 数. 先考虑 Fermi 型算符的一维情况. 设算符 $\hat{b}$ 和 $\hat{b}^+$ 满足如下反对易关系

$$[\hat{b},\hat{b}^+]_+ = \hat{b}\,\hat{b}^+ + \hat{b}^+\,\hat{b} = 0,\quad \hat{b}^+\,\hat{b}^+ = 0,\quad \hat{b}\,\hat{b} = 0 \tag{2-8-37}$$

考虑两反对易 C-数 b 和 b^*, 它们适合

$$b\,b^* + b^*\,b = 0,\quad (b^*)^2 = 0,\quad b^2 = 0 \tag{2-8-38}$$

满足式(2-8-38)的 b 和 b^* 是二阶 Grassmann 代数的基, 此代数的任一元素可写为

$$f(b^*,b) = f_{00} + f_{01}b + f_{10}b^* + f_{11}bb^* \tag{2-8-39}$$

式中: $f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}$ 均为复数. 由 $(b^*)^2=0$ 可得 $f(b^*)$ 的最一般形式, 即

$$f(b^*) = f_0 + f_1 b^* \tag{2-8-40}$$

考虑 $f(b)$ 的积分

$$\int f(b)\,\mathrm{d}b = \int (f_0 + f_1 b)\,\mathrm{d}b \tag{2-8-41}$$

此积分只需计算两项, 设 a 为与 b 无关的另一 Grassmann 参量, 在积分变量代换下, 应满足

$$\int f(b)\,\mathrm{d}b = \int f(b+a)\,\mathrm{d}b \tag{2-8-42}$$

由此性质, 就有

$$\int b\mathrm{d}b = \int (b+a)\,\mathrm{d}b = \int b\mathrm{d}b + \int a\mathrm{d}b \tag{2-8-43}$$

为了保持这一性质, a 为任意参量, 与 b 无关, 因此 $\int \mathrm{d}b = 0$, 并取

$$\int b\mathrm{d}b = 1 \tag{2-8-44}$$

故对 Grassmann 变量 b 的函数 $f(b)$ 的积分, 只需计算上述两个积分.

类似地, 两个 Grassmann 变量的积分, 有

$$\int \mathrm{d}a\mathrm{d}b = 0,\quad \int a\mathrm{d}a\mathrm{d}b = 0 \tag{2-8-45}$$

$$\int \mathrm{d}a\mathrm{d}b\;(ab) = 1$$

故

$$\int \mathrm{d}a\mathrm{d}b\,e^{\lambda a b} = \int \mathrm{d}a\mathrm{d}b(1 + \lambda ab + \cdots) = \lambda \tag{2-8-46}$$

为了计算实际问题, 下面给出 Grassmann 代数的一个积分性质. 现考虑积分

$$I = \int \mathrm{d}b_1 \mathrm{d}b_1^* \mathrm{d}b_2 \mathrm{d}b_2^* \cdots \mathrm{d}b_n \mathrm{d}b_n^* \exp\{b_i^* M_{ij} b_j\} \tag{2-8-47}$$

式中：M_{ij}为复数. 被积函数可展开为

$$\exp\sum_{i,j}\{b_i^* M_{ij} b_j\} = \prod_i \prod_j (1 + b_i^* M_{ij} b_j) \tag{2-8-48}$$

根据 Grassmann 代数积分规则，展开式(2-8-48)，不难看出，对积分有贡献的项为

$$\sum_{(j_1\cdots j_n)\text{的排列}} M_{nj_n} M_{(n-1)j_{n-1}} \cdots M_{1j_1} b_n^* b_{j_n} \cdots b_1^* b_{j_1} \tag{2-8-49}$$

从而得

$$I = \det \boldsymbol{M} = \det \mid M_{ij} \mid \tag{2-8-50}$$

2-9 场论中的路径积分 Green 函数的生成泛函

场是无穷多自由度的连续系统，把连续系统离散化后作为多自由度系统来处理，然后再过渡到连续极限就可得场论中的路径积分. 这里先讨论正规 Lagrange 量系统. 为了简单，考虑一个实标量场 $\varphi(x)$的情形. Lagrange 量

$$L = \int_V \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \mathrm{d}^3 x \tag{2-9-1}$$

将空间区域V分为n_1个边长为ϵ的小正方格. 设$\varphi^\alpha(t)$为场$\varphi(x)$在第α个方格中的平均值，并把它视为场的坐标，即$\varphi^\alpha(t) \to q^\alpha(t)$. 式(2-9-1)可写为对所有方格中的贡献求和，即

$$L = \lim_{n_1 \to \infty} \sum_{\alpha=1}^{n_1} \epsilon^3 \mathscr{L}_\alpha(\varphi^\alpha(t), \dot{\varphi}^\alpha(t), \varphi^{\alpha+\delta}(t))$$

式中：$\mathscr{L}_\alpha$对$\varphi^{\alpha+\delta}(t)$的依赖是由于将场$\varphi(x)$的空间微商改为差分而引起的；$\varphi^\alpha(t)$的共轭正则动量

$$p_\alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^\alpha(t)} = \epsilon^3 \frac{\partial \mathscr{L}_\alpha}{\partial \dot{\varphi}^\alpha} = \epsilon^3 \pi_\alpha(t) \tag{2-9-2}$$

式中重复指标α不求和. 此时 Hamilton 量

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - L = \sum_\alpha \epsilon^3 \mathscr{H}_\alpha \tag{2-9-3}$$

式中

$$\mathscr{H}_\alpha = \pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathscr{L}_\alpha \tag{2-9-4}$$

量子化后$\hat{\varphi}^\alpha(t)$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n_1)$为算符. 令$|\varphi^\alpha, t\rangle$表示算符$\hat{\varphi}^\alpha(t)$的共同本征态，跃迁(转换)矩阵元$\langle \varphi^{\alpha'}, t' | \varphi^\alpha, t\rangle$可按 2-8 中的讨论求出.

当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi^{\alpha'},t'\mid\varphi^{\alpha},t\rangle =$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varphi^{\alpha}}^{\varphi^{\alpha'}}\prod_{\alpha_1=1}^{n_1}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{d}\varphi^{\alpha_1}(\tau_i))\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon^3\mathrm{d}\pi_{\alpha_1}(\tau_i)}{2\pi}\right)\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon^4\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_1=1}^{n_1}\left[\pi_{\alpha_1}(\tau_j)\frac{\varphi^{\alpha_1}(\tau_j)-\varphi^{\alpha_1}(\tau_{j-1})}{\varepsilon}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathscr{H}_{\alpha_1}(\pi_\alpha(\tau_j),\varphi^{\alpha}(\tau_{j-1}),\varphi^{\alpha+\delta}\ (\tau_{j-1}))\right]\right\} \tag{2-9-5}$$

式(2-9-5)可简记为

$$\langle\varphi'(x),t'\mid\varphi(x),t\rangle=\int_{\varphi(x)}^{\varphi'(x)}\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}^3x\left[\pi(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},\tau)}{\partial\tau}-\mathscr{H}(\boldsymbol{x},\tau)\right]\right\} \tag{2-9-6}$$

式中

$$\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)},\quad \mathscr{H}=\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L} \tag{2-9-7}$$

$$\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\prod_{\alpha_1=1}^{n_1}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{d}\varphi^{\alpha_1}(\tau_i))\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon^3\mathrm{d}\pi_{\alpha_1}(\tau_i)}{2\pi}\right) \tag{2-9-8}$$

式中：π_α 和 $\mathscr{H}_\alpha$ 分别为 $\pi(x)$ 和 $\mathscr{H}(x)$ 在第 α 个方格中的平均值.

假设 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi-\frac{1}{2}m^2\varphi^2+\mathscr{L}_{\mathrm{in}}(\varphi) \tag{2-9-9}$$

此时的 Hamilton 量密度为

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\mathscr{L}_{\mathrm{in}}(\varphi) \tag{2-9-10}$$

将式(2-9-10)代入式(2-9-6)，对 π 的积分为 Gauss 型，求出对 π 的积分后得

$$\langle\varphi'(x),t'\mid\varphi(x),t\rangle=N_0\int_{\varphi(x)}^{\varphi'(x)}\mathscr{D}\varphi\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}^3x'\mathscr{L}(\boldsymbol{x}',\tau)\right\} \tag{2-9-11}$$

式中

$$N_0=\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi\mathrm{i}}}\right)^n,\quad \mathscr{D}\varphi=\prod_{\alpha_1=1}^{n_1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\varepsilon\,\mathrm{d}\varphi^{\alpha_1}(\tau_i)\frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{i}}}\right)$$

值得注意的是，式(2-9-11)右端出现的场量 $\varphi(x)$ 不是场算符 $\hat{\varphi}(x)$. 对 Bose 场 $\varphi(x)$ 为 C-数，对 Fermi 场 $\varphi(x)$ 为 Grassmann 数. 式(2-9-11)为量子场论中的 Feynman 路径积分形式. 由式(2-9-11)场算符 $\hat{\varphi}(x)$ 在态之间矩阵

元的路径积分为

$$\langle \varphi',t' \mid \hat{\varphi}(x) \mid \varphi,t\rangle = N_0\int_{\varphi}^{\varphi'} \mathscr{D}\varphi\, \varphi(x)\ \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x'\ \mathscr{L}(x')\right] \quad (2\text{-}9\text{-}12)$$

一般情形，有

$$\langle \varphi',t' \mid T(\hat{\varphi}(x_1)\cdots \hat{\varphi}(x_n)) \mid \varphi,t\rangle =$$

$$N_0\int_{\varphi}^{\varphi'} \mathscr{D}\varphi\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\ \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x'\ \mathscr{L}(x')\right] \quad (2\text{-}9\text{-}13)$$

式中：T 代表编时乘积．

类似于式(2-8-24)，场算符$\hat{\varphi}(x)$的共轭动量$\hat{\pi}(x)$可由

$$\langle \varphi',t' \mid \hat{\pi}(x') \mid \varphi,t\rangle = -\mathrm{i}\,\frac{\delta}{\delta\varphi'(x')}\langle \varphi',t' \mid \varphi,t\rangle \quad (2\text{-}9\text{-}14)$$

确定．由上述关系不难导出正则对易关系式．

下面讨论 Bose 场和 Fermi 场两种不同的情形．对于 Bose 场$\hat{\varphi}(x)$可利用下式

$$\langle \varphi',t' \mid \hat{\varphi}(x'_2) \mid \varphi,t\rangle = \varphi'(x'_2)\langle \varphi',t' \mid \varphi,t\rangle \quad (2\text{-}9\text{-}15)$$

求泛函微商$-\mathrm{i}\delta/\delta\varphi'(x'_1)$，但需注意式中

$$\hat{\varphi}'(x) \mid \varphi',t\rangle = \varphi'(x) \mid \varphi',t'\rangle$$

这时可得

$$\langle \varphi',t' \mid \hat{\pi}(x'_1)\,\hat{\varphi}(x'_2) \mid \varphi,t\rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1-\boldsymbol{x}'_2)\langle \varphi',t' \mid \varphi,t\rangle +$$

$$\varphi'(x'_2)\langle \varphi',t' \mid \hat{\pi}(x'_1) \mid \varphi,t\rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1-\boldsymbol{x}'_2)\langle \varphi',t' \mid \varphi,t\rangle +$$

$$\langle \varphi',t' \mid \hat{\varphi}(x'_2)\,\hat{\pi}(x'_1) \mid \varphi,t\rangle \quad (2\text{-}9\text{-}16)$$

由式(2-9-16)有

$$[\hat{\pi}(x_1),\hat{\varphi}(x_2)]_- = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2) \quad (2\text{-}9\text{-}17)$$

对于 Fermi 场 $\hat{\psi}(x)$，由于场的反对易性式(2-9-16)应改为

$$\langle \psi',t' \mid \hat{\pi}(x'_1)\,\hat{\psi}(x'_2) \mid \psi,t\rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1-\boldsymbol{x}'_2)\langle \psi',t' \mid \psi,t\rangle -$$

$$\psi'(x'_2)\langle \psi',t' \mid \hat{\pi}(x'_1) \mid \psi,t\rangle = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}'_1-\boldsymbol{x}'_2)\langle \psi',t' \mid \psi,t\rangle -$$

$$\langle \psi',t' \mid \hat{\psi}(x'_2)\,\hat{\pi}(x'_1) \mid \psi,t\rangle \quad (2\text{-}9\text{-}18)$$

从而得到反对易关系式

$$[\hat{\pi}(x_1),\hat{\psi}(x_2)]_+ = -\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2) \quad (2\text{-}9\text{-}19)$$

对场论中正规 Lagrange 量描述的系统，Feynman 路径积分形式和算符正则量子化形式之间是等效的．将上面的讨论推广到多个场变量的情况是直接的．

量子场论可视为由所有 Green 函数$\langle 0|T[\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\cdots\hat{\varphi}(x_n)]|0\rangle$来表述的，其中$|0\rangle$代表场的基态，这些 Green 函数可以简洁地用路径积分来表达，通过引入外源技术来实现. 考虑场$\varphi(x)$与经典外源$J(x)$耦合，有外源的下列路径积分

$$Z[J]=\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\cdot\exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4 xJ\varphi]\} \tag{2-9-20}$$

是外源$J(x)$的泛函. 其中归一化因子已省略. I^{p} 为正则作用量，且

$$I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4 x[\pi(x)\dot{\varphi}(x)-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}(x)] \tag{2-9-21}$$

将$Z[J]$在$J=0$的邻域展开

$$Z[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int \mathrm{d}^4 x_1\cdots\mathrm{d}^4 x_n G_n(x_1,\cdots,x_n)\cdot (J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)) \tag{2-9-22}$$

其中

$$G_n(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0\mid T[\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)]\mid 0\rangle = (-\mathrm{i})^n\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{2-9-23}$$

$G_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 Green 函数. $Z[J]$就是 Green 函数的生成泛函(母泛函). 由生成泛函式(2-9-20)，可导出所有 Green 函数. 路径积分中通过引入外源技术得到的生成泛函，这样就可方便地导出 Feynman 规则，证明 Ward-Takahashi恒等式[21]，进行非微扰论研究以及建立量子对称性理论等[35]. 式(2-9-20)称为相空间生成泛函，如果对动量π可积，则可化为仅对φ作路径积分的位形空间生成泛函.

2-10 Faddeev-Popov(FP)量子化

本节讨论规范场的路径积分量子化. 规范不变的系统为约束 Hamilton 系统，应该按该约束系统理论进行路径积分量子化. FP 对规范系统给出了一种直观、简便的量子化方法[6]. 前面讨论的正规 Lagrange 量系统，在相空间中不存在约束，对规范不变系统，其跃迁矩阵元不能简单地在式(2-9-11)中用规范不变 Lagrange 量代入，如两点 Green 函数

$$D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x,y)=\langle 0\mid T[A_\mu^\alpha(x)A_\nu^\beta(y)]\mid 0\rangle = N^{-1}\int \mathscr{D}AA_\mu^\alpha(x)A_\nu^\beta(y)\exp(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\mathscr{L}) \tag{2-10-1}$$

式中：$\mathscr{L}$为规范不变的杨-Mills 场$A_\mu^\alpha(x)$的 Lagrange 量. 在规范变换

$$A_\mu^a(x) \to A_\mu^{a'}(x) = UA_\mu^a(x)U^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \qquad (2\text{-}10\text{-}2)$$

下，$\mathscr{L}$保持不变，这样沿规范变换所确定的同一条路径对式(2-10-1)作泛函积分，该积分中必包含一个无穷大的群体积，因而使 $D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x-y)$失去意义.

考虑由 $A_\mu^a(x)$张成的函数空间($\mu=0,1,2,3;\alpha=1,2,\cdots,n$)中，从一个给定的 $A_\mu^a(x)$点出发，作规范变换式(2-10-2)，让 ω 取遍规范群 G 的所有元素. 这样得到的所有 $A_\mu^{a\omega}(x)$点就在此函数空间中形成一条路径(轨道)，所以对 $4n$ 空间的路径(泛函)积分可分解为

$$\int \prod_{\mu,a} \mathrm{d}A_\mu^a(x) = \text{同一条路径积分} \times \text{不同路径积分} \qquad (2\text{-}10\text{-}3)$$

由于规范不变性，在同一条路径上，Lagrange 量 $\mathscr{L}$是不变的，这部分积分比例于轨道体积，它是发散的. 泛函积分是要对所有可能的历史路径求和，而这个发散部分仅代表同一历史路径的相加. 因此，在规范场的情况下，定义跃迁幅前应该把这个轨道体积发散因子分离出来. 如何实现这一目标呢？从泛函积分

$$Z[0] = \int \mathscr{D}A\exp[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}(A, A_{,\mu})] \qquad (2\text{-}10\text{-}4)$$

的表达式来看，对函数 $A_\mu^a(x)$的积分应限制在由规范约束(或规范条件)，如

$$F^a[A_\mu^a] = 0 \qquad (2\text{-}10\text{-}5)$$

所确定的超曲面上. 假设每条路径(轨道)只与此超曲面相交一次，用在超曲面上的积分来代替整个函数空间的积分，就不出现沿同一轨道的积分了. 这就是说，在对规范场进行量子化时，必须先选取某种规范条件以限制系统的规范自由度. 式(2-10-5)的规范条件有多种可能的形式，例如，Lorentz 规范 $\partial^\mu A_\mu^a(x)=0$，Coulomb 规范$\nabla \cdot \mathbf{A}=0$，轴规范 $A_3^a(x)=0$，时性规范 $A_0^a(x)=0$ 等. 规范条件决定了 $A_\mu^a(x)$函数空间中的一个超曲面. 假设对规范场作规范变换时，使得规范场 A_μ^a 只有唯一的一个解满足规范条件，即每一条轨道只与规范条件所确定的超曲面仅相交一次. 这样在超曲面上用积分代替全空间积分，就不出现轨道体积因子，因而就避免了泛函积分的发散. 为了分出这个轨道体积因子，要先定义一个与规范场和规范条件有关的泛函，即

$$\Delta_F^{-1}[A_\mu^a] = \int \mathscr{D}\omega\delta(F^a[A_\mu^{a\omega}]) \qquad (2\text{-}10\text{-}6)$$

或

$$\Delta_F[A_\mu^a]\int \mathscr{D}\omega\delta(F^a[A_\mu^{a\omega}]) = 1 \qquad (2\text{-}10\text{-}7)$$

不难看出，$\Delta_F[A_\mu^a]$是规范不变的. 因为对紧致的规范群，有左移(或右移)不变测度 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(\omega_1\omega)=\mathrm{d}(\omega\omega_1)$，于是

$$\Delta_F^{-1}[A\mu_\mu^{\alpha\omega_1\omega}] = \int \mathscr{D}\omega\delta(F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega_1\omega}]) =$$

$$\int \mathscr{D}(\omega_1\omega)\delta(F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega_1\omega}]) = \Delta_F^{-1}[A_\mu^\alpha] \qquad (2\text{-}10\text{-}8)$$

把式(2-10-7)插入式(2-10-4)中,得

$$Z_F[0] = \int \mathscr{D}A_\mu^\alpha \Delta_F[A_\mu^\alpha]\int \mathscr{D}\omega\delta(F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega}])\exp[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}] \qquad (2\text{-}10\text{-}9)$$

$\mathscr{L}$和 $\Delta_F[A_\mu^\alpha]$是规范不变的,规范势的泛函测度 $\mathscr{D}A_\mu^\alpha$ 也是规范不变的. 事实上,因为 $\mathscr{D}A_\mu^\alpha = \prod_{x,\alpha} \mathrm{d}A_\mu^\alpha(x)$在规范变换下

$$A_\mu^\alpha(x) \to A_\mu^{\alpha\omega}(x) = A_\mu^\alpha(x) + f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^\beta(x)A_\mu^\gamma(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\varepsilon^\alpha(x) \quad (2\text{-}10\text{-}10)$$

$$\mathscr{D}A_\mu^\alpha \to \mathscr{D}A_\mu^{\alpha\omega} = J\mathscr{D}A_\mu^\alpha \qquad (2\text{-}10\text{-}11)$$

式中:$f^{\alpha\beta\gamma}$为规范群的结构常数;J 是 Jacobi 行列式. 由于

$$\frac{\delta A_\nu^{\alpha\omega}(x)}{\delta A_\mu^\beta(y)} = \delta_\beta^\alpha\delta_\mu^\nu\delta^4(x-y) - f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^\gamma(x)\delta^4(x-y)\delta_\mu^\nu \qquad (2\text{-}10\text{-}12)$$

它在规范群 G 中表示空间是 $n\times n$ 矩阵($\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,n$),$J$ 的对角线上元素为 1,非对角线上有一极小量 $\varepsilon^\gamma(x)$,在 Minkowski 空间存在 4×4 单位阵($\mu,\nu=0,1,2,3$),它是时空坐标的无限维单位阵,因此 $J=1+0(\varepsilon^2)=1$. 所以 $\mathscr{D}A_\mu^\alpha$ 是规范不变的.

泛函积分式(2-10-9)在积分变量的变换下总是不变的,在 $A_\mu^\alpha \to A_\mu^{\alpha\omega^{-1}}$ 变换后,式(2-10-9)化为

$$Z_F[0] = \int \mathscr{D}A_\mu^{\alpha\omega^{-1}}\Delta_F[A_\mu^{\alpha\omega^{-1}}]\mathscr{D}\omega\delta(F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega^{-1}\omega}])\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}\} =$$

$$\int \mathscr{D}\omega\int \mathscr{D}A_\mu^\alpha\Delta_F[A_\mu^\alpha]\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])\exp(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}) \qquad (2\text{-}10\text{-}13)$$

这样前一个因子与群元素有关,而对群元素的积分就是群空间的体积. 把分离出来的群体积 $\int \mathscr{D}\omega$ 丢掉,再在 $\mathscr{L}$ 上加上外源,就得到 Green 函数的生成泛函,即

$$Z_F[J] = \int \mathscr{D}A_\mu^\alpha\Delta_F[A_\mu^\alpha]\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L} + J_\mu^\alpha A_\alpha^\mu]\}$$

$$(2\text{-}10\text{-}14)$$

式(12-10-14)是在任意规范条件 $F^\alpha[A_\mu^\alpha]=0$ 下导出的,将 $F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega}]$在恒元附近展开,有

$$F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega}] = F^\alpha[A_\mu^\alpha] + \int \mathrm{d}^4yM_F^{\alpha\beta}(x,y)\varepsilon_\beta(y) \qquad (2\text{-}10\text{-}15)$$

式中

$$M_F^{\alpha\beta}(x,y)=\frac{\delta F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega}]}{\delta\ \varepsilon_\beta(y)} \tag{2-10-16}$$

下面来计算 Lorentz 规范条件 $F^\alpha[A_\mu^\alpha]=\partial^\mu A_\mu^\alpha=0$ 下的 $\Delta_F[A_\mu^\alpha]=\Delta_L[A_\mu^\alpha]$. 由于(取 $g=1$)

$$\begin{aligned}\partial^\mu A_\mu^{\alpha\omega} &= \partial^\mu[A_\mu^\alpha+f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^\beta A_\mu^\gamma-\partial_\mu\varepsilon^\alpha]= \\ & f^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu\varepsilon^\beta A_\mu^\gamma-\partial^2\varepsilon^\alpha\end{aligned} \tag{2-10-17}$$

由式(2-10-6)和式(2-10-16),有

$$\Delta_L^{-1}[A_\mu^\alpha]=\int\mathscr{D}\omega\delta(F^\alpha[A_\mu^{\alpha\omega}])=(\det M_L)^{-1}$$

利用式(2-10-16)和式(2-10-17),得

$$M_L^{\alpha\beta}(x,y)=(\delta^{\alpha\beta}\partial^2-f^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\gamma\partial^\mu)\delta^4(x-y) \tag{2-10-18}$$

对 Coulomb 规范条件$\partial^i A_i^\alpha=0$,可类似求出 $\boldsymbol{M}_C$. 在生成泛函中,因子 det $\boldsymbol{M}_C\prod_\alpha\delta(\partial^i A_i^\alpha)$ 可用因子 det $\boldsymbol{M}_L\delta(\partial^\mu A_\mu^\alpha)$来代替.

利用 Grassmann 数积分的性质,可将 det $\boldsymbol{M}_F$ 用 Grassmann 数的积分来表达. 设 $C_i,C_j^+(i,j=1,2,\cdots,n)$生成 Grassmann 代数,$C_i,C_j^+$ 之间为反对易 Grassmann 数. Grassmann 代数的 Gauss 型积分,有

$$\int\exp(\sum_{i,j=1}^n C_i^+A_{ij}C_j)\mathrm{d}C_1\mathrm{d}C_1^+\cdots\mathrm{d}C_n\mathrm{d}C_n^+=\det\boldsymbol{A} \tag{2-10-19}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}=[A_{ij}]$. 引入 FP 鬼场 $C_\alpha^+(x),C^\beta(y)(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n)$,它们是 Grassmann 数,利用式(2-10-19),有

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{M}_F=&\int\mathscr{D}C_\alpha(y)\mathscr{D}C_\beta^+(x)\exp[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\cdot \\ & C_\alpha^+(x)M_F^{\alpha\beta}(x,y)C_\beta(y)]\end{aligned} \tag{2-10-20}$$

这样式(2-10-14)可化为

$$\begin{aligned}Z_F[J,\eta^+,\eta]=&\int\mathscr{D}A_\mu^\alpha\mathscr{D}C_\alpha\mathscr{D}C_\beta^+\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])\,\cdot \\ &\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}+J_\mu^\alpha A_\alpha^\mu+\eta_\alpha^+C_\alpha+ \\ &C_\alpha^+\eta_\alpha]+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y C_\alpha^+M_F^{\alpha\beta}C_\beta\}\end{aligned} \tag{2-10-21}$$

这里对鬼场也引入了相应的外源 $\eta_\alpha(x),\eta_\alpha^+(x)$,它们也是反对易的. 可见,FP 鬼场 $C_\alpha(x),C_\alpha^+(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$是规范群表示空间中的 n 维矢量,是 Minkowski 空间中的标量. 它们是反对易的,但不像普通标量粒子那样服从 Bose 统计,而是像旋量粒子那样服从 Fermi 统计. 由于自旋和统计的反常关

系，因此称 C_α 和 C_α^+ 为鬼(粒子)场或虚拟场.

设将规范条件 $F^\alpha[A_\mu^\alpha]=0$ 换为

$$F^\alpha[A_\mu^\alpha] \rightarrow F'^\alpha[A_\mu^\alpha] = F^\alpha[A_\mu^\alpha] - p^\alpha(x) = 0 \qquad (2\text{-}10\text{-}22)$$

式中：$p^\alpha(x)$是与规范变换无关的任意函数，由式(2-10-6)和类似于式(2-10-6)的计算式可知，在式(2-10-22)代换下，$\Delta_F[A_\mu^\alpha]$不变. 根据生成泛函的规范无关性，此时有

$$Z_F[J,\eta^+,\eta] = \int \mathscr{D}A_\mu^\alpha \mathscr{D}C_\alpha \mathscr{D}C_\alpha^+ \delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha] - p^\alpha(x)) \cdot$$
$$\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L} + J_\mu^\alpha A_\mu^\alpha + \eta_\alpha^+ C_\alpha + C_\alpha^+ \eta_\alpha] +$$
$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y C_\alpha^+ M_F^{\alpha\beta}(x,y) C_\beta\} \qquad (2\text{-}10\text{-}23)$$

用 $\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2\alpha_0}\int \mathrm{d}^4x[p^\alpha(x)]^2\right\}$乘以式(2-10-23)，然后对 $\mathscr{D}p^\alpha(x)$积分，则得

$$Z_F[J,\eta^+\ \eta] = \int \mathscr{D}A_\mu^\alpha \mathscr{D}C_\alpha \mathscr{D}C_\alpha^+ \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L} -$$
$$\frac{1}{2\alpha_0}(F^\alpha[A_\mu^\alpha])^2 + J_\mu^\alpha A_\alpha^\mu + \eta_\alpha^+ C_\alpha + C_\alpha^+ \eta_\alpha] +$$
$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y C_\alpha^+ M_F^{\alpha\beta}(x,y) C_\beta\} \qquad (2\text{-}10\text{-}24)$$

式中：α_0 为规范参数. 式(2-10-24)可写为

$$Z_F[J,\eta,\eta^+] = \int \mathscr{D}A_\mu^\alpha \mathscr{D}C_\alpha \mathscr{D}C_\alpha^+ \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[(\mathscr{L} + \mathscr{L}_{\text{gh}} + \mathscr{L}_{\text{fix}}) +$$
$$J_\mu^\alpha A_\alpha^\mu + \eta_\alpha^+ C_\alpha + C_\alpha^+ \eta_\alpha]\} \qquad (2\text{-}10\text{-}25)$$

式中：$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\text{gh}} + \mathscr{L}_{\text{fix}}$为描述规范场量子性质的有效 Lagrange 量；$\mathscr{L}$为规范场的原有规范不变 Lagrange 量；$\mathscr{L}_{\text{gh}}$为鬼场项(或规范补偿项)；$\mathscr{L}_{\text{fix}}$为规范固定项，且

$$\mathscr{L}_{\text{gh}} = \int \mathrm{d}^4y C_\alpha^+ M_F^{\alpha\beta}(x,y) C_\beta(y) \qquad (2\text{-}10\text{-}26)$$

$$\mathscr{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\alpha_0}\int \mathrm{d}^4x (f^\alpha[A_\mu^\alpha])^2 \qquad (2\text{-}10\text{-}27)$$

对于 SU(2)规范场，规范条件设取为$\partial^\mu A_\mu^\alpha = 0$，不难求出

$$M_{\text{L}}^{\alpha\beta}(x,y) = \delta^{\alpha\beta}\partial_x^2 \delta^4(x-y) - g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma(y) \partial_{x_\mu} \delta^4(x-y) \qquad (2\text{-}10\text{-}28)$$

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}[\partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu(x) - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu(x) + g\boldsymbol{A}_\mu(x) \times \boldsymbol{A}_\nu(x)]^2 \qquad (2\text{-}10\text{-}29)$$

$$\mathscr{L}_{\text{gh}} = \boldsymbol{C}^+(x) \cdot \partial^2 C(x) - g\partial_\mu \boldsymbol{C}^+(x) \cdot \boldsymbol{A}_\mu(x) \times \boldsymbol{C}(x) \qquad (2\text{-}10\text{-}30)$$

$$\mathscr{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^\mu \boldsymbol{A}_\mu)^2 \qquad (2\text{-}10\text{-}31)$$

式(2-10-29)和式(2-10-30)中，矢量积和标量积在同位旋空间中施行. 对于

U(1)规范场,规范变换为

$$A_\mu(x)\to A_\mu^\omega(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{g}\partial_\mu\varepsilon(x) \tag{2-10-32}$$

取 Lorentz 规范,$\partial^\mu A_\mu=0$,则

$$\partial^\mu A_\mu^\omega=\partial^\mu\left(A_\mu-\frac{1}{g}\partial_\mu\varepsilon\right)=-\frac{1}{g}\partial^2\varepsilon \tag{2-10-33}$$

因此

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}(x,y)=-\frac{1}{g}\partial^2\delta^4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-10-34}$$

这个 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}$ 不包含规范场,可以从生成泛函中略去,所以在 U(1)规范场中无须引入鬼场.

综上所述,由于非 Abel 规范场(杨-Mills 场)的 Lagrange 量是奇异的(具有定域规范不变性),该系统是约束 Hamilton 系统,在作非 Abel 规范场的路径积分量子化时,应考虑系统在相空间所含的约束,或者像FP直观方法那样考虑系统的规范不变性,量子化后的有效 Lagrange 量中,必须在原有 Lagrange 量中添加一个规范固定项(来源于规范条件)和一个鬼粒子项或规范补偿项(来源于行列式因子 M_F). 鬼粒子只出现在 Feynman 图的内线,引入鬼粒子保证了 S-矩阵的幺正性. 对非 Abel 规范场路径积分量子化后得到的有效 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$,由于其中添加了规范固定项和规范补偿项,$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$不再具有规范不变性,但是它具有一种 BRS 不变性,而由这个不变性导出的 Ward-Takahashi 恒等式是规范理论可重整化的依据.

FP 量子化是用位形空间中的 Lagrange 量表述的,给出的是位形空间的生成泛函. 下面讨论约束系统在相空间中的路径积分量子化.

2-11 仅含第一类约束系统的 Faddeev 量子化

下面讨论约束 Hamilton 系统的路径积分量子化. 前面所讨论的算符形式正则量子化方法,虽然在处理某些问题时是成功的,但是这种方法仍存在某些不便. 首先,在 Dirac 括号$\{F,G\}_{\mathrm{D}}$过渡到量子括号$-\mathrm{i}[F,G]$时,存在算符排列的次序问题;其次,当正则变量的 Dirac 括号并不简单地等于 δ-函数或 Kronecker记号时,特别是当正则变量的 Dirac 括号的结果仍与正则变量有关(如杨-Mills 场)时,算符形式正则量子化的处理将是十分困难的. 因此,算符形式的正则量子化方法并不是约束Hamilton系统量子化的最佳方案. 路径积分提供了一个较理想的框架去处理这样的约束系统,用这个方法很容易讨论理论与规范选择无关,且较方便地导出了 Feynman 规则和 Ward 恒等式

等．约束 Hamilton 系统的路径积分量子化首先是 Faddeev 给出的[2]，但他只研究了系统仅含第一类约束的情形，Senjanovic 将其推广到含第二类约束的系统[3]，Fradkin 等人讨论了更一般的情形[4-5]．

为了清楚起见，讨论有限自由度 C-数系统，推广到场论是直接的．假设系统所含的约束 $\Lambda_a \approx 0\,(a=1,2,\cdots,m)$ 均为第一类约束，系统的正则 Hamilton量 H_c 也是第一类的，即

$$\{H_c,\Lambda_a\} = k_{ab}\Lambda_b \quad (a=1,2,\cdots,m) \tag{2-11-1}$$

$$\{\Lambda_a,\Lambda_b\} = k_{ab}^c\Lambda_c \quad (a,b=1,2,\cdots,m) \tag{2-11-2}$$

式中系数 k_{ab} 和 k_{ab}^c 可依赖于广义坐标 $q=(q^1,\cdots,q^n)$ 和正则动量 $p=(p_1,\cdots,p_n)$．设正则变量 p 和 q 所张成的相空间记为 Γ^{2n}，此时扩展 Hamilton 量 $H_E = H_c + \lambda^a\Lambda_a(p,q)$ 所决定的系统随时间的演化等价于 $n-m$ 个自由度系统的寻常 Hamilton 量 H^* 在相空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 中随时间的演化．这个 $n-m$ 个自由度系统的相空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 可按下述方式构造．由于系统含 m 个第一类约束，需选取 m 个规范条件，即

$$\Omega^a(q,p) = 0 \quad (a=1,2,\cdots,m) \tag{2-11-3}$$

使它们在约束超曲面 $\Lambda_a=0$ 和 $\Omega^a=0$ 上，满足条件

$$\det|\{\Lambda_a,\Omega^b\}| \neq 0 \tag{2-11-4}$$

$$\{\Omega^a,\Omega^b\} = 0 \tag{2-11-5}$$

对于具有局域变换不变性的系统，附加条件式(2-11-5)的限制不是必要的．相空间 Γ^{2n} 中，由

$$\Lambda_a(q,p)=0, \quad \Omega^a(q,p)=0 \quad (a=1,2,\cdots,m) \tag{2-11-6}$$

所决定的子空间就是 $\Gamma^{*2(n-m)}$．$\Gamma^{*2(n-m)}$ 中的正则变量 q^* 和 p^* 可以通过 (q,p) 至 (q^*,p^*) 的正则变换得到．选取相空间 Γ^{2n} 中的广义坐标

$$q = (\Omega^a, q^*) = (\Omega^1,\cdots,\Omega^m; q^{*1},\cdots,q^{*(n-m)}) \tag{2-11-7}$$

对应的广义动量记为

$$p = (p^a, p^*) = (p_1,\cdots,p_m; p_1^*,\cdots,p_{n-m}^*) \tag{2-11-8}$$

用这些变量时，由式(2-11-4)有

$$\det|\{\Lambda_a,\Omega^b\}| = \det\left|\frac{\partial\Lambda_a}{\partial p_b}\right| \neq 0 \tag{2-11-9}$$

因此，从约束方程

$$\Lambda_a(q,p) = 0 \tag{2-11-10}$$

可解出 p_a，这样子空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 可由

$$\Omega^a \equiv q^a = 0, \quad p_a = p_a(q^*,p^*) \quad (a=1,2,\cdots,m) \tag{2-11-11}$$

方程确定且 q^* 和 p^* 是正则变量. 此系统的 Hamilton 量

$$H^*(q^*, p^*) = H_c(q, p)\,|_{\Lambda=0,\Omega=0} \tag{2-11-12}$$

系统的运动在相空间 Γ 和 Γ^* 中是等价的.

正则变量 (q^*, p^*) 是相空间中 $2(n-m)$ 个真正的独立变量. 附加的规范条件的选取等价于子空间 $\Gamma^{*2(n-m)}$ 中的正则变换, 因而对物理结果没有影响. 系统的量子化用独立变量 q^* 和 p^* 表达时, 其量子跃迁幅(转换矩阵元)

$$Z_0 = Z[0] = \lim_{j\to\infty} \int \prod_j \mathrm{d}q^{*j} \frac{\mathrm{d}p_j^*}{2\pi} \cdot$$

$$\exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}t [p_i^* \dot{q}^{*i} - H_c(q^*, p^*)] \right\} \tag{2-11-13}$$

然而, 在实际问题中, 很难分离出真正的独立变量 q^* 和 p^*. 利用 δ-函数的性质[7]

$$\delta(\Lambda_a) = \int \frac{\mathrm{d}\lambda^a}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\lambda^a \Lambda_a) \tag{2-11-14}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \delta(x_i) = \left[\det \left| \frac{\partial(x)}{\partial(v)} \right| \right]^{-1} \prod_{i=1}^{n} \delta(v_i) \tag{2-11-15}$$

以及正则变换下相空间体积不变, 可将式(2-11-13)化为用非独立坐标表达的路径积分, 即

$$Z_0 = Z[0] = \lim_{j\to\infty} \int \prod_j \mathrm{d}q^j \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi} \prod_a^m \delta(\Lambda_a)\, \delta(\Omega^a) \det |\{\Lambda, \Omega\}| \cdot$$

$$\exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}t [p_i \dot{q}^i - H_c(q, p)] \right\} =$$

$$\int \mathscr{D}q\, \mathscr{D}p \prod_a^m \delta(\Lambda_a)\, \delta(\Omega^a) \det |\{\Lambda, \Omega\}| \cdot$$

$$\exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}t [p_i \dot{q}^i - H_c(q, p)] \right\} \tag{2-11-16}$$

事实上, 由于

$$\int \prod_{j,a} \mathrm{d}q^j \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\lambda^a}{2\pi} \prod_a \delta(\Omega^a) \det |\{\Lambda, \Omega\}| \cdot$$

$$\exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}t [p_i \dot{q}^i - H_c(q, p) - \lambda^a \Lambda_a(q, p)] \right\} =$$

$$\int \prod_j \mathrm{d}q^j \frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi} \prod_a \delta(\Lambda_a) \delta(\Omega^a) \det |\{\Lambda, \Omega\}| \cdot$$

$$\exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}t [p_i \dot{q}^i - H_c(q, p)] \right\} \tag{2-11-17}$$

用变量 q^a, p_a, q^*, p^* 表示，由式(2-11-11)、式(2-11-15)，因子

$$\prod \delta(\Lambda_a)\delta(\Omega^a)\det|\{\Lambda_a,\Omega^a\}| \tag{2-11-18}$$

可写为

$$\prod \delta(\Lambda_a)\delta(q^a)\det\left|\frac{\partial(\Lambda_a)}{\partial(p_b)}\right| = \prod \delta(q^a)\delta[p_a - p_a(q^*,p^*)] \tag{2-11-19}$$

将式(2-11-19)代入式(2-11-17)，并对 q^a 和 p_a 积分，于是式(2-11-16)就化为式(2-11-13). 在式(2-11-16)中对 q^i 补上外源 J_i 就得到相空间 Green 函数的生成泛函，即

$$Z[J] = \int \mathscr{D}q\,\mathscr{D}p\prod_a^m \delta(\Lambda_a)\,\delta(\Omega^a)\,\det|\{\Lambda,\Omega\}|\cdot \exp\left\{i\int dt[p_i\dot{q}^i - H_c(q,p) + J_iq^i]\right\} \tag{2-11-20}$$

上面论述的 FP 量子化和约束 Hamilton 系统的 Faddeev 量子化，都涉及选取规范条件. 那么，在规范条件下，规范势是否完全固定？对杨-Mills 场，取定规范条件后，还不能完全固定规范势，这种情况通常称为 Gribov 不定性. Abel规范场不存在 Gridov 不定性. 在微扰论中 Gribov 不定性对其不产生影响[7].

2-12 同时含第一类约束和第二类约束系统的量子化

含第二类约束系统的路径积分量子化是由 Senjanovic 给出的[3]，这里只做简要叙述. 下面简称为 FS 量子化. 现讨论有限自由度 C-数系统，并设系统所含的第一类约束为

$$\Lambda_a(q,p) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,m) \tag{2-12-1}$$

第二类约束为

$$\theta_i(q,p) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,2k) \tag{2-12-2}$$

由 $q=[q^1,q^2,\cdots,q^n]$ 和 $p=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$ 张成的 $2n$ 维相空间记为 Γ，式(2-12-1)、式(2-12-2)决定的 Γ 中的子空间记为 M. 假设 Λ_a 和 θ_i 彼此独立，并且是不可约的，也就是说，M 中任一为 0 的函数 g 均可表示为约束的线性组合，即

$$g = A_a(q,p)\Lambda_a(q,p) + B_i(q,p)\theta_i(q,p) \tag{2-12-3}$$

Λ_a 为第一类约束，有

$$\{\Lambda_a,\Lambda_b\}|_M = 0,\quad \{\Lambda_a,\theta_i\}|_M = 0 \tag{2-12-4}$$

θ_i 为第二类约束，于是

$$(\det|\{\theta_i,\theta_j\}|)|_M \neq 0 \tag{2-12-5}$$

按不可约假设

$$\{\Lambda_a,\Lambda_b\} = A^c_{ab}\Lambda_c + B^i_{ab}\theta_i \tag{2-12-6}$$

$$\{\Lambda_a,\theta_i\} = C^b_{ai}\Lambda_b + D^j_{ai}\theta_j \tag{2-12-7}$$

根据 Λ_a, Λ_b 和 θ_i 的 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式，由式(2-12-5)～式(2-12-7)可知

$$B^i_{ab}|_M = 0 \tag{2-12-8}$$

在 Hamilton 量中，与第一类约束相应的 Lagrange 乘子是任意的．可观测量 f 随时间的演化(运动方程)应该没有这种任意性，此时要求

$$\{f,\Lambda_a\}|_M = 0 \tag{2-12-9}$$

或

$$\{f,\Lambda_a\} = A^b_a\Lambda_b + B^i_a\theta_i \tag{2-12-10}$$

式(2-12-9)可视为 M 上的 m 个微分方程组，式(2-12-6)、式(2-12-7)作为可积条件．这样 f 由它在子流形上的初值条件唯一确定．子流形的维数为

$$(2n-m-2k)-m = 2(n-m-k)$$

取子流形为约束方程

$$\Omega_a(q,p) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,m) \tag{2-12-11}$$

所决定的超曲面 Γ^* ($\Gamma^* \subset M$)，并称式(2-12-11)为规范条件．规范条件仅与第一类约束相联系，其规范条件应满足

$$\det|\{\Lambda_a,\Omega_b\}| \neq 0 \tag{2-12-12}$$

现在先列出该系统路径积分量子化的结果．设动力系统含 m 个第一类约束为 Λ_a，含 $2k$ 个第二类约束为 θ_i，相应于第一类约束的规范条件为 Ω_a. 那么，系统的量子跃迁幅

$$Z[0] = \int \mathscr{D}q^i\,\mathscr{D}p_i \prod_{a=1}^{m}\delta(\Lambda_a)\delta(\Omega_a)\prod_{i=1}^{2k}\delta(\theta_i)\,\det|\{\Lambda_a,\Omega_b\}|\cdot$$

$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t\,(p_i\dot{q}^i - H_c)\right\} \tag{2-12-13}$$

下面来证明此结果和用独立变量表达的量子跃迁幅是一致的．

将约束 $\Lambda_a \approx 0$ 和 $\theta_i \approx 0$ 所决定的约束超曲面 M 做无穷小膨胀，变为 M_ε($M_\varepsilon \supset M$，ε 为无穷小参数)，那么在区域 M_ε 中存在函数 λ_{ab}和 μ_{ab}，使得

$$\theta'_a = \lambda_{ai}\theta_i + \mu_{ab}\Lambda_b \tag{2-12-14}$$

在 M_ε 中适合[3]

$$\{\theta'_i,\theta'_j\} = (\mathbf{H}')_{ij} + O(\varepsilon^2) \tag{2-12-15}$$

$$\{\theta'_i,\Omega_a\} = O(\varepsilon^2) \tag{2-12-16}$$

式中

$$\textcircled{H}' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & 1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ \hline & & -1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ -1 & & & & & \\ -1 & & & & & \end{array}\right] \tag{2-12-17}$$

并有关系式[3]

$$\prod_a \delta(\Lambda_a) \prod_i \delta(\theta'_i) = [\det|\{\theta_i, \theta_j\}|]^{1/2} \prod_j \delta(\theta_j) \prod_a \delta(\Lambda_a) \tag{2-12-18}$$

将式(2-12-18)代入式(2-12-13)，得

$$Z[0] = \int \mathscr{D}q^i \mathscr{D}p_i \prod_{a=1}^{m} \delta(\Lambda_a)\delta(\Omega_a) \prod_{i=1}^{2k} \delta(\theta'_i) \det|\{\Lambda_a, \Omega_b\}| \cdot \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}t(p_i\dot{q}^i - H_c)\right] \tag{2-12-19}$$

考虑到式(2-12-15)、式(2-12-16)在 M_t 中可施行一正则变换，也就是说，新变量取为 $P_a = \Omega_a (a=1,2,\cdots,m)$，$Q^a$ 为其正则共轭坐标；$Q^{m+b} = \theta'_b$，$P_{m+b} = \theta'_{2k-b+1} (b=1,2,\cdots,k)$；其他剩余的 $2(n-m-k)$ 个独立变量可记为 $\overline{P}_i$ 和 $\overline{Q}^i$. 正则变换保持测度不变，这时 $\det|\{\Lambda_a, \Omega_b\}|$ 可用新变量表示为

$$\det|\{\Lambda_a, \Omega_b\}| = \det|\{\Lambda_a, P_b\}| = \det\left|\frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q^b}\right| \neq 0 \tag{2-12-20}$$

将式(2-12-20)代入式(2-12-19)，并对 P_a，P_{m+b} 和 Q^{m+b} 作出平凡的积分，得

$$Z[0] = \int \mathscr{D}Q^a \mathscr{D}\overline{Q}^i \mathscr{D}\overline{P}_i \prod_a \delta(\Lambda_a) \det\left|\frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q^b}\right| \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t(\overline{P}_i \dot{\overline{Q}}^i - \overline{H}_c)\right\} \tag{2-12-21}$$

式中

$$\overline{H}_c = H_c(\overline{P}_i, \overline{Q}^i, P_a = 0, Q^a, Q_{m+b} = 0, P_{m+a} = 0) \tag{2-12-22}$$

根据式(2-12-20)，从第一类约束方程

$$\Lambda_a(\overline{P}_i,\overline{Q}^i,Q^{a^*},P_a=0,Q^{m+b}=0,P_{m+b}=0)=0 \quad (2\text{-}12\text{-}23)$$

可解出 $Q^{a^*}(\overline{P}_i,\overline{Q}^i)$. 由于

$$\prod_a \delta(\Lambda_a)\det|\partial\Lambda_a/\partial Q^b|=\prod_a \delta(Q^a-Q^{a^*}(\overline{P}_i,\overline{Q}^i)) \quad (2\text{-}12\text{-}24)$$

将式(2-12-24)代人式(2-12-21),然后对 Q^a 做积分,就得到系统的量子跃迁幅,即

$$Z[0]=\int \mathscr{D}\overline{Q}^i\mathscr{D}\overline{P}_i\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t(\overline{P}_i\dot{\overline{Q}}^i-\overline{H}_c)\right\} \quad (2\text{-}12\text{-}25)$$

式中

$$\overline{H}_c=H_c|_{Q^a=Q^{a^*}(\overline{P}_i,\overline{Q}^i)} \quad (2\text{-}12\text{-}26)$$

式(2-12-25)就是对独立变量做路径积分给出的量子跃迁幅,它与式(2-12-13)是完全等价的. 在式(2-12-13)中对 q^i 引人外源 J_i,于是对同时含第一类约束和第二类约束系统的相空间 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}q^i\mathscr{D}p_i\prod_{a=1}^{m}\delta(\Lambda_a)\delta(\Omega_a)\prod_{i=1}^{2k}\delta(\theta_i)\det|\{\Lambda_a,\Omega_b\}|\cdot$$
$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t(p_i\dot{q}^i-H_c+J_iq^i)\right\}$$

(2-12-27)

2-13 杨-Mills 场的路径积分量子化

无论是含第一类约束的系统还是含第二类约束的系统,上面讨论的约束系统的路径积分量子化形式都是在相空间中给出的. 与正规 Lagrange 系统相似,当对 π 的积分可积出时,约束系统的路径积分也可在位形空间中讨论. 本节讨论非 Abel 规范场,并以纯杨-Mills 场为例给出路径积分量子化的具体形式.

杨-Mills 场的 Lagrange 量密度(见 1-1)

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F_{a}^{\mu\nu} \quad (2\text{-}13\text{-}1)$$

式中

$$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+gf_{\beta\gamma}^{a}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \quad (2\text{-}13\text{-}2)$$

与杨-Mills 势 A_μ^a 相应的正则动量

$$\pi_a^{\mu} = -F_a^{0\mu} \tag{2-13-3}$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a + \frac{1}{4}F_{ij}^aF_{ij}^a - A_0^a(\partial_i\pi_i^a - gf_{\beta\gamma}^a A_i^\beta\pi_i^\gamma) \tag{2-13-4}$$

初级约束和次级约束分别为

$$\Lambda_1^a = \pi_a^0 \approx 0 \tag{2-13-5}$$

$$\Lambda_2^a = \partial_i\pi_i^a - gf_{\beta\gamma}^a A_i^\beta\pi_\gamma^i \approx 0 \tag{2-13-6}$$

Λ_1^a 和 Λ_2^a 均为第一类约束．规范约束(条件)取为

$$\Omega_1^a = \partial^i\pi_i^a + \partial^i\partial_iA_0^a - gf_{\beta\gamma}^a A_i^\beta\partial^iA_0^\gamma \approx 0 \tag{2-13-7}$$

$$\Omega_2^a = \partial^iA_i^a \approx 0 \tag{2-13-8}$$

Ω_1^a 由 Ω_2^a 的时间稳定性而来，其中 $\Omega_1^a \approx 0$ 又可写为

$$\Omega_1^a = A_0^a - G^a \approx 0 \tag{2-13-9}$$

式中

$$G^a = -\int d^3y\, G^{a\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{A})\partial_i\pi_\beta^i \tag{2-13-10}$$

而 $G^{a\beta}$ 为算符 $M_{a\beta}$ 的 Green 函数．

$$M_{a\beta}(x)G^{\beta\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{A}) = \delta_a^\gamma\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-13-11}$$

$$M_{a\gamma} = \delta_{a\gamma}\partial_k\partial^k - gf_{\beta\gamma}^a A_k^\beta\partial^k \tag{2-13-12}$$

下面先计算行列式 $\det|\{\Omega,\Lambda\}|$．显然，

$$\{\Omega_1^a(x),\Lambda_1^\beta(y)\} = \delta^{a\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-13-13a}$$

$$\{\Omega_1^a(x),\Lambda_2^\beta(y)\} = -\{G^a(x),\Lambda_2^\beta(y)\} \tag{2-13-13b}$$

$$\{\Omega_2^a(x),\Lambda_1^\beta(y)\} = 0 \tag{2-13-13c}$$

$$\{\Omega_2^a(x),\Lambda_2^\beta(y)\} = -M^{a\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2-13-13d}$$

因此

$$\det|\{\Omega_i^a,\Lambda_j^\beta\}| = \det|M^{a\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})| = \det \boldsymbol{M}_C \tag{2-13-14}$$

式中已省去了无关紧要的常数，因为在路径积分中仅仅对应于归一化因子．由式(2-11-20)，有

$$\begin{aligned} Z[0] = &\int\prod_{\mu,a,x} dA_\mu^a d\pi_a^\mu \delta(\Lambda_1^a)\delta(\Lambda_2^a)\delta(\Omega_1^a)\delta(\Omega_2^a)\cdot \\ &\det|\{\Lambda,\Omega\}|\exp\left\{i\int d^4x(\pi_a^\mu\dot{A}_\mu^a - \mathscr{H}_c)\right\} = \\ &\int\prod_{\mu,a,x} dA_\mu^a d\pi_a^\mu \det \boldsymbol{M}_C\delta(\pi_a^0)\delta(\Lambda_2^a)\delta(A_0^a - G^a)\cdot \\ &\delta(\partial_iA_i^a)\exp\left\{i\int d^4x(\pi_a^\mu\dot{A}_\mu^a - \mathscr{H}_c)\right\} \end{aligned} \tag{2-13-15}$$

作出 A_0^a 和 π_a^0 的积分，利用关系式

$$\prod_a \delta(\Lambda_2^a) = \int \mathscr{D}\lambda_a \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \lambda_a \Lambda_2^a\right\} \tag{2-13-16}$$

可将式(2-13-15)写为

$$Z[0] = \int \prod_x \det \boldsymbol{M}_\mathrm{C} \prod_{i,a} \delta(\partial_i A_i^a) \mathrm{d}A_i^a \mathrm{d}\pi_i^a \mathrm{d}\lambda_a \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\pi_a^i \dot{A}_i^a - \mathscr{H}'_\mathrm{c})\right\} \tag{2-13-17}$$

式中

$$\mathscr{H}'_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\pi_i^a \pi_i^a + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a - (G_a + \lambda_a)\Lambda_2^a \tag{2-13-18}$$

引入新的积分变量，并记为 $A_0^a = G^a + \lambda^a$. 由于积分的平移不变性，式(2-13-17)又可写为

$$Z[0] = \int \prod_x \det \boldsymbol{M}_\mathrm{C} \prod_{i,a} \delta(\partial_i A_i^a) \mathrm{d}\pi_i^a \prod_\mu \mathrm{d}A_\mu \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\pi_a^i \dot{A}_i^a - \mathscr{H}_\mathrm{c})\right\} \tag{2-13-19}$$

其中 $\mathscr{H}_\mathrm{c}$ 由式(2-13-4)给出，它包含 Λ_2^a 的项，经分部积分后，有

$$\int \mathrm{d}^4 x A_0^a \Lambda_2^a = -\int \mathrm{d}^4 x \pi_i^a(\partial_i A_0^a + g f_{\beta\gamma}^a A_0^\beta A_i^\gamma) \tag{2-13-20}$$

这时式(2-13-19)被积函数的指数中含动量 π_i^a 的平方项，即

$$\pi_i^a \dot{A}_i^a - \mathscr{H}_\mathrm{c} = -\frac{1}{2}\pi_i^a \pi_i^a + \pi_i^a F_{0i}^a - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a \tag{2-13-21}$$

式中

$$F_{0i}^a = \dot{A}_i^a - \partial_i A_0^a - g f_{\beta\gamma}^a A_0^\beta A_i^\gamma \tag{2-13-22}$$

将式(2-13-21)代入式(2-13-19)，对 π_i^a 积分后，得

$$Z[0] = \int \prod_x \det \boldsymbol{M}_\mathrm{C} \prod_a \delta(\partial_i A_i^a) \prod_\mu \mathrm{d}A_\mu^a \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\left[-\frac{1}{2}F_{0i}^a F_{0i}^a + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a\right]\right\} = \int \prod_{x,a,\mu} \det \boldsymbol{M}_\mathrm{C} \delta(\partial_i A_i^a) \mathrm{d}A_\mu^a \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}\right\} \tag{2-13-23}$$

式中 $\mathscr{L}$ 由式(2-13-1)给出. Faddeev-Popov 用直观的办法导出了式(2-13-23)，其中因子

$$\det \boldsymbol{M}_\mathrm{C} \prod_a \delta(\partial_i A_i^a) \tag{2-13-24}$$

可以用表达式

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}} \prod_{a} \delta(\partial^{\mu} A_{\mu}^{a}) \tag{2-13-25}$$

代替．式中 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=[M_{\mathrm{L}}^{\alpha\beta}]$，其中

$$M_{\mathrm{L}}^{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial_{\mu} + g f_{\beta\gamma}^{\alpha} A_{\mu}^{\gamma}\partial^{\mu})\delta^{4}(x-y) \tag{2-13-26}$$

根据 Grassmann 变量$\overline{C}_a(x)$和 $C_b(y)$的积分性质，有

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}} = \int \mathscr{D}\overline{C}_a(x)\mathscr{D}C_b(y)\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\overline{C}_a(x)M_{\mathrm{L}}^{ab}C_b(y)\right\} \tag{2-13-27}$$

式中：$\overline{C}_a(x)$和 $C_b(y)(a,b=1,2,\cdots,n)$为 FP 鬼场，它们既是规范群表示空间中的 n 维矢量，又是 Minkowski 空间中的标量．它们是反对易的，不像普通标量粒子那样服从 Bose 统计，而像旋量粒子那样服从 Fermi 统计．由于自旋和统计的反常关系，因此称$\overline{C}_a$ 和 C_b 为鬼(粒子)场或虚拟场．

将规范条件改为

$$\partial^{\mu}A_{\mu}^{a} = p^{a}(x) \tag{2-13-28}$$

式中：$p^a(x)$是与规范无关的函数(由于 $Z[0]$的规范无关性)．用因子

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\alpha_0}\int \mathrm{d}^4x[p^a(x)]^2\right\} \tag{2-13-29}$$

乘 $Z[0]$的表达式，然后对 $p^a(x)$做路径积分，得与 2-10 中相同的结果：

$$Z[0] = \int \mathscr{D}A_{\mu}^{a}\mathscr{D}\overline{C}_a\mathscr{D}C_a\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\right\} \tag{2-13-30}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\mathrm{fix}} + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{2-13-31}$$

$\mathscr{L}$为原始 Lagrange 量，而

$$\mathscr{L}_{\mathrm{fix}} = -\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^{\mu}A_{\mu}^{a})^2 \tag{2-13-32}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} = -\partial_{\mu}\overline{C}_a\mathrm{D}_b^{\mu a}C^b \quad (\mathrm{D}_b^{\mu a} = \delta_b^a\partial^{\mu} + f_{bc}^{a}A_c^{\ \mu}) \tag{2-13-33}$$

这里是从约束 Hamilton 系统的路径积分量子化严格导出的结果，而 Faddeev 和 Popov 是用直观的方法得到的．

2-14 BFV 路径积分量子化

在前面讨论约束 Hamilton 系统的量子化中(Dirac 方法或 FS 方法等)，规范条件中仅含正则变量(正则规范)．通常不能满足相对论协变性要求，例如 Lorentz 规范就不是正则规范，因为它不仅含正则变量，而且还含 Lagrange

乘子 A^0 的时间微商．Batalin、Fradkin 和 Vilkovsky 基于 BRST(或 BRS)对称，给出了一种相对论协变性量子化方案[4-5]，简称为 BFV 量子化(包括算符形式和路径积分形式量子化)．这里扼要说明 BFV 路径积分量子化方法．

设描述动力学系统的正则变量记为 $Z_A(A=1,2,\cdots,n)$，且 $Z_A=(q^A,p_A)$，Z_A 中可含 Grassmann 变量，并设系统仅含第一类约束．其约束函数为 $\phi_\alpha(Z_A)(\alpha=1,2,\cdots,m)$，且系统的正则 Hamilton 量 H_c 也是第一类约束，则有

$$\{\phi_\alpha,\phi_\beta\}=C_{\alpha\beta}^{\gamma}\phi_\gamma \tag{2-14-1}$$

$$\{H_c,\phi_\alpha\}=V_\alpha^\beta\phi_\beta \tag{2-14-2}$$

函数 F 和 G 的 Poisson 括号为

$$\{F,G\}=\frac{\partial_r F}{\partial Z_A}C_{AB}\frac{\partial_l G}{\partial Z_B} \tag{2-14-3}$$

式中：∂_r 和 ∂_l 分别代表右微商和左微商；$C_{AB}=\{Z_A,Z_B\}$．将式(2-14-3)用 q^A 和 p_A 写出，则有

$$\{F,G\}=\frac{\partial_r F}{\partial q^A}\frac{\partial_l G}{\partial p_A}-(-1)^{n_F n_G}\frac{\partial_r G}{\partial q^A}\frac{\partial_l F}{\partial p_A} \tag{2-14-4}$$

式中：n_F 和 n_G 分别为 F 和 G 的 Grassmann 宇称．Poisson 括号有下述性质：

$$\{A,B\}=-(-1)^{n_A n_B}\{B,A\} \tag{2-14-5}$$

$$\{A,B+C\}=\{A,B\}+\{A,C\} \tag{2-14-6}$$

$$\{A,BC\}=\{A,B\}C+(-1)^{n_A n_B}B\{A,C\} \tag{2-14-7}$$

$$\{A,\{B,C\}\}+(-1)^{n_A(n_B+n_C)}\{\{B,C\},A\}+(-1)^{n_C(n_A+n_B)}\{\{C,A\},B\}=0 \tag{2-14-8}$$

与扩展 Hamilton 量 $H_E=H_c+\lambda^\alpha\phi_\alpha$ 相应的正则作用量

$$I_E[z,\lambda]=\int\left\{-\frac{1}{2}(C^{-1})^{AB}\dot{z}_A z_B-H_c-\lambda^\alpha\phi_\alpha\right\}\mathrm{d}t \tag{2-14-9}$$

在

$$\left.\begin{aligned}\delta z&=\{z,\varepsilon^\alpha\phi_\alpha\}=(-1)^{n_\alpha n_z}\varepsilon^\alpha\{z,\phi_\alpha\}\\ \delta\lambda^\alpha&=\dot{\varepsilon}^\alpha+\lambda^\gamma\varepsilon^\beta C_{\beta\gamma}^{\alpha}-\varepsilon^\beta V_\beta^\alpha\end{aligned}\right\} \tag{2-14-10}$$

变换下不变．将 Lagrange 乘子 λ^α 视为动力学变量，相应的正则动量记为 π_α，这样相空间变量为 $z_\Delta(z_A,\lambda^\alpha,\pi_\alpha)$．与 Lagrange 乘子 λ^α 相应的动量 π_α 适合

$$\pi_\alpha=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,m) \tag{2-14-11}$$

式(2-14-11)表明，在变量 z_Δ 的相空间增添了 m 个约束．将所有 $2m$ 个约束都记为$G_a=(\phi_\alpha,\pi_\alpha)(a=1,2,\cdots,2m)$，因为 ϕ_α 与 λ^β 无关，故它们满足下列关系

$$\{G_a,G_b\}=C_{ab}^{c}G_c \tag{2-14-12}$$

$$\{H_c,G_a\}=V_a^bG_b \tag{2-14-13}$$

并称 $\overset{(0)}{U}_a = G_a$ 为零阶结构函数．做零阶结构函数的 Poisson 括号，由于约束是第一类的，则有

$$\{\overset{(0)}{U}_a, \overset{(0)}{U}_b\} = -2\overset{(1)}{U}{}^c_{ab}\overset{(0)}{U}_c \tag{2-14-14}$$

可得一阶结构函数 $\overset{(1)}{U}{}^c_{ab}$．当 $\overset{(1)}{U}{}^c_{ab}$ 为常数时(如杨-Mills 理论)，其规范群具有闭合代数；当 $\overset{(1)}{U}{}^c_{ab}$ 依赖于正则变量时，其规范代数为开代数．由 Poisson 括号的 Jacobi 恒等式(2-14-8)可得二阶结构函数 $\overset{(2)}{U}{}^{mn}_{abc}$．重复上述步骤可得高阶结构函数．因为约束的线性组合，给出另一级约束，即

$$\overset{(0)}{U}{}'_a(q,p) = \omega_a^b \overset{(0)}{U}_b(q,p), \quad \det|\omega_a^b| \neq 0 \tag{2-14-15}$$

选取新函数 $\overset{(0)}{U}{}'_a(q,p)$ 为零阶结构函数，相当于差一规范变换．这样零阶结构函数具有不确定性，同样一阶和高阶结构函数都具有不确定性．

在相空间 $z_\Delta(z_A,\lambda^a,\pi_a)$ 中，对每一个约束 G_a 引入反对易鬼场 η^a 和它的正则共轭动量 $\mathscr{P}_a$，它们遵从如下 Poisson 括号

$$\{\mathscr{P}_a, \eta^b\} = -\delta_a^b = (-1)^{n_a}\{\eta^b, \mathscr{P}_a\} \tag{2-14-16}$$

$$\{\mathscr{P}_a, z_\Delta\} = \{\eta^a, z_\Delta\} = 0 \tag{2-14-17}$$

且

$$(\eta^a)^* = \eta^a, \quad (\mathscr{P}_a)^* = -\mathscr{P}_a \tag{2-14-18}$$

坐标为$(z_\Delta,\eta^a,\mathscr{P}_a)$的超相空间(满足上述 Poisson 括号)称为扩展相空间．在扩展相空间中，定义变量的鬼数(gh)

$$\mathrm{gh}(z_\Delta) = 0, \quad \mathrm{gh}(\eta^a) = 1, \quad \mathrm{gh}(\mathscr{P}_a) = -1$$

变量积的鬼数等于它们鬼数之和，如

$$\mathrm{gh}(\eta^a\eta^b) = 2, \quad \mathrm{gh}(\eta^a\mathscr{P}_a) = 0$$

现考虑母函数

$$\Omega = \sum_{n\geqslant 0} \eta^{a_{n+1}}\cdots\eta^{a_1}\overset{(n)}{U}{}^{b_1\cdots b_n}_{a_1\cdots a_{n+1}}\mathscr{P}_{b_n}\cdots\mathscr{P}_{b_1} \tag{2-14-19}$$

它具有

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial\eta^a}\right|_{\eta=\mathscr{P}=0} = \overset{(0)}{U}_a \tag{2-14-20}$$

$$\left.\frac{\partial^3\Omega}{\partial\eta^b\,\partial\eta^a\,\partial\mathscr{P}_c}\right|_{\eta=\mathscr{P}=0} = 2\overset{(1)}{U}{}^c_{ab} \tag{2-14-21}$$

$$\cdots$$

性质．可见，对 Ω 的上述各级微商，恰好给出各级结构函数；Ω 对 η^a 的一级微商，恰好给出规范变换生成元．于是，Ω 称为 BRST 生成元，它是结构函数的母函数．根据约束 Hamilton 系统的结构函数，可构造 BRST 生成元 Ω. BRST

生成元具有下列性质：

(1)Ω 是实的，表示为

$$\Omega^* = \Omega \tag{2-14-22}$$

(2)Ω 的鬼数为 1，表示为

$$\mathrm{gh}(\Omega) = 1 \tag{2-14-23}$$

(3)Ω 是反对易的，表示为

$$n_\Omega(\Omega) = 1 \tag{2-14-24}$$

(4)Ω 是幂零的，表示为

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \tag{2-14-25}$$

由 Ω 产生的变换称为 BRST 对称变换．如果 $n>N$ 时，$\overset{(n)}{U}=0$，则称 Ω 及结构函数相应系统的秩为 N．由于结构函数的不确定性，相应的不同 BRST 生成元由扩展相空间中的正则变换所联系．对 Abel 理论，BRST 生成元为

$$\Omega = \eta^a G_a \quad (\{G_a, G_b\} = 0) \tag{2-14-26}$$

它的秩为 0；对杨-Mills 型规范理论，有

$$\Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2}\eta^b \eta^c C^a_{cb} \mathscr{P}_a \tag{2-14-27}$$

它的秩为 1．一般开代数系统是高秩的，如超引力和相对论性膜．

经典可观察量为规范不变函数 $A_0(q,p)$，它与约束的 Poisson 括号弱等于 0，即

$$\{A_0, G_a\} = w_a^b G_b \approx 0 \tag{2-14-28}$$

该式表明，A_0 在规范变换下不改变．其可观察量 $A_0(q,p)$ 的扩展量 A 是扩展相空间中的函数，并具有下列两性质：

性质 1 $\quad A\,|_{\eta=\mathscr{P}=0} = A_0(q,p) \quad$ (2-14-29)

性质 2 $\quad \mathrm{gh}(A) = 0 \quad$ (2-14-30)

将 A 展开，有

$$A = \sum_{n\geqslant 0} \eta^{b_n} \cdots \eta^{b_1} \overset{(n)}{A}{}^{a_1\cdots a_n}_{b_1\cdots b_n} \mathscr{P}_{a_n} \cdots \mathscr{P}_{a_1} \tag{2-14-31}$$

式中：$\overset{(0)}{A}=A_0$．显然，如果 $\{A,\Omega\}=0$，那么 $\{\overset{(0)}{A}, G_a\}\approx 0$．这表明 BRST 不变函数是规范不变量的扩展量；反过来，任一规范不变函数 $A_0(q,p)$，总具有一个 BRST 不变的扩展量 A，且 $\{A,\Omega\}=0$．此扩展量不是唯一的，两个扩展量 A 和 A' 之差为

$$A' = A + \{K, \Omega\} \tag{2-14-32}$$

式中：K 的鬼数为 -1．由 Jacobi 恒等式(2-14-8)和 Ω 的幂零性，可知 $\{K,\Omega\}$ 是 BRST 不变的，即 $\{\{K,\Omega\},\Omega\}=0$．扩展相空间中的任何函数 A，如果具有式

(2-14-29)、式(2-14-30)和式(2-14-32)的性质，则称 A 为 BRST 可观察量.

Hamilton 量 H_0 是物理系统的可观察量，在扩展相空间中存在相应的 BRST 不变的扩展量 H，且

$$\{H,\Omega\}=0 \tag{2-14-33}$$

此扩展量准确到

$$H\to H+\{K,\Omega\} \tag{2-14-34}$$

路径积分中选取不同规范，相当于变换式(2-14-34).

物理态由 BRST 荷来挑选，即物理态 $|\psi\rangle$ 被 BRST 荷所湮灭，有

$$\Omega\mid\psi\rangle=0 \tag{2-14-35}$$

态 $|\psi\rangle$ 和态 $|\psi\rangle+\Omega|\chi\rangle$ 是等价的.

设 (q^A,p_A) 为原有相空间 z_A 中的变量；系统所含的第一类约束为 ϕ_a；λ^a 为与 ϕ_a 相联系的 Lagrange 乘子；π_a 为 λ^a 的正则共轭动量. 在相空间 (z_A,λ^a,π_a) 中，相应于每一个约束 $G_a(\phi_a,\pi_a)$ 引入鬼场 η^a 及其正则共轭动量 $\mathscr{P}_a$. 在扩展相空间中，路径积分(场量满足一定的边界条件)

$$Z[0]_\psi=\int\mathscr{D}q^A\,\mathscr{D}p_A\,\mathscr{D}\lambda^a\,\mathscr{D}\pi_a\,\mathscr{D}\eta^a\,\mathscr{D}\mathscr{P}_a\,\exp\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}\} \tag{2-14-36}$$

与 ψ 无关. ψ 是 z_A,λ^a,η^a 和它们正则共轭动量的任意函数，而

$$I_{\mathrm{eff}}=\int_{t_1}^{t_2}(\dot{q}^Ap_A+\dot{\lambda}^a\pi_a+\dot{\eta}^a\mathscr{P}_a-H_{\mathrm{eff}})\mathrm{d}t \tag{2-14-37}$$

$$H_{\mathrm{eff}}=H-\{\psi,\Omega\} \tag{2-14-38}$$

式中：I_{eff} 称为有效作用量；H_{eff} 称为有效 Hamilton 量；ψ 称为规范固定 Fermi 子. 此结果在文献[4-5]中有详细证明. 这里扼要叙述证明的主要步骤.

将扩展相空间中变量记为 $Z_\Sigma(t)$. 在路径积分式(2-14-36)中考虑下列积分变量的变换，即

$$Z'_\Sigma(t)=Z_\Sigma(t)+\{Z_\Sigma,\Omega\}_t\chi \tag{2-14-39}$$

式中

$$\chi=-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t(\psi'-\psi) \tag{2-14-40}$$

而 $\psi'-\psi$ 为无穷小量，无穷小参数 χ 与时间无关. 变量变换后仍满足同样的边界条件. 边界条件和作用量均是 BRST 不变的. 今计算积分测度

$$\mathscr{D}Z_\Sigma=\mathscr{D}q^A\,\mathscr{D}p_A\,\mathscr{D}\lambda^a\,\mathscr{D}\pi_a\,\mathscr{D}\eta^a\,\mathscr{D}\mathscr{P}_a$$

的变化. 由于

$$\frac{\delta Z'_\Sigma(t)}{\delta Z_\Lambda(t')}=\delta_\Lambda^\Sigma\delta(t-t')+\frac{\partial\{Z_\Sigma,\Omega\}}{\partial Z_\Lambda}(t)\delta(t-t')\chi-\mathrm{i}\{Z_\Sigma,\Omega\}(t)\,\frac{\partial(\psi'-\psi)}{\partial Z_\Lambda}(t') \tag{2-14-41}$$

又式(2-14-39)为无穷小变换，于是超 Jacobi 行列式为

$$\det\left|\frac{\delta Z'_{\Sigma}(t)}{\delta Z_{\Lambda}(t')}\right| = 1 + \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} \tag{2-14-42}$$

式中：$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的超迹，且

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\{\Omega, \psi' - \psi\}\mathrm{d}t \tag{2-14-43}$$

因此，积分测度 $\mathscr{D}Z_{\Sigma}$ 的改变适合

$$\mathscr{D}Z'_{\Sigma} = \mathscr{D}Z_{\Sigma}\exp\left(\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\{\Omega, \psi' - \psi\}\mathrm{d}t\right) \tag{2-14-44}$$

将式(2-14-44)代入式(2-14-36)就得到路径积分与 ψ 无关，即

$$Z[0]_{\psi} = Z[0]_{\psi'} \tag{2-14-45}$$

这表明，选取不同的规范固定 Fermi 子 ψ，将得到同样的量子跃迁幅．量子规范自由度是通过 $H \to H + \{\psi, \Omega\}$ 实现的．

将鬼场分为两部分，即

$$\eta^a = (-(\mathrm{i})^{n_a+1}\mathscr{P}^a, C^a) \tag{2-14-46}$$

$$\mathscr{P}_a = ((\mathrm{i})^{n_a+1}\,\overline{C}_a, \overline{\mathscr{P}}_a) \tag{2-14-47}$$

式中：鬼场 C^a 和反鬼场 $\overline{C}_a$ 均是实的，它们分别共轭于 $\overline{\mathscr{P}}_a$ 和 $\mathscr{P}_a$. 通常将规范固定 Fermi 子取为

$$\psi = (\mathrm{i})^{n_a+1}\,\overline{C}_a\,\chi^a + \overline{\mathscr{P}}_a\lambda^a \tag{2-14-48}$$

式中：χ^a 不含鬼场和它们的正则共轭动量．下面用 BFV 方法给出纯杨-Mills 场的路径积分量子化．

纯杨-Mills 场的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \tag{2-14-49}$$

式中

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{2-14-50}$$

式中：f^a_{bc} 为规范群的结构常数．杨-Mills 势 A^a_μ 相应的正则动量

$$\pi^\mu_a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^a_\mu} = -F^{0\mu}_a \tag{2-14-51}$$

正则作用量

$$I^{\mathrm{P}}[A^a_k, \pi^k_a, \lambda^a] = \int\mathrm{d}x^0\int\mathrm{d}^3x(\dot{A}^a_k\pi^k_a - \mathscr{H}^0_{\mathrm{YM}} - \lambda^a\phi_a) \tag{2-14-52}$$

Lagrange 乘子

$$\lambda^a = A^a_0 \tag{2-14-53}$$

约束函数

$$\phi_a = -\partial_k \pi_a^k + f_{bc}^a \pi_c^k A_k^b \tag{2-14-54}$$

而 Hamilton 量密度 $\mathscr{H}_{\mathrm{YM}}^0$ 仅含杨-Mills 势的空间分量 A_k^a 及其正则共轭动量 π_k^a，且

$$\mathscr{H}_{\mathrm{YM}}^0 = \frac{1}{2}\pi_k^a \pi_a^k + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} \tag{2-14-55}$$

将 Lagrange 乘子 λ^a 的正则共轭动量记为 π_a，那么

$$\pi_a = \pi_a^0 \approx 0 \tag{2-14-56}$$

式中：π_a^0 为杨-Mills 势 A_μ^a 正则共轭动量 π_a^μ 的时间分量. 由 $\mathscr{H}_{\mathrm{YM}}^0$ 和约束 ϕ_a 之间的 Poisson 括号关系，有

$$\{\mathscr{H}_{\mathrm{YM}}^0(x), \phi_a(x')\} = 0 \tag{2-14-57}$$

$$\{\phi_a(x), \phi_b(x')\} = f_{ab}^c \phi_c(x)\delta(x - x') \tag{2-14-58}$$

根据上述讨论，有

$$\Omega = \int \mathrm{d}^3 x \left(\phi_a C^a + \frac{1}{2}\overline{\mathscr{P}}_a f_{bc}^a C^b C^c - \mathrm{i}\mathscr{P}^a \pi_a\right) \tag{2-14-59}$$

可观察量

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{H}_{\mathrm{YM}}^0 \tag{2-14-60}$$

在规范固定 Fermi 子

$$\psi = \int \mathrm{d}^3 x (\mathrm{i}\,\overline{C}_a \chi^a + \overline{\mathscr{P}}_a \lambda^a) \tag{2-14-61}$$

中，选取

$$\chi^a = \partial^k A_k^a \tag{2-14-62}$$

由式(2-14-59)、式(2-14-61)和式(2-14-62)，得

$$\{\psi, \Omega\} = \int \mathrm{d}^3 x (-\pi_a \partial^k A_k^a - \lambda^a \phi_a + \mathrm{i}\,\overline{C}_a \partial^k \mathrm{D}_k C^a - \mathrm{i}\,\overline{\mathscr{P}}_a \mathscr{P}^a + \lambda^a \overline{\mathscr{P}}_b f_{ac}^b C^c) \tag{2-14-63}$$

将式(2-14-59)～式(2-14-63)代入式(2-14-36)，对 $\pi_a^k, \mathscr{P}_a, \overline{\mathscr{P}}^a$ 和 π_a 积分，得

$$Z[0] = \langle \overset{(2)}{A}{}_k^a(x), t_2 \mid \overset{(1)}{A}{}_k^a(x), t_1 \rangle = \int \mathscr{D}A_\mu^a \prod_{t,x} \delta(\partial^\mu A_\mu^a) \exp\{\mathrm{i}(I_{\mathrm{YM}} + I_{\mathrm{gh}})\} \tag{2-14-64}$$

式中

$$I_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4 x F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \tag{2-14-65}$$

$$I_{\mathrm{gh}} = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\, \partial^\mu \overline{C}_a\, \mathrm{D}_\mu C^a \tag{2-14-66}$$

这恰好是 2-13 节中给出的结果.

可见,选取不同的 χ^a 既可导致不同形式的 $Z[0]$,也可以直接导出 2-13 节中方法给出的结果.

2-15 含 CS 项的标量电动力学

奇异 Lagrange 量描述的系统,Dirac 正则量子化方法用于非 Abel 规范理论时,遇到了困难;另外,正则量子化方法是算符形式的,在具体运用时就要考虑算符的次序问题. 而路径积分量子化中出现的是 C-数,不是 Q-数,易于计算. 目前,约束系统用路径积分量子化较方便.

FP 应用路径积分量子化方法,成功地实现了杨-Mills 理论的量子化. 但 FP 量子化方法人为地丢掉了无穷大积分,是不严格的. Faddeev 在 Dirac 约束理论基础上,给出了含第一类约束系统的路径积分量子化[2],Senjanovic 解决了同时含第一类约束和第二类约束系统的路径积分量子化[3],称为 FS 路径积分量子化. 不论是 FP 路径积分量子化还是 FS 路径积分量子化,用于非 Abel 规范场时,要引进鬼场保证么正性.

Becchi,Rouet 和 Stora 发现有效 Lagrange 量具有另一种不变性,即 BRS 不变性. Batalin,Fradkin 和 Vilkovsky 在 BRS 对称变换基础上,利用约束 Hamilton 系统的经典结构,即存在结构函数,建立了协变的 BFV 量子化理论[4-5]. BFV 量子化方案是有严格论证的量子化方法,它给出了确定的积分测度的表述,可以较方便地与其他量子化形式转换. 在 BFV 方法中,对一些重要物理系统,选取不同形式的规范固定 Fermi 子 ψ,就可以得到 FS 量子化或 FP 量子化的结果. BFV 量子化方法提供了一个诱人的描述约束 Hamilton 系统的方法,它不约化相空间,而是通过增添 Grassmann 变量扩展相空间,扩展相空间中的 BFV 泛函积分相应于一个没有约束的 Hamilton 系统.

BFV 量子化方法为 Hamilton 形式的 BRST 量子化方法. 建立在 Lagrange 形式的 BRST 量子化方法,是 BV 量子化[8],BRST 对称和鬼场在规范理论的协变量子化中有重要意义. 因此,需要一个理论在开始就自动包含鬼场和 BRST 对称性,BV 量子化方法具有上述特点. 但在 BV 量子化方法中引入反括号、反场;解主(BV)方程相当麻烦,得到的解也很复杂,没有一个简单的方法来解复杂系统的主(BV)方程;反括号使计算变得不必要的复杂;不能自动给出泛函积分的测度. 这些困难联系着么正性,重整化,量子规范不变性和反常.

这里应用 BFV 路径积分量子化方案,讨论含 CS 项的标量电动力学的量

子化[36]，得到和 FS 量子化方法一致的结果.

含 CS 项标量电动力学的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu}A_{\lambda}+(\mathrm{D}^{\mu}\varphi)^{*}(\mathrm{D}_{\mu}\varphi)+m^{2}\varphi^{*}\varphi \tag{2-15-1}$$

式中：$\mathrm{D}_{\mu}=\partial_{\mu}-\mathrm{i}A_{\mu}$，$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$. 各场量相应的正则共轭动量分别为

$$\pi^{i}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_{i}}=F^{i0}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_{j} \tag{2-15-2a}$$

$$\pi^{0}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_{0}}=0 \tag{2-15-2b}$$

$$\pi_{\varphi}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=(\mathrm{D}_{0}\varphi)^{*} \tag{2-15-3a}$$

$$\pi_{\varphi}^{*}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^{*}}=\mathrm{D}_{0}\varphi \tag{2-15-3b}$$

系统有初级约束，即

$$\phi^{1}=\pi^{0}\approx 0 \tag{2-15-4}$$

系统的正则 Hamilton 密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{c}=&\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu}+\pi_{\varphi}\dot{\varphi}+\pi_{\varphi}^{*}\dot{\varphi}^{*}-\mathscr{L}=\\&\mathscr{H}_{0}+A_{0}\left[\mathrm{i}(\pi_{\varphi}\varphi-\varphi^{*}\pi_{\varphi}^{*})-\left(\partial_{i}\pi^{i}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}F_{ij}\right)\right]\end{aligned} \tag{2-15-5}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{0}=&\pi_{\varphi}\pi_{\varphi}^{*}-(\mathrm{D}_{i}\varphi)^{*}(\mathrm{D}^{i}\varphi)-m^{2}\varphi^{*}\varphi-\\&\frac{1}{2}\pi^{i}\pi_{i}+\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\pi_{i}A_{j}-\frac{\kappa^{2}}{8\pi^{2}}A^{i}A_{i}+\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\end{aligned} \tag{2-15-6}$$

由初级约束的自洽性条件 $\dot{\phi}^{1}=0$ 给出了次级约束

$$\phi^{2}=\mathrm{i}(\pi_{\varphi}\varphi-\varphi^{*}\pi_{\varphi}^{*})-\left(\partial_{i}\pi^{i}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}F_{ij}\right)\approx 0 \tag{2-15-7}$$

次级约束的自洽性条件不给出新的次级约束. 系统的全部约束为

$$\phi^{1}=\pi^{0}\approx 0 \tag{2-15-8}$$

$$\phi^{2}=\mathrm{i}(\pi_{\varphi}\varphi-\varphi^{*}\pi_{\varphi}^{*})-\left(\partial_{i}\pi^{i}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}F_{ij}\right)\approx 0 \tag{2-15-9}$$

均为第一类约束. 从式(2-15-5)可以看出，A_0 为约束 ϕ^2 的约束乘子. 系统的相空间变量为 $Z_A(A_i,\varphi,\varphi^{*};\pi^{i},\pi_{\varphi},\pi_{\varphi}^{*})$. 把约束乘子 $\lambda=A_0$ 看做动力学变量后的相空间，记为 $Z_\Delta(Z_A,\lambda=A_0,\pi=\pi^0)$，这样就相当于系统只有一个约束 $\phi=\phi^2$，而 π^0 是由于把约束乘子 $\lambda=A_0$ 看做动力学变量而引入的约束 $\pi=\pi^0\approx$

0. 将系统的约束重新记为 G_a，有

$$G_1 = \pi = \pi^0 \approx 0 \tag{2-15-10}$$

$$G_2 = \phi = \mathrm{i}(\pi_\varphi \varphi - \varphi^* \pi_\varphi^*) - \left(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij} F_{ij}\right) \approx 0 \tag{2-15-11}$$

对每一个约束 G_a，引入 Fermi 鬼场 η^a 及其正则共轭量 $\mathscr{P}_a$，按约束分类 $G_a(G_1, G_2) = (\pi, \phi)$，鬼场分为两部分

$$\left.\begin{aligned} \eta &= (-\mathrm{i}\mathscr{P},\ C) \\ \mathscr{P} &= (\mathrm{i}\overline{C},\ \overline{\mathscr{P}}) \end{aligned}\right\} \tag{2-15-12}$$

不为零的鬼场的 Poisson 括号

$$\left.\begin{aligned} \{\mathscr{P}(x), \overline{C}(y)\} &= -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\ \{\overline{\mathscr{P}}(x), C(y)\} &= -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \end{aligned}\right\} \tag{2-15-13}$$

扩展相空间为 $Z(Z_\Delta, \eta, \mathscr{P})$. 在扩展相空间中，存在 BRS 规范变换生成元. 对 Abel 理论，BRS 变换生成元 $\Omega = \eta^a G_a$[4]，即

$$\Omega = \int \mathrm{d}^2 x (C\phi - \mathrm{i}\mathscr{P}\pi) =$$

$$\int \mathrm{d}^2 x \left\{ C\left[\mathrm{i}(\pi_\varphi \varphi - \varphi^* \pi_\varphi^*) - \left(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij} F_{ij}\right)\right] - \mathrm{i}\mathscr{P}\pi^0 \right\} \tag{2-15-14}$$

BRS 变换为

$$\left.\begin{aligned}
\delta A_i &= \{A_i, \Omega\} = \partial_i C \\
\delta A_0 &= \{A_0, \Omega\} = -\mathrm{i}\mathscr{P} \\
\delta \pi^i &= \{\pi^i, \Omega\} = 0 \\
\delta \pi^0 &= \{\pi^0, \Omega\} = 0 \\
\delta \varphi &= \{\varphi, \Omega\} = \mathrm{i}C\varphi \\
\delta \varphi^* &= \{\varphi^*, \Omega\} = -\mathrm{i}C\varphi^* \\
\delta \pi_\varphi &= \{\pi_\varphi, \Omega\} = -\mathrm{i}C\pi_\varphi \\
\delta \pi_\varphi^* &= \{\pi_\varphi^*, \Omega\} = \mathrm{i}C\pi_\varphi^* \\
\delta C &= \{C, \Omega\} = 0 \\
\delta \mathscr{P} &= \{\mathscr{P}, \Omega\} = 0 \\
\delta \overline{\mathscr{P}} &= \{\overline{\mathscr{P}}, \Omega\} = \mathrm{i}(\pi_\varphi \varphi - \varphi^* \pi_\varphi^*) - \\
&\quad \left(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij} F_{ij}\right) \\
\delta \overline{C} &= \{\overline{C}, \Omega\} = \mathrm{i}\pi^0
\end{aligned}\right\} \tag{2-15-15}$$

Hamilton 量 H_0 是物理系统可观测量，其密度为 $\mathscr{H}_0$. 约束 G_a 和 Hamil-

ton 量密度 $\mathscr{H}_0$ 之间的 Poisson 括号

$$\{\mathscr{H}_0(x), G_a(x')\} = V_a^b G_b = 0 \tag{2-15-16}$$

$$\{G_a(x), G_b(x')\} = C_{ab}^c G_c = 0 \tag{2-15-17}$$

扩展相空间 BRS 变换不变函数为

$$H = \int d^2 x (\mathscr{H}_0 + \eta^a V_a^b \mathscr{P}_b + \cdots) \tag{2-15-18}$$

BFV 量子化有效 Hamilton 量为

$$H_{\text{eff}} = H - \{\psi, \Omega\} = \int d^2 x \mathscr{H}_{\text{eff}} \tag{2-15-19}$$

相应于规范固定 Fermi 子 $\psi = \int d^3 x (i\overline{C}_a \chi^a + \overline{\mathscr{P}}_a \lambda^a)$，有

$$\psi = \int d^2 x (i\overline{C}\chi + \overline{\mathscr{P}}\lambda) \tag{2-15-20}$$

在式(2-15-20)中 χ 选为

$$\chi = \partial_i A^i \tag{2-15-21}$$

直接计算 $\{\psi, \Omega\}$，得

$$\begin{aligned} \{\psi, \Omega\} &= \int d^2 x (-\lambda\phi - \pi\chi + i\overline{C}\{\chi, \phi\} C - i\overline{\mathscr{P}}\mathscr{P}) = \\ &\int d^2 x \Big\{ -A_0 \Big[i(\pi_\varphi \varphi - \varphi^* \pi_\varphi^*) - \Big(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} F_{ij} \Big) \Big] - \\ &\pi^0 \partial_i A^i - i\overline{C} \partial_i \partial^i C - i\overline{\mathscr{P}}\mathscr{P} \Big\} \end{aligned} \tag{2-15-22}$$

有效作用量 S_{eff} 为

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} = \int d^3 x (&\pi^k \dot{A}_k + \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_\varphi^* \dot{\varphi}^* + \\ &\pi\dot{\lambda} + \dot{C}\overline{\mathscr{P}} + \dot{\mathscr{P}}\overline{C} - \mathscr{H}_{\text{eff}}) \end{aligned} \tag{2-15-23}$$

由式(2-15-18)、式(2-15-19)和式(2-15-22)、式(2-15-23)得

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} = \int d^3 x \Big\{ &(\pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_\varphi^* \dot{\varphi}^* + \dot{C}\overline{\mathscr{P}} - \dot{\overline{C}}\mathscr{P}) - \\ &\Big[\pi_\varphi \pi_\varphi^* - (D_i\varphi)^* (D^i\varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{1}{2}\pi^i \pi_i + \\ &\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \pi_i A_j - \frac{\kappa^2}{8\pi^2} A^i A_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \Big] + \\ &\Big\{ -A_0 \Big[i(\pi_\varphi \varphi - \varphi^* \pi_\varphi^*) - \Big(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} F_{ij} \Big) \Big] - \\ &\pi^0 \partial_i A^i - i\overline{C} \partial_i \partial^i C - i\overline{\mathscr{P}}\mathscr{P} \Big) \Big\} \end{aligned} \tag{2-15-24}$$

含 CS 项的标量电动力学的 BFV 路径积分量子化跃迁幅为

$$Z[0]=\int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\pi^\mu \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\pi_\varphi \mathscr{D}\varphi^* \mathscr{D}\pi_\varphi^* \mathscr{D}C \mathscr{D}\overline{\mathscr{P}} \mathscr{D}\overline{C} \mathscr{D}\mathscr{P} \exp\{iS_{\rm eff}\} \quad (2\text{-}15\text{-}25)$$

式(2-15-24)也可以写为

$$\begin{aligned}S_{\rm eff}=\int d^3x(&\pi^\mu \dot{A}_\mu+\pi_\varphi\dot{\varphi}+\pi_\varphi^*\dot{\varphi}^*+\dot{C}\overline{\mathscr{P}}-\dot{\overline{C}}\mathscr{P}-\\ &i\overline{\mathscr{P}}\mathscr{P}-i\overline{C}\partial_i\partial^i C-\mathscr{H}_0-A_0\phi-\pi^0\partial_i A^i)\end{aligned} \quad (2\text{-}15\text{-}26)$$

把式(2-15-26)代入式(2-5-25)中,对鬼场 $C,\overline{\mathscr{P}},\overline{C},\mathscr{P}$,约束乘子 A_0 及其动量 π_0 积分,得

$$\begin{aligned}Z[0]=&\int \mathscr{D}A_k \mathscr{D}\pi^k \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\pi_\varphi \mathscr{D}\varphi^* \mathscr{D}\pi_\varphi^* \delta(\phi)\delta(\partial_i A^i)\det|\{\phi,\partial_i A^i\}|\cdot\\ &\exp i\left\{\int d^3x(\pi^k\dot{A}_k+\pi_\varphi\dot{\varphi}+\pi_\varphi^*\dot{\varphi}^*-\mathscr{H}_0)\right\}=\\ &\int \mathscr{D}A_k \mathscr{D}\pi^k \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\pi_\varphi \mathscr{D}\varphi^* \mathscr{D}\pi_\varphi^* \delta(\phi)\delta(\partial_i A^i)\cdot\\ &\exp i\left\{\int d^3x(\pi^k\dot{A}_k+\pi_\varphi\dot{\varphi}+\pi_\varphi^*\dot{\varphi}^*-\mathscr{H}_0)\right\}\end{aligned} \quad (2\text{-}15\text{-}27)$$

这和用 FS 路径积分量子化计算的结果相同. 其中在上述积分过程中,利用了如下公式[36]

$$\begin{aligned}&\int \mathscr{D}\overline{\mathscr{P}}\mathscr{D}\mathscr{P}\mathscr{D}\overline{C}\mathscr{D}C\exp\left[i\int_{t_1}^{t_2}dt(-\mathscr{P}\dot{\overline{C}}+\dot{C}\mathscr{P}-i\overline{\mathscr{P}}\mathscr{P})\right]=\\ &\int \mathscr{D}\overline{C}\mathscr{D}C\exp\left[\int_{t_1}^{t_2}dt\,\dot{\overline{C}}\,\dot{C}\right]=-(t_2-t_1)\end{aligned} \quad (2\text{-}15\text{-}28)$$

参 考 文 献

[1] Dirac P A M. Lectures on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University, 1964.

[2] Faddeev L D. Feynman integral for singular Lagrangian. Theor Math Phys, 1970, 1: 1-13.

[3] Senjanovic P. Path integral quantization of field theories with second-class constraints. Ann Phys (N Y), 1976, 100: 227-261.

[4] Henneaux M. Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge free-

dom. Phys Rep, 1985, 126(1): 1-66.

[5] Henneaux M, Teitelboim C. Quantization of gauge system. Princeton: Princeton University Press, 1992.

[6] Faddeev L D, Popov V N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. Phys Lett, 1967, B25: 29-30.

[7] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

[8] Gomis J, Paris J, Samuel S. Antibracket antifields and gauge-theory quantization. Phys Rep, 1995, 259: 1-145.

[9] Faddeev L D, Jackiw R. Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. Phys Rev Lett, 1988, 60: 1692-1694.

[10] 李子平. 高阶微商场论中奇异拉氏量系统的量子正则对称性. 物理学报, 1996, 45(8): 1255-1263.

[11] Gitman D M, Tyutin I V. Quantization of Fields with Constraints. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[12] Feynman R P. Hibbs A R. Quantum mechanics and path integrals. New York: McGraw-Hill, 1965.

[13] Sundermeyer K. Constrained Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[14] 江金环, 李爱民, 李子平. 光孤子约束系统的量子理论. 高能物理与核物理, 2003, 27(6): 489-492.

[15] Wang Yonglong, Li Ziping. The CP^1 nonlinear sigma model with Chern-Simons term in the Faddeev-Jackiw quantization formalism. Chinese Phys, 2006, 15(9): 1976-1980.

[16] 隆正文, 刘波, 李子平. Abel Chern-Simons 项与复标量场耦合系统的正则量子化. 高能物理与核物理, 2003, 27(10): 866-869.

[17] 隆正文, 刘波, 李子平. 约束系统量子化中 Dirac 方法和 Faddeev-Jackiw 方法的等价性. 物理学报, 2004, 53(7): 2094-2096.

[18] Wilczek F. Quantum mechanics of fractional-Spin particles. Phys Rev Lett, 1982, 49(14): 957-959.

[19] Lerda A. Anyons. Bertin: Springer-Verlag, 1992.

[20] Dunne G. Self-Dual Chern-Simons Theories. Berlin: Springer-Verlag. 1995.

[21] 李子平. 约束哈密顿系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1999.

[22] Deser S, Jackiw R, Templeton S. Topologically massive gauge theories. Ann phys(NY), 1982, 140: 372-411.

[23] 李瑞洁, 李子平. 含 Chern-Simons 项的旋量电动力学的量子正则对称性. 高能物理与核物理, 2002, 26(4): 325-330.

[24] Jiang Jinhuan, Liu Yun, Li Ziping. Quantum symmetries in the Maxwell-Chern-Simons theory coupled to scalar fields. Int J Theor Phys, 2004, 43(2): 89-97.

[25] Wang Yonglong, Li Ziping. The quantal symmetries in the non-linear sigma model with Maxwell-Chern-Simons term. Int J Theor Phys, 2004 43(5): 1335-1342.

[26] Zhang Y, Li Ziping. Fyactional spin of system with Chern-Simons term coupled to polaron. Int J Theor Phys, 2004, 43(5): 1231-1240.

[27] 张莹,李爱民, 李子平. 含 Hopf 项和 Maxwell-Chern-Simons 项 O(3)非线性 σ-模型的分数自旋和分数统计性质. 物理学报, 2005, 54(1): 43-47.

[28] 张莹,李子平. 非 Abel-Chern-Simons 理论中量子水平的分数自旋性质. 物理学报, 2005, 54(6): 2611-2613.

[29] 王永龙,李子平, 许长谭. 组合 Bose 场的分数自旋和分数统计性质. 物理学报, 2006, 55(5): 2149-2151.

[30] Kim J K, Kim W T, Sin H. Gauge-invariant anyon operators and spin-statistic relation in Chern-Simons matter field theory. J Phys, 1994, A27: 6067-6076.

[31] Li Ziping. On a invalidity of a conjecture of Dirac. Chinese Phys Lett, 1993, 10 (2): 68-70.

[32] Li Ziping. A counterexample to a conjecture of Dirac for a system with singular higher-order Lagrangian. Europhys Lett, 1993, 21(2): 141-146.

[33] Li Ziping. Symmetry in phase space for a system with a singular higher-order Lagrangian. Phys Rev, 1994, E50(2): 876-887.

[34] Li Ziping, Li Aimin, Jiang Jinhuan. On Dirac conjecture. Commun Theor Phys, 2005, 43(6): 1115-1116.

[35] Li Ziping, Jiang Jinhuan. Symmetries in constrained canonical systems. Beijing: Science Press, 2002.

[36] 江金环,李子平. 含 Chern-Simons 项的标量电动力学的 BFV 量子化. 高能物理与核物理, 1999, 23(8): 784-789.

第 3 章

约束系统的量子对称性质

动力学系统的量子性质可从其 Green 函数的生成泛函出发来研究，出现在路径积分中的量(包括积分测度)均是经典的数(C-数)，这为分析系统的量子对称性提供了有用的工具. 本章将详细阐明正规 Lagrange 量系统和奇异 Lagrange 系统在相空间中的一系列量子对称性质，导出系统在定域、非定域和整体变换下的正则 Ward 恒等式；建立量子守恒理论，给出量子水平的 Noether 定理和 Noether 恒等式；导出量子水平的 Poincaré-Cartan(PC)积分不变量；给出在杨-Mills 场论和 Chern-Simons(CS)理论中的应用，在量子场论水平下研究 CS 理论中的分数自旋问题. 此外还将阐述规范不变系统在位形空间中的对称性质. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本，这里发展的理论的显著优点在于无须先做出相空间路径积分中对正则动量的积分.

3-1 相空间中定域变换 正则 Ward 恒等式

奇异 Lagrange 量(如规范理论)描述的系统在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统. 虽然约束系统的 Dirac 理论及其在场论中应用的研究已取得了相当的进展，但该理论中的某些基本问题，至今仍不断有讨论，其中之一就是 Dirac 猜想[1]. 该猜想认为，系统的所有第一类约束均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换. 尽管对这个猜想有不同争议[2-4]，但是许多重要的物理系统，按 Dirac 猜想，尚未导致不合理的结果. 在本章 3-1 中，将 Castellani 的讨论[3]略加修改，并将其推广到场论情形，导出了规范生成元的形式，同时从另一个角度研究了规范生成元中与第一类约束联系的系数之间的关系. 在本章 3-2 中，研究系统在相空间中的量子对称性质. 场论中定域不变性导致的 Ward 恒等式，通常用位形空间中的变量来表述[5]. 当相空间中的生成泛函对动量的路径积分不能积出时，或积出后有效 Lagrange 量具有 δ-函数奇异时[6]，特别是约束 Hamilton 系统，当约束结构比较复杂时，常常难于作出对动量的路径积分. 因此，研究系统在相空间中的对称性质，就具有更普遍的意义[1,7]. 从相空间中的生成泛函在正则变量变换下的不变性出发，导出了系统在相空间中的 Ward 恒等

式. 对于一个给定的用奇异 Lagrange 量描述的系统，求出它所含的第一类约束，通常就可构造出规范生成元，从而就有相应的正则形式的 Ward 恒等式.

3-1-1 规范变换的生成元

设 $\psi^{\alpha}(x)(\alpha=1, 2, \cdots, n)$为场量，$\alpha$ 为不同场或场的分量指标，$x=(t, \boldsymbol{x})$，平坦时空度规 $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1\quad -1\quad -1\quad -1)$. 记 $\psi^{\alpha}_{,\mu}=\partial_{\mu}\psi^{\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi^{\alpha}$. 设场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\psi^{\alpha}, \psi^{\alpha}_{,\mu})$，场的正则动量密度和 Hamilton 量密度分别为 $\pi_{\alpha}=\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}}$和 $\mathscr{H}_{c}=\pi^{\alpha}\dot{\psi}^{\alpha}-\mathscr{L}$(重复指标代表求和). 奇异 Lagrange 量的 Hess 矩阵$[H_{\alpha\beta}]$退化为

$$\det|H_{\alpha\beta}|=\det\left|\frac{\partial^{2}\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^{\alpha}\partial\dot{\psi}^{\beta}}\right|=0$$

由正则动量密度定义式不能全部解出 $\dot{\psi}^{\alpha}$ 作为 ψ^{α} 和 π_{α} 的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 R，那么正则变量 ψ^{α} 和 π_{α} 之间在相空间中存在 $n-R$ 个初级约束[1]

$$\phi^{0}_{a}(\psi^{\alpha},\pi_{\alpha})\approx 0 \quad (a=1,2,\cdots,n-R) \tag{3-1-1}$$

记号“≈”代表弱等，表示等式在约束超曲面上成立，此约束 Hamilton 的正则方程为[1]

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi}^{\alpha}&=\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_{\alpha}}\approx\{\psi^{\alpha},H_{\mathrm{T}}\}\\ \dot{\pi}_{\alpha}&\approx-\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^{\alpha}}=\{\pi_{\alpha},H_{\mathrm{T}}\}\end{aligned}\right\} \tag{3-1-2}$$

式中

$$H_{\mathrm{T}}=H_{\mathrm{c}}+H_{1}=\int\mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda^{a}\phi^{0}_{a}) \tag{3-1-3}$$

H_{T} 为总 Hamilton 量，H_{c} 为正则 Hamilton 量，$\lambda^{a}(x)$为约束乘子，$\{\cdot, \cdot\}$代表场的 Poisson 括号.

初级约束的自洽性条件，$\{\phi^{0}_{a}, H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$，可给出次级约束，次级约束的自洽性条件，可逐次给出其他次级约束，$\phi^{k}_{a}=\{\phi^{k-1}_{a}, H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$，直至 ϕ^{m}_{a} 适合

$$\phi^{m+1}_{a}=\{\phi^{m}_{a},H_{\mathrm{T}}\}=C^{b}_{ak}\phi^{k}_{b}\quad(k\leqslant m)$$

为至，全部约束可分为两类，如果一个约束 ϕ_{a} 对任意约束 ϕ_{b} 均有

$$\{\phi_{a}, \phi_{b}\}=0 \pmod{\phi_{c}}$$

(上式表示在约束超曲面上成立)，则称 ϕ_{a} 为第一类约束；否则为第二类约束.

从规范变换保持系统的正则方程(3-1-2)不变出发，可以构造规范变换的生成元．先考虑系统仅含第一类约束的情形．设系统的轨线(ψ^α，π_α，λ^α)和无穷小规范变更后的轨线($\psi^\alpha+\xi^\alpha$，$\pi_\alpha+\eta_\alpha$，$\lambda^\alpha+\zeta^\alpha$)均适合式(3-1-1)和式(3-1-2)，在变更后的轨线方程中，关于ξ，η，ζ等小量展开，并利用未变更的轨线方程，得

$$\dot{\xi}^\alpha \approx \int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^\beta\delta\pi_\alpha}\xi^\beta+\frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_\beta\delta\pi_\alpha}\eta_\beta\right] \tag{3-1-4a}$$

$$\dot{\eta}_\alpha \approx -\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\psi^\beta\delta\psi^\alpha}\xi^\beta+\frac{\delta^2 H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_\beta\delta\psi^\alpha}\eta_\beta\right] \tag{3-1-4b}$$

$$\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\psi^\alpha}\xi^\alpha+\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_\alpha}\eta_\alpha\approx 0 \tag{3-1-4c}$$

将规范变换的生成元表示为

$$G=\int \mathrm{d}^3x\,\varepsilon_j^{(k)}G_k^j(\psi^\alpha,\pi_\alpha) \tag{3-1-5}$$

式中：$\varepsilon_j^{(k)}=\partial_0^k\varepsilon_j(x)$，$\varepsilon_j(x)$为时空的任意函数．由此生成元产生的正则变量的变更为

$$\xi^\alpha=\{\psi^\alpha,G\}=\frac{\delta G}{\delta\pi_\alpha},\quad \eta_\alpha=\{\pi_\alpha,G\}=-\frac{\delta G}{\delta\psi^\alpha} \tag{3-1-6}$$

将式(3-1-6)代入式(3-1-4)，由$\varepsilon_j(x)$的任意性，得

$$\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}\left[G_{k-1}^j+\{G_k^j,H_{\mathrm{T}}\}\right]=0\quad(\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{3-1-7a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\pi_\alpha}\left[G_{k-1}^j+\{G_k^j,H_{\mathrm{T}}\}\right]=0\quad(\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{3-1-7b}$$

$$\{G_k^j,\phi_a^0\}=0\quad(\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{3-1-7c}$$

因为正则变量变更后的轨线仍保持在约束超曲面上，对次级约束ϕ_a^n亦应有$\{G_k^j,\phi_a^n\}\approx 0$．因此所有$G_k^j$必为第一类约束．由于系统仅含第一类约束，式(3-1-7c)中可用H_c来代替H_{T}，从而得下列递推关系[6]

$$\{G_0^j,H_c\}=0\quad(\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{3-1-8a}$$

$$G_{k-1}^j+\{G_k^j,H_c\}=0\quad(\mathrm{mod}\ \phi_a^0)\quad(k=1,2,\cdots,m) \tag{3-1-8b}$$

$$G_m^j=0\quad(\mathrm{mod}\ \phi_a^0) \tag{3-1-8c}$$

由式(3-1-8b)可知，G_{k-1}^j可从G_k^j导出．从每一个初级约束G_m^j出发，由式(3-1-8)逐次求出G_k^j，直至G_0^j适合式(3-1-8a)为止．这样求出G_k^j后，代入式(3-1-5)就可构造出规范变换的生成元．除χ^n-型约束(含幂次的约束函数被线性化)外，所有第一类约束均是规范生成元的组成部分[3]．

当系统同时含第一类约束和第二类约束时，只要由初级第一类约束导

出的次级第一类约束系列与第二类约束完全分开，上述构造规范生成元的方法对此类系统的第一类约束也是适用的.

文献[4]中研究了由第一类约束线性组合构成的规范生成元中其组合系数所满足的微分方程组. 为了得到该方程组，作者在文献[4]中丢掉了式(3.8)左端最后一项，这是欠严格的. 这里给出一个证明. 设系统所含的独立约束为第一类的，初级第一类约束为 $\phi_k^0(k=1, 2, \cdots, K)$，次级第一类约束为$\chi_l(l=1, 2, \cdots, L)$. 按 Dirac 的处理，规范生成元可表示为(有限自由度系统)

$$G = \omega^l(t)\chi_l + \varepsilon^k(t)\phi_k^0 \tag{3-1-9}$$

规范变换的生成元应满足的充要条件为[6]

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_{\mathrm{T}}\} = 0, \quad \{G, \phi_k^0\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{3-1-10}$$

将式(3-1-9)代入式(3-1-10)，得

$$\frac{\mathrm{d}\omega^l}{\mathrm{d}t}\chi_l + \omega^n\alpha_{nl}\chi_l + \varepsilon^n\beta_{nl}\chi_l = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{3-1-11}$$

其中 α_{nl}，β_{nl} 适合

$$\{\chi_l, H_c\} = \alpha_{lm}\chi_m, \quad \{\phi_k^0, H_c\} = \beta_{km}\chi_m \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{3-1-12}$$

由于约束χ_l的线性无关性，由式(3-1-11)得规范生成元中其组合系数应满足下列微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\omega^l}{\mathrm{d}t} + \omega^n\alpha_{nl} + \varepsilon^n\beta_{nl} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \phi_k^0) \tag{3-1-13}$$

这样就正确地得到了文献[4]中的基本结果. 不难验证，按式(3-1-5)和式(3-1-8)确定的生成元与按式(3-1-9)和式(3-1-13)确定的生成元结果一致.

纯杨-Mills 场的正则形式表述中，在相空间中系统存在两个第一类约束(见 1-12)，即(取 $g=1$)

$$\phi_a^0 = \pi_a^0 \approx 0 \tag{3-1-14}$$

$$\phi_a^1 = \partial_i\pi_a^i - f_{\beta\gamma}^a A_i^\beta\pi_\gamma^i \approx 0 \tag{3-1-15}$$

从初级约束 ϕ_a^0 出发，按式(3-1-8)有

$$G_a^1 = \phi_a^0 \tag{3-1-16}$$

$$G_a^0 = -\phi_a^1 + \int \mathrm{d}^3y\,\omega_{a\gamma}(x, y)\phi_\gamma^0 \tag{3-1-17}$$

从 $\{G_a^0, H_c\} = 0$ 的要求，$\omega_{a\gamma}$可以确定为

$$\omega_{\alpha\gamma}(x,y) = -f_{\alpha\gamma}^{\beta}A_{\beta}^{0}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3-1-18}$$

这样,杨-Mills 理论的规范生成元为

$$G(\varepsilon^{\alpha},\dot{\varepsilon}^{\alpha}) = \int d^3x[-\varepsilon^{\alpha}(x)(\phi_{\alpha}^{1}+f_{\alpha\gamma}^{\beta}A_{\beta}^{0}\pi_{0}^{\gamma})+\varepsilon^{\alpha}(x)_{,0}\pi_{\alpha}^{0}] =$$

$$\int d^3x[\pi_{\alpha}^{\mu}D_{\mu}\varepsilon^{\alpha}(x)] \tag{3-1-19}$$

此生成元产生的规范变换为

$$\left.\begin{aligned}\delta A_{\mu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}\varepsilon^{\alpha}-f_{\beta\gamma}^{\alpha}\varepsilon^{\beta}A_{\mu}^{\gamma}\\ \delta\pi_{\alpha}^{\mu} &= f_{\alpha\beta}^{\gamma}\varepsilon^{\beta}\pi_{\gamma}^{\mu}\end{aligned}\right\} \tag{3-1-20}$$

在式(3-1-20)规范变换下,纯杨-Mills 场的 Lagrange 量密度是规范不变的.

3-1-2 正则 Ward 恒等式

在规范场理论中 Ward 恒等式不但是理论可重整化的保证,而且在一些具体计算中(如 QCD 中的某些计算)也起重要作用,利用它可将高阶固有顶角的计算化为低阶固有顶角的计算. 通常对 Ward 恒等式的研究是用位形空间中的 Lagrange 量,通过 Green 函数生成泛函的不变性来导出的[1]. 但是,当相空间中的生成泛函对动量的泛函积分不能积出时,或积出后有效 Lagrange 量有 δ-函数奇异时[1](这些奇异性寄希望于在重整化过程中消去),特别是约束 Hamilton 系统,当约束结构比较复杂时,要作出对动量的泛函积分则是十分困难的,甚至是不可能的. 因此,研究系统在相空间中的对称性质,就十分必要.

先讨论由非奇异 Lagrange 量描述的系统. 对场量 $\psi^{\alpha}(x)$和它的正则动量 $\pi_{\alpha}(x)$分别引入外源 $J_{\alpha}(x)$和 $K^{\alpha}(x)$,将 Green 函数的生成泛函表为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\psi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}\exp\left\{i\left[I^{p}+\int d^4x(J_{\alpha}\psi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})\right]\right\} \tag{3-1-21a}$$

$$I^{p} = \int d^4x\mathscr{L}^{p} = \int d^4x(\pi_{\alpha}\dot{\psi}^{\alpha}-\mathscr{H}_{c}) \tag{3-1-21b}$$

式中:I^{p} 为场的正则作用量. 显然 Green 函数为

$$G(x_1,\cdots,x_n) = \langle 0 \mid T[\hat{\psi}^{\rho}(x_1)\cdots\hat{\psi}^{\rho}(x_n)] \mid 0\rangle =$$

$$\frac{1}{i^n}\left.\frac{\delta^n Z[J,K]}{\delta J_{\alpha}(x_1)\cdots\delta J_{\alpha}(x_n)}\right|_{J_{\alpha}=K_{\alpha}=0} \tag{3-1-22}$$

对动量 π_{α} 引入外源 K^{α},不影响 Green 函数的计算. 现考虑相空间中的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned}\psi^{\alpha\prime}(x) &= \psi^{\alpha}(x)+S_{\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}(x)\\ \pi_{\alpha}'(x) &= \pi_{\alpha}(x)+T_{\alpha\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x)\end{aligned}\right\} \tag{3-1-23}$$

其中 $\epsilon^{\sigma}(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们及其各级微商在四维时空区域的边界上为零，S_{σ}^{α} 和 $T_{\alpha\sigma}$ 为线性微分算符. 在式(3-1-23)变换下，正则作用量式(3-1-21b)的变分为[1]

$$\delta I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4 x\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^{\alpha}}\delta\psi^{\alpha}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}}\delta\pi_{\alpha}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_{\alpha}\delta\psi^{\alpha})\right] \tag{3-1-24}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\alpha}}=-\dot{\pi}_{\alpha}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\psi^{\alpha}},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}}=\dot{\psi}^{\alpha}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_{\alpha}} \tag{3-1-25}$$

由 $\epsilon^{\sigma}(x)$ 的边界条件式(3-1-24)右端第三项可化为零. 设变换式(3-1-23)的Jacobi行列式为 1，生成泛函式(3-1-21a)在式(3-1-23)变换下不变，就有

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\psi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}\left[1+\mathrm{i}\delta I^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(J_{\alpha}\delta\psi^{\alpha}+K^{\alpha}\delta\pi_{\alpha})\right]\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(J_{\alpha}\delta\psi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})\right\} \tag{3-1-26}$$

它表示 $\frac{\delta Z}{\delta\epsilon^{\sigma}}=0$. 由式(3-1-24)、式(3-1-26)，得相空间中的 Ward 恒等式，即

$$\left[\widetilde{S}_{\sigma}^{\alpha}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\alpha}}\right)+\widetilde{S}_{\sigma}^{\alpha}J_{\alpha}+\widetilde{T}_{\alpha\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}}\right)+\widetilde{T}_{\alpha\sigma}K^{\alpha}\right]Z[J,K]\Big|_{\substack{\psi^{\alpha}\to\frac{-\mathrm{i}\delta}{\delta J_{\alpha}}\\ \pi_{\alpha}\to\frac{-\mathrm{i}\delta}{\delta K^{\alpha}}}}=0 \tag{3-1-27}$$

式中：$\widetilde{S}_{\sigma}^{\alpha}$ 和 $\widetilde{T}_{\alpha\sigma}$ 分别代表 S_{σ}^{α} 和 $T_{\alpha\sigma}$ 的伴随算符，如 $\widetilde{S}_{\sigma}^{\alpha}$ 适合

$$\int_{\Omega} f\, S_{\sigma}^{\alpha}g\,\mathrm{d}^4 x=\int_{\Omega} g\,\widetilde{S}_{\sigma}^{\alpha}f\,\mathrm{d}^4 x+[\cdot]$$

式中：f 和 g 为区域 Ω 上的任意函数；$[\cdot]$ 为边界项.

设一奇异 Lagrange 量系统，在相空间中的所有第一类约束为 $\Lambda_k(k=1,2,\cdots,K_1)$，所有第二类约束为 $\theta_j(j=1,2,\cdots,J_1)$，与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k(k=1,2,\cdots,K_1)$. 按 FS 路径积分量子化，此约束 Hamilton 系统的 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\psi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}\prod_{j,k,l}\delta(\theta_j)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|\cdot$$
$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}+$$
$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(J_{\alpha}\psi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})\} \tag{3-1-28}$$

利用 δ-函数以及 Grassmann 变量 $\eta(x)$，$\bar{\eta}(x)$ 积分的性质

$$\det|\{A_k(x),B_l(y)\}|=\int \mathscr{D}\eta_l(y)\mathscr{D}\bar{\eta}_k(x)\cdot$$
$$\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\mathrm{d}^4 y\,\bar{\eta}_k(x)\{A_k(x),B_l(y)\}\eta_l(y)\right] \tag{3-1-29}$$

可将式(3-1-28)化为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\psi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}\mathscr{D}\lambda_{m}\mathscr{D}\eta\mathscr{D}\bar{\eta}\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x(J_{\alpha}\psi^{\alpha}+K^{\alpha}\pi_{\alpha})\right\} \tag{3-1-30}$$

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^{4}x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}) \tag{3-1-31a}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{m}}=\lambda_{j}\theta_{j}+\lambda_{k}\Lambda_{k}+\lambda_{l}\Omega_{l},\ \lambda_{m}=(\lambda_{j},\lambda_{k},\lambda_{l}) \tag{3-1-31b}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\int\mathrm{d}^{4}y\Big[\bar{\eta}_{k}(x)\{\Lambda_{k}(x),\Omega_{l}(y)\}\eta_{l}(y)+$$

$$\frac{1}{2}\bar{\eta}_{i}(x)\{\theta_{i}(x),\theta_{j}(y)\}\eta_{j}(y)\Big] \tag{3-1-31c}$$

式中:λ_m 为乘子场,$\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$表示与乘子场有关的 Lagrange 量密度. 在非 Abel 规范理论中,$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$相应于鬼粒子项. 在式(3-1-23)变换下,生成泛函式(3-1-30)也是不变的. 奇异 Lagrange 量系统的正则形式 Ward 恒等式,只要将式(3-1-27)中的 I^{p} 用 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$来代替就是了[6].

3-2 含 CS 项的旋量电动力学

在动力学系统的路径积分量子化中,出现在路径积分中的量是经典的 C-数,这为分析系统的量子对称性提供了方便. 用奇异 Lagrange 量描述的系统(包含所有规范理论),在相空间描述时为约束 Hamilton 系统,该系统的 FS 路径积分量子化方案已被广泛采用,用于规范理论中的一些场论模型,在作出对正则动量的路径积分后,通常可化为 FP 直观方案给出结果. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本,因此分析系统在相空间中的对称性就具有更普遍的意义[7-8].

这里基于约束 Hamilton 系统量子正则对称性理论[7-9],研究含 CS 项旋量电动力学的量子对称性质,构造了该系统的规范变换生成元;采用 FS 路径积分量子化方案,给出了该系统 Green 函数的相空间生成泛函,同时导出了正则 Ward 恒等式.

(2+1)维含 Maxwell 项 Abel CS 场与旋量场耦合(CS 旋量电动力学)的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\rho}+\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi \tag{3-2-1}$$

式中：$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$，$D_\mu=\partial_\mu-iA_\mu$，$\epsilon^{\mu\nu\rho}$为 Levi-Civita 三阶反对称张量，且 $\epsilon^{012}=1$，$\bar{\psi}=\psi^+\gamma^0$ 为 Dirac 共轭旋量. Dirac γ-矩阵为 $\gamma^0=\sigma^3$，$\gamma^1=i\sigma^1$，$\gamma^2=i\sigma^2$（σ 为 Pauli 矩阵）. 场量 $A_\mu,\psi,\bar{\psi}$ 的正则共轭动量分别为

$$\left.\begin{aligned}\pi^0&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_0}=0\\ \pi^i&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i}=-F^{0i}+\frac{\kappa}{4\pi}\epsilon^{ij}A_j\\ \pi&=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\bar{\psi}\gamma^0\\ \bar{\pi}&=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}=0\end{aligned}\right\}\tag{3-2-2}$$

在相空间中，系统存在的初级约束为

$$\Phi_1^0=\pi^0\approx 0,\quad \Phi_2^0=\pi-i\bar{\psi}\gamma^0\approx 0,\quad \Phi_3^0=\bar{\pi}\approx 0\tag{3-2-3}$$

正则 Hamilton 密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c&=\pi^\mu\dot{A}_\mu+\dot{\psi}\pi+\dot{\bar{\psi}}\bar{\pi}-\mathscr{L}=\\ &\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}+\frac{1}{2}F_{0i}^2-i\bar{\psi}\gamma^k D_k\psi+m\bar{\psi}\psi+\\ &A_0[\bar{\psi}\gamma^0\psi+(\partial_i\pi^i+\frac{\kappa}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j)]\end{aligned}\tag{3-2-4}$$

总 Hamilton 量为

$$H_T=\int d^3x(\mathscr{H}_c+\lambda_1\Phi_1^0+\lambda_2\Phi_2^0+\lambda_3\Phi_3^0)\tag{3-2-5}$$

式中：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 Lagrange 乘子. 由初级约束 Φ_1^0 的自洽性条件给出了次级约束，即

$$\Phi^1=\{\Phi_1^0,H_T\}=\partial_i\pi^i+\bar{\psi}\gamma^0\psi+\frac{\kappa}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j\approx 0\tag{3-2-6}$$

初级约束 Φ_2^0,Φ_3^0 的自洽性条件分别得到确定 Lagrange 乘子 λ_2,λ_3 的方程. 系统的全部约束为 $\Phi_1^0,\Phi_2^0,\Phi_3^0,\Phi^1$. 将 Φ_2^0,Φ_3^0,Φ^1 线性组合为

$$\begin{aligned}\Lambda_2&=\Phi^1-i(\Phi_2^0\psi+\bar{\psi}\Phi_3^0)=\partial_i\pi^i+\\ &\frac{\kappa}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j-i(\bar{\psi}\bar{\pi}+\pi\psi)\approx 0\end{aligned}\tag{3-2-7}$$

不难验证，$\Lambda_1=\Phi_1^0$，Λ_2 为第一类约束，$\theta_1=\Phi_2^0$，$\theta_2=\Phi_3^0$ 为第二类约束（同时给出了第一类约束的最大数目）. 于是，规范变换的生成元为（见 3-1-1）

$$G=\int d^2y[\epsilon(y)_{,0}\Lambda_1-\epsilon(y)\Lambda_2]=$$

$$\int \mathrm{d}^2 y\left[\mathrm{i}(\bar{\psi}\bar{\pi}+\pi\psi)\varepsilon(y)-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j\varepsilon(y)+\pi^{\mu}\partial_{\mu}\varepsilon(y)\right] \tag{3-2-8}$$

由此生成元产生场量的变换为

$$\left.\begin{aligned}\delta A_{\mu}&=\{A_{\mu}(x),G\}=\partial_{\mu}\varepsilon(x)\\ \delta\psi&=\{\psi(x),G\}=\mathrm{i}\psi\varepsilon(x)\\ \delta\bar{\psi}&=\{\bar{\psi}(x),G\}=-\mathrm{i}\bar{\psi}\varepsilon(x)\end{aligned}\right\} \tag{3-2-9}$$

在此变换下，系统的 Lagrange 量改变了一散度项，因此，正则作用量 I^{p} 不变.

按照约束 Hamilton 系统的 FS 路径积分量子化方案，对每一个第一类约束考虑选取 Coulomb 规范

$$\Omega_2=\partial_i A_i\approx 0 \tag{3-2-10}$$

其自洽性条件给出了另一规范条件，即

$$\begin{aligned}\Omega_1=\dot{\Omega}_2=\partial_i(F_{0i}-\partial_i A_0)=\\ -\nabla^2 A_0+\partial_i\pi^i+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j\approx 0\end{aligned} \tag{3-2-11}$$

不难验证，$\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|$ 和 $\det|\{\theta_k,\theta_l\}|$ 均与场量无关，可将其从生成泛函中略去. 因此，Green 函数在相空间中的生成泛函为

$$\begin{aligned}Z[J_{\mu},\bar{\xi},\xi,U_k,V_l,W_m]=\int&\mathscr{D}A^{\mu}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi_{\mu}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}\mu_k\mathscr{D}\omega_l\mathscr{D}\beta_m\cdot\\ &\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x[\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J_{\mu}A^{\mu}+\bar{\xi}\psi+\bar{\psi}\xi+\right.\\ &\left.U_k\mu_k+V_l\omega_l+W_m\beta_m]\right\}\end{aligned} \tag{3-2-12}$$

这里对场量引入外源，$J_{\mu},\bar{\xi},\xi$ 分别为场 $A_{\mu},\psi,\bar{\psi}$ 的外源，U_k,U_l,W_m 分别为乘子场 μ_k,ω_l,β_m 的外源. 为简单起见，记所有场为 $\varphi^{\alpha}=(A^{\mu},\psi,\bar{\psi},\mu_k,\omega_l,\beta_m)$，场的外源为 $J_{\alpha}=(J_{\mu},\bar{\xi},\xi,U_k,V_l,W_m)$，场量 $A_{\mu},\psi,\bar{\psi}$ 的正则动量为 $\pi_{\alpha}=(\pi_{\mu},\pi,\bar{\pi})$，则式(3-2-12)可简写为

$$Z[J_{\alpha}]=\int\mathscr{D}\varphi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}\exp[\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x(J_{\alpha}\varphi^{\alpha})] \tag{3-2-13}$$

式中

$$I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}^3x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mu_k\Lambda_k+\omega_l\Omega_l+\beta_m\theta_m) \tag{3-2-14}$$

在式(3-2-9)变换下，生成泛函是不变的式(3-2-9)变换的 Jacobi 行列式为 1，则有

$$\begin{aligned}Z[J_{\alpha}]=\int\mathscr{D}\varphi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}\exp\left[\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\int\mathrm{d}^3x(J_{\alpha}\varphi^{\alpha})\right]\cdot\\ \left[1+\mathrm{i}\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x(J_{\alpha}\delta\varphi^{\alpha})\right]\end{aligned} \tag{3-2-15}$$

生成泛函在式(3-2-9)变换下的不变性，表明$\left.\frac{\delta Z[J_a]}{\delta\epsilon(x)}\right|_{\epsilon(x)=0}=0$，可得正则Ward恒等式

$$\left[\nabla^2\frac{\delta}{\delta V_2}-\partial_0\nabla^2\frac{\delta}{\delta V_1}-\partial^\mu J_\mu+\left(\bar{\xi}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}}-\xi\frac{\delta}{\delta\xi}\right)\right]Z[J_a]=0 \tag{3-2-16}$$

令 $Z[J_a]=\exp\{\mathrm{i}W[J_a]\}$，由 Legendre 变换引入正规顶角的生成泛函，即

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma[\varphi^a]=W[J_a]-\int\mathrm{d}^4x(J_a\varphi^a)\\&\frac{\delta W}{\delta J_a(x)}=\varphi^a(x)\\&\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi^a(x)}=-J_a(x)\end{aligned}\right\} \tag{3-2-17}$$

于是正则 Ward 恒等式(3-2-18)可化为

$$\begin{aligned}&\nabla^2\omega_2(x_1)-\partial_0\nabla^2\omega_1(x_1)-\psi(x_1)\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x_1)}+\\&\bar{\psi}(x_1)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x_1)}+\partial_\mu^{x_1}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x_1)}=0\end{aligned} \tag{3-2-18}$$

对式(3-2-18)分别关于 $\psi(x_2)$，$\bar{\psi}(x_3)$求泛函微商，并让所有场(包含乘子场)为 0，即 $\varphi^a=0$，可得三点正规顶角与旋量传播子之间的关系：

$$\begin{aligned}\partial_\mu^{x_1}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta A^\mu(x_1)\delta\psi(x_2)\delta\bar{\psi}(x_3)}=&\ \delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x_1)\delta\bar{\psi}(x_3)}-\\&\delta(x_1-x_3)\frac{\delta\Gamma^2[0]}{\delta\bar{\psi}(x_3)\delta\psi(x_2)}\end{aligned} \tag{3-2-19}$$

将式(3-2-18)对场量求泛函微商，然后让场量为零，可得更多的 Green 函数间的关系. 由正则 Ward 恒等式导出上述关系的优点在于无须作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分.

3-3 正则 Ward 恒等式和 Abel 规范理论中动力学质量产生

动力学自发破缺机制是在超导 Meissner 效应理论的启发下，提出的一种不同于 Higgs 机制产生破缺的可能机制，在动力学自发破缺机制中不需要引入 Higgs 标量场，Lagrange 量仅包含所要研究的场，自发破缺解存在于自己所满足的(非微扰的)方程之中，它包含的基本场和参数更少. Nambu 和

Jon-Lasinio的模型就是一个 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称破缺的例子. 量子色动力学把强子作为由规范作用结合起来的夸克复合态来描述,人们也试图用这种观点解释 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称性的破缺. 它的缺点是计算困难,因为动力学自发破缺是一个非微扰效应,不能作微扰展开. 最近,开展了包含复合场的 Ward-Takahashi(WT)恒等式的研究,并用于研究手征对称破缺和束缚态的性质. 在一些模型的研究中,这种方法能够得到包括 Fermi 子和束缚态的质量谱,在存在明显破缺的情况下,用这种方法能更方便地讨论相结构、质量谱、PCAC 等,并将其推广到规范对称动力学破缺的情况,并讨论规范 Bose 子获得质量的机制. 当规范对称动力学破缺时,矢量介子获得的质量与 Schwinger 机制结果是一致的. 但他们的讨论是基于位形空间路径积分的 Ward 恒等式,位形空间路径积分是相空间路径积分的一种特殊情况,相空间路径积分比位形空间更基本,对于约束 Hamilton 系统含有复杂约束的情形,要作出对动量的路径积分是十分困难的,甚至是不可能的,因此,基于相空间路径积分来研究就具有更普遍的意义. 这里用约束系统理论[10-13]采用 FS 相空间路径积分量子化方法,研究有约束的动力学系统 Cornwall-Norton 和 Jackiw-Johnson 模型的路径积分量子化,并导出了这两个系统的正则 Ward 恒等式,利用导出的正则 Ward 恒等式,得到了与已有文献相同的有关 Fermi 子和束缚态质量谱的结果[14].

3-3-1 Cornwall-Norton 模型

Cornwall-Norton 模型由如下 Lagrange 量密度描述

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + g\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + g'\,\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2\psi B_\mu \tag{3-3-1}$$

式中:$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$; ψ 代表两个场 ψ_1 和 ψ_2;τ_2 为 Pauli 矩阵;A_μ, B_μ 为 Abel 规范场. Lagrange 量式(3-3-1)是奇异的. 场 $\bar{\psi}, \psi, A_\mu, B_\mu$ 的正则共轭动量分别论为 $\pi, \bar{\pi}, \pi_A^\mu, \pi_B^\mu$,则

$$\left.\begin{aligned}
\pi &= \frac{\partial_r \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \\
\bar{\pi} &= \frac{\partial_r \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\,\bar{\psi}\gamma^0 \\
\pi_A^\mu &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} \\
\pi_B^\mu &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{B}_\mu} = -G^{0\mu}
\end{aligned}\right\} \tag{3-3-2}$$

初级约束为

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= \pi \approx 0, \quad \Phi_2 = \bar{\pi} - \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \\ \Phi_3 &= \pi_A^0 \approx 0, \ \Phi_4 = \pi_B^0 \approx 0\end{aligned}\right\} \tag{3-3-3}$$

正则 Hamilton 量密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c =& \bar{\pi}\dot{\psi} + \pi\dot{\bar{\psi}} + \pi_A^\mu \dot{A}_\mu + \pi_B^\mu \dot{B}_\mu - \mathscr{L} = \\ & \frac{1}{2}\pi_{Ai}^2 + \frac{1}{2}\pi_{Bi}^2 - A_0 \partial_i \pi_A^i - B_0 \partial_i \pi_B^i - \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^i \partial_i - m_0)\psi + \\ & \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij} - g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - g'\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2\psi B_\mu\end{aligned} \tag{3-3-4}$$

总 Hamilton 量为

$$H_{\mathrm{T}} = \int (\mathscr{H}_c + \lambda^i \Phi_i)\mathrm{d}^3 x \tag{3-3-5}$$

式中:$\lambda^i(x)$为约束乘子. 初级约束的自洽性条件为

$$\left.\begin{aligned}\{\Phi_1, H_{\mathrm{T}}\} &= \{\pi, H_c\} = (\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\psi + g\gamma^\mu\psi A_\mu + \\ & \quad g'\gamma^\mu\tau_2\psi B_\mu - \lambda_2 \mathrm{i}\gamma^0 \approx 0 \\ \{\Phi_2, H_{\mathrm{T}}\} &= \{\bar{\pi} - \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0, H_{\mathrm{T}}\} = (\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\bar{\psi} - \\ & \quad g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu - g'\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2 B_\mu + \lambda_1 \mathrm{i}\gamma^0 \approx 0\end{aligned}\right\} \tag{3-3-6}$$

它们不给出约束,而是给出乘子满足的关系式. 次级约束为

$$\chi_1 = \{\Phi_3, H_{\mathrm{T}}\} = \{\pi_A^0, H_{\mathrm{T}}\} = \partial_i \pi_A^i + g\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0$$

$$\chi_2 = \{\Phi_4, H_{\mathrm{T}}\} = \{\pi_B^0, H_{\mathrm{T}}\} = \partial_i \pi_B^i + g'\bar{\psi}\gamma^0\tau_2\psi \approx 0 \tag{3-3-7}$$

此外再无约束了. 由 Dirac 约束分类的定义,通过计算约束函数的 Poisson 括号不难验证,$\Phi_3 = \pi_A^0$,$\Phi_4 = \pi_B^0$ 为第一类约束;Φ_1,Φ_2,χ_1, χ_2 为第二类约束. 为了得到第一类约束的最大数目,可将其组合成两个第一类约束,即

$$\Phi_5 = \partial_i \pi_A^i + \mathrm{i}g(\bar{\pi}\psi + \bar{\psi}\pi) \approx 0$$

$$\Phi_6 = \partial_i \pi_B^i + \mathrm{i}g'\tau_2(\bar{\pi}\psi + \bar{\psi}\pi) \approx 0 \tag{3-3-8}$$

这就给出了第一类约束的最大数目(Φ_3,Φ_4,Φ_5,Φ_6). Φ_1,Φ_2 为第二类约束. 按 FS 量子化方法,相应于每一个第一类约束应取一规范条件,其规范条件为

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= \partial_i \pi_A^i + \partial_i\partial_i A_0 \approx 0 \\ \Omega_2 &= \partial_i A^i \approx 0 \\ \Omega_3 &= \partial_i \pi_B^i + \partial_i\partial_i B_0 \approx 0 \\ \Omega_4 &= \partial_i B^i \approx 0\end{aligned}\right\} \tag{3-3-9}$$

其中 $\Omega_1\approx0$ 和 $\Omega_3\approx0$ 分别可由库仑规范 $\Omega_2\approx0$ 和 $\Omega_4\approx0$ 的自洽性（相容性）条件而得.

对复合场也引入外源，则相空间 Green 函数的生成泛函为

$$
\begin{aligned}
Z[J] = \int & \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}\pi_A^\mu\mathscr{D}B_\mu\mathscr{D}\pi_B^\mu\delta(\Phi_3)\delta(\Phi_4)\cdot \\
& \delta(\Phi_5)\delta(\Phi_6)\delta(\Omega_1)\delta(\Omega_2)\delta(\Omega_3)\delta(\Omega_4)\delta(\Phi_1)\delta(\Phi_2)\cdot \\
& \exp\{\mathrm{i}d^4x[\mathscr{L}^{\mathrm{p}} + J_\mu B_\mu + J'_\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\psi}\tau_a\psi K_a]\} \quad (3\text{-}3\text{-}10)
\end{aligned}
$$

式中：$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\dot{\psi}\bar{\pi}+\dot{\bar{\psi}}\pi+\dot{A}_\mu\pi_A^\mu+\dot{B}_\mu\pi_B^\mu-\mathscr{H}_c$. 不难验证，以约束函数 Poisson 括号为元素构成的行列式$[\det|\{\Phi_i,\Phi_j\}|]^{\frac{1}{2}}(i,j=1,2)$与 $\det|\{\Omega_k,\Phi_l\}|(k=1,2,3,4;l=3,4,5,6)$均与场量无关，在生成泛函式(3-3-10)中已略去这两个行列式. 利用 δ-函数的性质，并对乘子场也引入外源，则式(3-3-10)可写为

$$
\begin{aligned}
Z[J] = \int & \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}\pi_A^\mu\mathscr{D}B_\mu\mathscr{D}\pi_B^\mu\mathscr{D}\mu_k\mathscr{D}\omega_l\cdot \\
& \exp\{\mathrm{i}d^4x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_\mu B_\mu + J'_\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \\
& \bar{\psi}\eta + U_k\mu_k + V_l\omega_l + \bar{\psi}\tau_a\psi K_a]\} \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]} \quad (3\text{-}3\text{-}11)
\end{aligned}
$$

式中：J 代表所有外源$(J_\mu,J'_\mu,U_k,V_l,\bar{\eta},\eta,K_a)$；$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_m=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mu_k\Phi_k+\omega_l\Omega_l$；$\mu_k,\omega_l$ 为乘子场. 在下列变换下，

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta\psi(x)=\mathrm{i}[\alpha(x)+\tau_2\beta(x)]\psi(x) \\
&\delta\bar{\pi}(x)=-[\alpha(x)+\tau_2\beta(x)]\bar{\psi}(x)\gamma^0 \\
&\delta\pi(x)=0,\quad \delta A_\mu(x)=\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x) \\
&\delta\pi_A^\mu(x)=0,\quad \delta B_\mu(x)=\frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x) \\
&\delta\pi_B^\mu(x)=0
\end{aligned}
\right\} \quad (3\text{-}3\text{-}12)
$$

正则 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 不变，其中 $\alpha(x),\beta(x)$是无穷小函数，此变换的 Jacobi行列式为 1. 而

$$
\begin{aligned}
\delta(\mu_k\Phi_k+\omega_l\Omega_l) = {} & \omega_1\nabla^2\partial_0\frac{1}{g}\alpha(x)+\omega_2\frac{1}{g}\nabla^2\alpha(x)+ \\
& \omega_3\nabla^2\partial_0\frac{1}{g}\beta(x)+\omega_4\frac{1}{g}\nabla^2\beta(x) \quad (3\text{-}3\text{-}13)
\end{aligned}
$$

由 $Z[J]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]}$ 定义

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta W[J]}{\delta J_\mu(x)}=B_c^\mu(x)\quad \frac{\delta W[J]}{\delta J'_\mu(x)}=A_c^\mu(x)\\
&\frac{\delta W[J]}{\delta \bar{\eta}(x)}=\psi_c(x)\\
&\frac{\delta W[J]}{\delta \eta(x)}=-\bar{\psi}_c(x)\\
\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\tau_a\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}&W[J]=G_a(x)\\
&\frac{\delta W[J]}{\delta U_k(x)}=\mu_k(x)\\
&\frac{\delta W[J]}{\delta V_l(x)}=\omega_l(x)
\end{aligned}\right\}\tag{3-3-14}$$

由此可得

$$\frac{\delta W[J]}{\delta K_a(x)}=G_a(x)+\bar{\psi}_c(x)\tau_a\psi_c(x)\tag{3-3-15}$$

由 Legendre 变换，引入正规顶角生成泛函

$$\begin{aligned}
\Gamma[\phi]=W[J]-\int \mathrm{d}^4x\{&\bar{\psi}_c(x)\eta(x)+\bar{\eta}(x)\psi_c(x)+J_\mu(x)B_c^\mu(x)+\\
&J'_\mu(x)A_c^\mu(x)+U_k(x)\mu_k(x)+V_l(x)\omega_l(x)+\\
&[G_a(x)+\bar{\psi}_c(x)\tau_a\psi_c(x)]K_a(x)\}
\end{aligned}\tag{3-3-16}$$

那么，有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(x)}=\bar{\eta}(x)+\bar{\psi}_c(x)\tau_aK_a(x)\\
&\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(x)}=-\eta(x)-\tau_a\psi_c(x)K_a(x)\\
&\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta G_a(x)}=-K_a(x)\\
&\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta B_c^\mu(x)}=-J_\mu(x)\\
&\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta \mu_k(x)}=-U_k(x)\\
&\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta A_c^\mu(x)}=-J'_\mu(x)\\
&\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta \omega_l(x)}=-V_l(x)
\end{aligned}\right\}\tag{3-3-17}$$

在式(3-3-12)的变换下，由正则形式的 Ward 恒等式，得

$$
\begin{aligned}
&-\partial_0 \nabla^2 \frac{1}{g}\omega_3 + \nabla^2 \frac{1}{g}\omega_4 + \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(x)}\mathrm{i}\tau_2\psi_c(x) + \bar{\psi}_c(x)\mathrm{i}\tau_2\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(x)} + \\
&\frac{1}{g}\partial^\mu \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta B_c^\mu} - 2\varepsilon_{2ab}\sigma_c^a(x)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\sigma_c^b(x)} = 0
\end{aligned}
\tag{3-3-18}
$$

这里引入 $\sigma^a(x)=aG^a(x)$ 来描述束缚态 $G^a(x)$. 由于考虑了系统在相空间中存在约束，此时正则形式的恒等式出现附加的乘子场项，但如果对乘子场取 Gauss 平均，就不会有乘子的附加项[8]. 由式(3-3-18)对场量求泛函微商导致的诸 Green 函数的关系，与位形空间生成泛函求出的诸 Green 函数的关系相同[14]. 这表明 FP 方法对该模型适用. 这里采用相空间的正则 Ward 恒等式，导出了从位形空间中的 Ward 恒等式给出的结果，其显著优点是无须作出相空间对动量的路径积分，转化到位形空间的生成泛函来讨论. 根据式(3-3-18)可得到一些关于两点顶角的 Ward 恒等式. 由于两点顶角和质量谱有关，这样就能得到 Fermi 子和规范场的质量谱. 对式(3-3-18)中的 $\psi_c(x)$ 和 $\bar{\psi}_c(z)$ 求泛函微商，有

$$
\begin{aligned}
&\bar{\psi}_c(x)\mathrm{i}\tau_2\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)} - \delta(x-z)\mathrm{i}\tau_2\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)} - \\
&\delta(x-z)\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(x)}\mathrm{i}\tau_2 + \frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)}\mathrm{i}\tau_2\psi_c(x) + \\
&\frac{1}{g}\partial_\mu\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta B_c^\mu(x)} - 2\varepsilon_{2ab}\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\sigma_c^a(x)}\sigma_c^b(x) = 0
\end{aligned}
\tag{3-3-19}
$$

在没有外源时，即 $\psi_c(x)=\bar{\psi}_c(x)=0$，并作 Fourier 变换，得

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}\mathrm{i}\tau_2 - \mathrm{i}\tau_2\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p+k) = {}& 2\varepsilon_{2ab}\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi},\sigma_a}(p+k,-p;-k)\sigma_c^b - \\
&\frac{\mathrm{i}}{g}k_\mu\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi},B_\mu}(p+k,-p;-k)
\end{aligned}
\tag{3-3-20}
$$

让 $k_\mu\to0$，$p\to0$，由于只有凝结 $\langle\bar{\psi}\tau_3\psi\rangle\neq0$，Fermi 子质量能表示为

$$
m_f = m_f^0 + \tau_3\delta m_f \tag{3-3-21}
$$

使用此性质，有

$$
\delta m_f = -\tau_1 z_\psi\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi},\sigma_1}(0,0;0)\sigma_c^3 \tag{3-3-22}
$$

为了得到束缚态的质量谱，对式(3-3-18)的 $\sigma_s(y)$，$\sigma_t(z)$ 求导，类似的讨论[14]，可得束缚态的质量谱，即

$$
m_{\sigma_1}^2 = 0 \tag{3-3-23a}
$$

$$
m_{\sigma_3}^2 = -z_{\sigma_1}^{-1}\Gamma^{(3)}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(0,0,0)\sigma_3 \tag{3-3-23b}
$$

σ_1 对应于无质量的 Goldstone Bose 子，式(3-3-23b)用了

$$z_{\sigma_1} = z_{\sigma_3} \tag{3-3-24}$$

关系，此式由 O(2)对称性确定. 由于 σ_1 是无质量的 Goldstone Bose 子，从自能中得到波函数的重整化常数

$$z_{\sigma_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}\Gamma^{(2)}_{\sigma_1}(p)\bigg|_{p^2=0} \tag{3-3-25}$$

类似地，对式(3-3-18)的 B^ν_c 求导，做同样的讨论，有

$$\frac{\mathrm{i}}{g}p_\mu\Gamma^{(2)}_{B_\nu,B_\mu}(p) = -2\sigma_c^3\Gamma^{(2)}_{B_\nu,\sigma_1}(p) \tag{3-3-26}$$

可以看出，如果没有 Fermi 子对凝聚，即 $\langle\bar{\psi}\tau_3\psi\rangle=0$，则对称性保留，即

$$p_\mu\Gamma^{(2)}_{B_\nu,B_\mu}(p) = 0 \tag{3-3-27}$$

这表明规范场 B_μ 仅具有横分量. 若有 Fermi 子对凝聚，即 $\langle\bar{\psi}\tau_3\psi\rangle\neq0$，则

$$p_\mu\Gamma^{(2)}_{B_\nu,B_\mu}(p) \neq 0 \tag{3-3-28}$$

这表明规范对称性是动力学破缺的. 式(3-3-26)两边同乘 $p_\nu^{-1}=\frac{p_\nu}{p^2}$，让 $p_\mu\to0$，有

$$\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Gamma^{(2)}_{B_\nu,B_\mu}(p) = \mathrm{i}2\frac{p_\nu}{p^2}\Gamma^{(2)}_{B_\nu,\sigma_1}(p)\sigma_c^3 \tag{3-3-29}$$

应用关系式

$$\lim_{p\to0}\Gamma^{(2)}_{B_\nu,B_\mu} = -z_B\delta_{\mu,\nu}m_B^2 \tag{3-3-30}$$

得到规范 Bose 子 B_μ 的质量

$$m_B^2 = -\lim_{p\to0}z_B^{-1}g'2\frac{p_\nu}{p^2}\Gamma^{(2)}_{B_\nu,\sigma_1}(p)\sigma_c^3 \tag{3-3-31}$$

这样就得到了已有的相同结果[14]，显然，这是不同于 Higgs 机制的.

3-3-2 Jackiw-Johnson 模型

Jackiw-Johnson 模型由如下 Lagrange 密度描述[15]

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L} &= \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + gJ_{5\mu}A_\mu \\ J_{5\mu} &= \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\end{aligned}\right\} \tag{3-3-32}$$

场 $\bar{\psi},\psi,A_\mu$ 的正则共轭动量分别为 $\pi,\bar{\pi},\pi^\mu$，即

$$\left.\begin{aligned}\pi &= \frac{\partial_{\mathrm{r}}\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = 0 \\ \bar{\pi} &= \frac{\partial_{\mathrm{r}}\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 \\ \pi^\mu &= -F^{0\mu}\end{aligned}\right\} \tag{3-3-33}$$

初级约束为

$$\Phi_1=\pi\approx 0,\quad \Phi_2=\bar{\pi}-\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0\approx 0,\quad \Phi_3=\pi^0\approx 0$$

正则 Hamilton 量密度为

$$\mathscr{H}_c=\dot{\bar{\psi}}\bar{\pi}+A_\mu\pi^\mu-\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-gJ_{5\mu}A_\mu=$$

$$\frac{1}{2}\pi_i^2+\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}-\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^i\partial_i\psi-gJ_{5\mu}A_\mu-A_0\partial_i\pi_i \tag{3-3-34}$$

总 Hamilton 量为

$$H_{\mathrm{T}}=H_c+\int\mathrm{d}^3x\lambda^i\Phi_i \tag{3-3-35}$$

由初级约束 Φ_1,Φ_2 的自洽性条件给出乘子 $\lambda^1(x),\lambda^2(x)$ 满足的方程. 次级约束为

$$\chi=\{\Phi_3,H_{\mathrm{T}}\}=\{\pi^0,H_{\mathrm{T}}\}=\partial_i\pi^i+gJ_{50}\approx 0 \tag{3-3-36}$$

此外,再无其他约束了.

不难验证,$\Phi_3=\pi^0$ 为第一类约束;$\Phi_1=\pi\approx 0,\Phi_2=\bar{\pi}-\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0\approx 0,\chi=\partial_i\pi^i+gJ_{50}\approx 0$ 为第二类约束,它们的线性组合 $\Phi_4=\partial_i\pi^i-g(\bar{\pi}\gamma_5\psi+\bar{\psi}\gamma_5\pi)$ 为第一类约束. 因此,第一类约束为 Φ_3,Φ_4;第二类约束为 Φ_1,Φ_2. 对第一类约束相应地选取规范条件

$$\Omega_1=\partial_i\pi^i+\partial_i\partial_iA_0\approx 0,\Omega_2=\partial_iA^i\approx 0 \tag{3-3-37}$$

由 FS 量子化方案,对复合场也引入外源,略去与场量无关的项,则 Green 函数的生成泛函为

$$\begin{aligned}Z[J]=\int&\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}\pi^\mu\delta(\Omega_1)\delta(\Omega_2)\cdot\\&\delta(\Phi_3)\delta(\Phi_4)\delta(\Phi_1)\delta(\Phi_2)\cdot\\&\exp\{\mathrm{i}\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J_\mu A_\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+\\&\bar{\psi}\psi K+\bar{\psi}\gamma_5\psi K_5]\}\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]}\end{aligned} \tag{3-3-38}$$

式中:J 代表所有的外源. $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\dot{\psi}\pi+\dot{\bar{\psi}}\pi+\dot{A}_\mu\pi^\mu-\mathscr{H}_c$. 利用 δ-函数的性质,上式可写为

$$\begin{aligned}Z[J]=\int&\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}\pi^\mu\mathscr{D}\mu_k\mathscr{D}\omega_l\cdot\\&\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_\mu A_\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+\bar{\psi}\psi K+\right.\\&\left.\bar{\psi}\gamma_5\psi K_5+U_k\mu_k+V_l\omega_l]\right\}\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]}\end{aligned} \tag{3-3-39}$$

式中:$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\omega_l\Omega_l+\mu_k\Phi_k$;$\mu_k,\omega_l$ 为乘子场. 在下列变换下,

$$\left.\begin{array}{l}\delta\psi(x)=\mathrm{i}\alpha(x)\gamma_5\psi(x), \quad \delta\pi(x)=0 \\ \delta\bar{\pi}(x)=\bar{\psi}\alpha(x)\gamma_5\gamma^0, \quad \delta A_\mu(x)=-\dfrac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\alpha(x) \\ \delta\pi_\mu(x)=0\end{array}\right\} \tag{3-3-40}$$

$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$不变，且 $\delta(\omega_l\Omega_l+\mu_k\Phi_k)=-\dfrac{\mathrm{i}}{g}\nabla^2\partial_0\alpha(x)-\dfrac{\mathrm{i}}{g}\omega_2\nabla^2\alpha(x)$. 定义

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta W[J]}{\delta J_\mu(x)}=A_c^\mu(x), \quad \dfrac{\delta W[J]}{\delta\bar{\eta}(x)}=\psi_c(x) \\ \dfrac{\delta W[J]}{\delta\eta(x)}=-\bar{\psi}_c(x), \quad \dfrac{\delta W[J]}{\delta U_k(x)}=\mu_k(x) \\ \dfrac{\delta W[J]}{\delta V_l(x)}=\omega_l(x) \\ -\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\delta}{\delta\eta(x)}\dfrac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}W[J]=G(x) \\ -\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma_5\dfrac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}W[J]=G_5(x)\end{array}\right\} \tag{3-3-41}$$

由此可得

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta W[J]}{\delta K(x)}=G(x)+\bar{\psi}_c(x)\psi_c(x) \\ \dfrac{\delta W[J]}{\delta K_5(x)}=G_5(x)+\bar{\psi}_c(x)\gamma_5\psi_c(x)\end{array}\right\} \tag{3-3-42}$$

作 Legendre 变换，类似于 3-3-1 小节中的讨论，则得

$$\begin{aligned}&\partial_0\nabla^2\omega_1(x)-\nabla^2\omega_2(x)+\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(x)}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\psi_c(x)- \\ &\bar{\psi}_c(x)\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(x)}-\frac{\mathrm{i}}{2g}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta A_c^\mu(x)}+ \\ &\sigma_c(x)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\lambda_c(x)}-\lambda_c(x)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\sigma_c(x)}=0\end{aligned} \tag{3-3-43}$$

这里引进标量和赝标量场 $\sigma(x)$，$\lambda(x)$，即 $\sigma(x)=aG(x)$，$\lambda(x)=aG_5(x)$. 对式(3-3-43)关于 $\psi_c(y)$，$\bar{\psi}_c(z)$求泛函微商，可得

$$\begin{aligned}&\delta(x-z)\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)}-\delta(x-y)\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(x)}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5- \\ &\bar{\psi}_c(x)\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)}+\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\psi_c(x)-\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2g}\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta A_c^\mu(x)} - \frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\sigma_c(x)}\lambda_c(x) +$$

$$\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\lambda_c(x)}\sigma_c(x) = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}44)$$

此结果和已有的相同[14]，在没有外源时，当选择如下破缺：

$$\langle\bar{\psi}(x)\psi(x)\rangle \neq 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}45\text{a})$$

$$\langle\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma_5\psi(x)\rangle \neq 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}45\text{b})$$

作 Fourier 变换，有

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p+k) + \Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5 = \frac{1}{2g}k_\mu\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi};A_\mu}(p+k,-p;-k) +$$

$$\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi};\lambda}(p+k,-p;-k)\sigma_c \qquad (3\text{-}3\text{-}46)$$

当 $k_\mu \to 0$，得 Fermi 子质量

$$m_f = z_\psi^{-1}\gamma_5\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi};\lambda}(0,0;0)\sigma_c \qquad (3\text{-}3\text{-}47)$$

z_ψ 为波函数的重整化常数. 同理，对式(3-3-43)中 A_c^μ 求导，类似可得

$$\sigma_c\Gamma^{(2)}_{A_\nu,\lambda}(p) - \frac{\mathrm{i}}{2g}p_\mu\Gamma^{(2)}_{A_\nu,A_\nu}(p) = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}48)$$

由式(3-3-48)，可以看出，如果手征对称不是自发破缺，则规范场仅具有横分量. 由此可得规范场 A_μ 的质量

$$m_A^2 = \lim_{q\to 0} z_A^{-1}2g\frac{q_\mu}{q^2}\Gamma^{(2)}_{A_\mu,\lambda}(q)\sigma_c \qquad (3\text{-}3\text{-}49)$$

式中：z_A 为重整化常数. 上面得到的结果和已有的结果一致[14].

这里从约束 Hamilton 系统理论出发，利用 FS 量子化方法，给出了 Cornwall-Norton 和 Jackiw-Johnson 模型的路径积分量子化，基于约束Hamilton 系统的正则 Ward 恒等式，分别导出了这两个系统的 Ward 恒等式，得到包括 Fermi 子和束缚态的质量谱，这样就从另一个角度来研究，也给出了相同的结果. 但传统研究是从位形空间中的生成泛函和 Ward 恒等式出发来讨论的，由于所研究的系统在相空间存在约束，此处用约束 Hamilton 系统理论，给出了系统的路径积分量子化，得到相空间中 Green 函数的生成泛函，更具有一般的意义. 上面所发展的应用正则 Ward 恒等式方法，可进一步推广到非 Abel 规范理论的动力学对称破缺研究中去，特别是对于相空间路径积分中对动量不可积(或积分困难)的系统有重要意义.

3-4 杨-Mills 场论中的应用

色动力学 SU(3)规范不变 Lagrange 量为[15]

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a+\bar{\psi}[\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}gB_\mu^aT^a)-m]\psi \tag{3-4-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu B_\nu^a-\partial_\nu B_\mu^a+gf_{bc}^aB_\mu^bB_\nu^c \tag{3-4-2}$$

这里 f_{bc}^a 为 SU(3)的结构常数； T^a 为 SU(3)的生成元，$T^a=\lambda^a/2(a=1,2,\cdots,8)$，其中 λ^a 为 Gell-Mann 矩阵；$\psi,\bar{\psi}$ 和 B_μ^a 的正则动量分别为

$$\pi=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0,\quad \bar{\pi}=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}=0,\quad \pi_a^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{B}_\mu^a}=-F_a^{0\mu} \tag{3-4-3}$$

系统的正则 Hamilton 量

$$\begin{aligned}H_c=&\int\mathrm{d}^3x\mathscr{H}_c=\int\mathrm{d}^3x(\pi\dot{\psi}+\dot{\bar{\psi}}\bar{\pi}+\pi_a^\mu\dot{B}_\mu^a-\mathscr{L})=\\&\int\mathrm{d}^3x\Big[\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a-B_0^a(\mathrm{D}_{bi}^a\pi_b^i-\mathrm{i}g\pi T^a\psi)+\\&\frac{1}{4}F_{ij}^aF_a^{ij}+\frac{1}{2}\pi\gamma^0\gamma^i(\partial_i\psi)-\frac{1}{2}(\partial_i\pi)\gamma^0\gamma^i\psi-\\&\mathrm{i}g\pi\gamma^0\gamma^iT^aB_i^a\psi-\mathrm{i}m\pi\gamma^0\psi\Big]\end{aligned} \tag{3-4-4}$$

式中

$$\mathrm{D}_{b\mu}^a=\delta_b^a\partial_\mu+gf_{bc}^aB_\mu^c \tag{3-4-5}$$

从式(3-4-3)可得初级约束. 其初级约束为

$$\theta_1=\pi-\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0\approx0,\quad \theta_2=\bar{\pi}\approx0,\quad \Lambda_{1a}=\pi_a^0\approx0 \tag{3-4-6}$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}}=\int\mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_c+\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\mu_1^a\Lambda_{1a}) \tag{3-4-7}$$

由 $\theta_i(i=1,2)$的稳定性条件$\{\theta_i,H_{\mathrm{T}}\}\approx0$，可得出决定 Lagrange 乘子 $\lambda_i(i=1,2)$的方程. 由约束 Λ_{1a}的稳定性条件$\{\pi_a^0,H_{\mathrm{T}}\}\approx0$，产生次级约束. 其次级约束为

$$\phi_a^1=\mathrm{D}_{bi}^a\pi_b^i-\mathrm{i}g\pi T^a\psi\approx0 \tag{3-4-8}$$

次级约束的自洽性条件，不再给出任何新的约束. 对约束作线性组合

$$\Lambda_{2a}=\phi_a^1+\mathrm{i}g\pi T^a(\theta_1\psi+\bar{\psi}\theta_2)\approx0 \tag{3-4-9}$$

不难验证，约束 Λ_{1a}和Λ_{2a}为第一类约束，而 θ_1 和 θ_2 为第二类约束.

采用 FS 路径积分量子化方案，对每一个第一类约束需选择一个规范条件. 考虑到库仑规范

$$\Omega_2^a=\partial_iB_i^a\approx0 \tag{3-4-10}$$

由 Ω_2^a 的自洽性$\partial_0\Omega_2^a\approx0$，可以给出另外一个规范条件，即

$$\Omega_1^a=\partial_i\pi_i^a+M^{ab}B_b^0\approx0 \tag{3-4-11a}$$

式中

$$M^{ac}=\delta^{ac}\partial^i\partial_i-gf^a_{bc}B^b_i\partial^i \tag{3-4-11b}$$

因子 $\det|\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}|$ 不依赖于场变量，可从生成泛函式(3-1-28)中略去，而

$$\det|\{\Lambda_a,\Omega_b\}|=\det|M_{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})| \tag{3-4-12}$$

因此，依据式(3-1-28)、式(3-1-30)，Green 函数的生成泛函可以写为

$$\begin{aligned}
&Z[J^\mu,K_\mu,\bar{\xi},K,\xi,\bar{K},\bar{\zeta},\zeta,M,X,Y]=\\
&\int\mathscr{D}B^a_\mu\,\mathscr{D}\pi^\mu_a\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}\bar{\psi}\,\mathscr{D}\bar{\pi}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\bar{C}\,\mathscr{D}\mu\,\mathscr{D}\omega\,\mathscr{D}\nu\cdot\\
&\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}^p_{\mathrm{eff}}+J^\mu_aB^a_\mu+K^a_\mu\pi^\mu_a+\bar{\xi}\psi+\pi K+\bar{\psi}\xi+\right.\\
&\left.\bar{K}\,\bar{\pi}+\bar{\zeta}^aC_a+\bar{C}_a\zeta^a+M_k\mu_k+X_l\omega_l+Y_i\nu_i]\right\}
\end{aligned} \tag{3-4-13}$$

式中

$$\mathscr{L}^p_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}^p+\mathscr{L}_m+\mathscr{L}_{gh} \tag{3-4-14a}$$

$$\mathscr{L}^p=\pi\dot{\psi}+\dot{\bar{\psi}}\bar{\pi}+\pi^\mu_a\dot{B}^a_\mu-\mathscr{H}_c \tag{3-4-14b}$$

$$\mathscr{L}_m=\mu^a_k\Lambda^a_k+\omega^a_l\Omega^a_l+\nu_i\theta_i \tag{3-4-14c}$$

$$\mathscr{L}_{gh}=\bar{C}_aM^{ab}C_b=-\partial^i\bar{C}_aD^a_{ib}C_b \tag{3-4-14d}$$

其中 μ^a_k,ω^a_l 和 ν_i 为乘子场. 为简单起见，式(3-4-13)可改写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^a\,\mathscr{D}\pi_a\,\exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}^p_{\mathrm{eff}}+J_a\phi^a+K^a\pi_a)\right\} \tag{3-4-15}$$

式中：ϕ^a 代表场变量，$\phi^a=(B^a_\mu,\psi,\bar{\psi},C,\bar{C},\mu,\omega,\nu)$；$\pi_a$ 为相应的正则动量，$\pi_a=(\pi^\mu_a,\pi,\bar{\pi})$；$J_a$ 和 K^a 分别为相应于 ϕ^a 和 π_a 的外源.

这里不去研究生成泛函式(3-4-13)是否可通过对动量积分得到简化，而是直接讨论在正则变量变换下生成泛函的变换性质. 现考虑正则变量的定域无穷小变换：

$$\left.\begin{aligned}
B^{a\prime}_\mu(x)&=B^a_\mu(x)+D^a_{b\mu}\varepsilon^b(x)\\
\pi'^\mu_a(x)&=\pi^\mu_a(x)+gf^c_{ab}\pi^\mu_c(x)\varepsilon^b(x)\\
\psi'(x)&=\psi(x)+igT^b\psi(x)\varepsilon^b(x)\\
\pi'(x)&=\pi(x)-ig\pi(x)T^b\varepsilon^b(x)\\
\bar{\psi}'(x)&=\bar{\psi}(x)-ig\bar{\psi}(x)T^b\varepsilon^b(x)\\
\bar{\pi}'(x)&=\bar{\pi}(x)+ig\bar{\pi}(x)T^b\varepsilon^b(x)
\end{aligned}\right\} \tag{3-4-16}$$

并将式(3-4-16)变换的 Jacobi 行列式，记为$\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$. 式(3-4-14b)中的 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 在式(3-4-16)变换下是不变的，而

$$\delta(\bar{C}_a M^{ab} C_b) = E_b^i(\bar{C},C)\partial_i \varepsilon^b(x) + E_b^0(\bar{C},\partial_i C,B_i)\varepsilon^b(x) \tag{3-4-17a}$$

$$\delta\theta_1 = 0 \tag{3-4-17b}$$

$$\delta\theta_2 = \mathrm{i}g\bar{\pi}T^b\varepsilon^b(x) = \Theta_{2b}(\bar{\pi})\varepsilon^b(x) \tag{3-4-17c}$$

$$\delta\Lambda_{1a} = gf^a_{bc}\pi^0_c\varepsilon^b(x) = \Lambda_{1ab}(\pi^0)\varepsilon^b(x) \tag{3-4-17d}$$

$$\delta\Lambda_{2a} = \Lambda^i_{2ab}(\pi^i)\partial_i\varepsilon^b(x) + \Lambda_{2ab}(B_i,\pi^i,\psi,\bar{\psi},\bar{\pi})\varepsilon^b(x) \tag{3-4-17e}$$

$$\begin{aligned}\delta\Omega_1^a = {} & \Omega_{1b}^{a0}\,\nabla^2\partial_0\varepsilon^b(x) + \Omega_{1b}^a(B_0)\,\nabla^2\varepsilon^b(x) + \\ & \Omega_{1b}^{ai0}(B_i)\partial_i\partial_0\varepsilon^b(x) + \Omega_{1b}^{ai}(\pi^i,\partial_i B_0,B_\mu)\partial_i\varepsilon^b(x) + \\ & \Omega_{1b}^{a1}(\partial_i\pi^i,\partial_i B_0,B_\mu,\nabla^2 B_0)\varepsilon^b(x)\end{aligned} \tag{3-4-17f}$$

$$\begin{aligned}\delta\Omega_2^a = {} & \Omega_{2b}^a\,\nabla^2\varepsilon^b(x) + \Omega_{2b}^{ai}(B_i)\partial_i\varepsilon^b(x) + \\ & \Omega_{2b}^{a0}(\partial_i B_i)\varepsilon^b(x)\end{aligned} \tag{3-4-17g}$$

让

$$E_b = E_b^0 - \partial_i E_b^i \tag{3-4-18}$$

$$\begin{aligned}F_b = {} & \nu_2\Theta_{2b} + \mu_1^a\Lambda_{1ab} + \mu_2^a\Lambda_{2ab} - \partial_i(\mu_2^a\lambda_{2ab}^i) - \partial_0\,\nabla^2(\omega_1^a\Omega_{1b}^{a0}) + \\ & \nabla^2(\omega_1^a\Omega_{1b}^a) + \partial_0\partial_i(\omega_1^a\Omega_{1b}^{ai0}) - \partial_i(\omega_1^a\Omega_{1b}^{ai}) + \omega_1^a\Omega_{1b}^{a1} + \\ & \nabla^2(\omega_2^a\Omega_{2b}^a) - \partial_i(\omega_2^a\Omega_{2b}^{ai}) + \omega_2^a\Omega_{2b}^{a0}\end{aligned} \tag{3-4-19}$$

生成泛函式(3-4-15)在式(3-4-16)变换下的不变性表明：

$$\left.\frac{\delta Z}{\delta\varepsilon^b(x)}\right|_{\varepsilon^b(x)=0} = 0 \tag{3-4-20a}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\delta\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^b}\right)_{\varepsilon^b=0} Z[J,K] + \int\mathscr{D}\phi^a\,\mathscr{D}\pi_a\big[E_b + F_b - \partial_\mu J_b^\mu + \\ & gf^a_{bc}B^c_\mu J^\mu_a + gf^c_{ab}\pi^\mu_c K^a_\mu + \mathrm{i}g\bar{\xi}T^b\psi - \\ & \mathrm{i}g\pi T^b K - \mathrm{i}g\bar{\psi}T^b\xi + \mathrm{i}g\bar{K}T^b\bar{\pi}\big]\cdot \\ & \exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\big[\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}} + J_a\phi^a + K^a\pi^a\big]\right\} = 0\end{aligned} \tag{3-4-20b}$$

或者

$$\left[\left(\frac{\delta\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^b}\right)_{\varepsilon^b=0} + E_b + F_b - \partial_\mu J_b^\mu + gf^a_{bc}J^\mu_a\frac{\delta}{\delta J_c^\mu} + \right.$$

$$gf^c_{ab}K^a_\mu \frac{\delta}{\delta K^c_\mu} + \mathrm{i}g\bar{\xi}T^b \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} - \mathrm{i}gKT^b \frac{\delta}{\delta K} - \mathrm{i}g\xi T^b \frac{\delta}{\delta\xi} +$$

$$\mathrm{i}g\bar{K}T^b \frac{\delta}{\delta\bar{K}}\Big]Z[J,K] = 0 \tag{3-4-21}$$

这里 E_b 依赖于鬼场 C_a 和 $\overline{C}_a$，但 F_b 依赖于乘子场. 和通常一样，让 $Z[J,K]=\exp\{\mathrm{i}W[J,K]\}$. 根据顶角生成泛函的定义，可以通过泛函 Legendre 变换得到

$$\Gamma[\phi^a,\pi_a] = W[J,K] - \int \mathrm{d}^4x(J_a\phi^a + K^a\pi_a) \tag{3-4-22}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J_a(x)} &= \phi^a(x), \quad & \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^a(x)} &= -J_a(x) \\ \frac{\delta W}{\delta K^a(x)} &= \pi_a(x), \quad & \frac{\delta\Gamma}{\delta\pi_a(x)} &= -K^a(x) \end{aligned}\right\} \tag{3-4-23}$$

这时式(3-4-21)也可以写为

$$\left(\frac{\delta\,\overline{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^b}\right)_{\varepsilon^b=0} + E_b + F_b + \partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta B^b_\mu} - gf^a_{bc}B^a_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta B^c_\mu} -$$

$$gf^a_{bc}\pi^\mu_a \frac{\delta\Gamma}{\delta\pi^\mu_c} - \mathrm{i}g\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}T^b\psi + \mathrm{i}g\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi}T^b\pi +$$

$$\mathrm{i}g\bar{\psi}T^b\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} - \mathrm{i}g\,\bar{\pi}T^b\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\pi}} = 0 \tag{3-4-24}$$

对式(3-4-24)关于 $\psi_k(x_2)$ 和 $\bar{\psi}_l(x_3)$ 求泛函微商，并让所有场为 0(包括乘子场)，即 $\phi^a=\pi_a=0$，可得

$$\partial^\mu_{x_1} \left.\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}_l(x_3)\delta\psi_k(x_2)\delta B^\mu_b(x_1)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} =$$

$$g(T^b)_{k\lambda}\delta(x_1-x_2)\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}_l(x_3)\delta\psi_\lambda(x_1)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} -$$

$$g(T^b)_{l\lambda}\delta(x_1-x_3)\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}_\lambda(x_3)\delta\psi_k(x_2)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} \tag{3-4-25}$$

对式(3-4-24)关于 $B^a_\nu(x_2)$ 和 $B^c_\lambda(x_3)$ 求泛函微商，并让 $\phi^a=\pi^a=0$，可得

$$\partial^\mu_{x_1}\left.\frac{\delta^3\Gamma}{\delta B^\lambda_c(x_3)\delta B^\nu_a(x_2)\delta B^\mu_b(x_1)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} =$$

$$gf^a_{b\sigma}\delta(x_1-x_2)\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta B^\lambda_c(x_3)\delta B^\nu_\sigma(x_1)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} +$$

$$gf^c_{b\sigma}\delta(x_1-x_3)\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta B^\nu_a(x_2)\delta B^\lambda_\sigma(x_1)}\right|_{\phi^a=\pi_a=0} \tag{3-4-26}$$

式(3-4-25)、式(3-4-26)表明了传播子和正规顶角间存在的关系. 通过 Fourier 变换把式(3-4-25)、式(3-4-26)转移到动量表象,可得到传播子和正规顶角在动量空间中的相应关系式. 对式(3-4-24)关于 $\pi_a^\nu(x_2)$ 和 $\pi_c^\lambda(x_3)$ 求泛函微商,并让 $\phi^a=\pi_a=0$,可得

$$\partial_{x_1}^{\mu}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\pi_c^\lambda(x_3)\delta\pi_a^\nu(x_2)\delta B_b^\mu(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}=$$

$$gf_{b\sigma}^{a}\delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\pi_c^\lambda(x_3)\delta\pi_\sigma^\nu(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}+$$

$$gf_{b\sigma}^{c}\delta(x_1-x_3)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\pi_a^\nu(x_2)\delta\pi_\sigma^\lambda(x_1)}\bigg|_{\phi^a=\pi_a=0}\tag{3-4-27}$$

相空间中的传播子在文献[16]中有讨论. 方程式(3-4-27)表明了关于 π 的传播子应当满足的关系. 类似地,对方程式(3-4-24)关于场变量求多次泛函微商,可得到正规顶角在相空间中多种形式的正则 Ward 恒等式.

在式(3-4-16)变换下,没有考虑鬼场 $C_a(x)$ 和 $\overline{C}_a(x)$ 的变化. 若规范场和鬼场的变换都考虑,就可以得到更一般的规范场-鬼场的正规顶角.

为了下面的应用,先列出由 Fermi 场 $\psi(x)$ 构成的 SU(3)矢量流、轴矢流、标量流和赝标量流,即

$$\left.\begin{aligned}V_\mu^a(x)&=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu T^a\psi(x),A_\mu^a(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5T^a\psi(x)\\S^a(x)&=\bar{\psi}(x)T^a\psi(x),P^a(x)=\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma_5T^a\psi(x)\end{aligned}\right\}\tag{3-4-28}$$

分别对上述流引进外源 $v_a^\mu(x)$,$a_a^\mu(x)$,$s_a(x)$ 和 $p_a(x)$,可得到扩展的生成泛函,即

$$Z[J,K,v,a,s,p]=\int\mathscr{D}\phi^a\mathscr{D}\pi_a\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}+J_a\phi^a+\right.$$

$$\left.K^a\pi_a+v_a^\mu V_\mu^a+a_a^\mu A_\mu^a+s_aS^a+p_aP^a]\right\}\tag{3-4-29}$$

在手征变换

$$\left.\begin{aligned}\psi'(x)&=(1+\epsilon^a(x)\gamma_5T^a)\psi(x)\\\pi'(x)&=\pi(x)(1-\mathrm{i}\epsilon^a(x)\gamma_5T^a)\\\bar{\psi}'(x)&=\bar{\psi}(x)(1+\mathrm{i}\epsilon^a(x)\gamma_5T^a)\\\bar{\pi}'(x)&=1-\mathrm{i}\epsilon^a(x)\bar{\pi}(x)\gamma_5T^a\end{aligned}\right\}\tag{3-4-30}$$

下,正则作用量的改变

$$\delta I^{\mathrm{P}}=\int\mathrm{d}^4x\,\epsilon^a(x)(\partial^\mu A_\mu^a-2mP^a-gf_{bc}^aA_\mu^bB^{c\mu})\tag{3-4-31}$$

式(3-4-30)变换下的 Jacobi 行列式为 1. 由于

$$\delta\theta_2=-\mathrm{i}\epsilon^a(x)\theta_2\gamma_5T^a$$

生成泛函式(3-4-29)在式(3-4-30)变换下的不变性表明

$$\int \mathscr{D}\phi^a \mathscr{D}\pi_a [\partial^\mu A_\mu^a - 2mP^a - gf_{bc}^a A_\mu^b B^{c\mu} - \mathrm{i}\nu_2\theta_2\gamma_5 T^a +$$
$$\mathrm{i}\bar{\xi}\gamma_5 T^a\psi - \mathrm{i}\pi\gamma_5 T^a K + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_5 T^a\xi - \mathrm{i}\bar{K}\gamma_5 T^a \bar{\pi} + v_\mu^b f_{bc}^a A^{c\mu} +$$
$$a_\mu^b f_{bc}^a V^{c\mu} - s^b d_{bc}^a P^c + p^b d_{bc}^a S^c]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}} + J_a\phi^a +\right.$$
$$\left. K^a\pi_a + v_a^\mu V_\mu^a + a_a^\mu A_\mu^a + s_a S^a + p_a P^a]\right\} = 0 \tag{3-4-32}$$

让所有的外源为 0(且 $\theta_2\approx 0$),则有

$$\langle 0 \mid [\partial^\mu \hat{A}_\mu^a(x) - 2m\hat{P}^a(x) -$$
$$gf_{bc}^a \hat{A}_\mu^b(x)\hat{B}^{c\mu}(x)] \mid 0\rangle = 0 \tag{3-4-33}$$

这就是轴矢流部分守恒(PCAC)的表达式. 对方程式(3-4-32)关于$v_\nu^b(y)$和$v_\lambda^c(z)$求微商,并让所有外源为 0,可得

$$\langle 0| T^* [(\partial^\mu \hat{A}_\mu^a(x) - 2m \hat{P}^a(x) -$$
$$gf_{de}^a \hat{A}_\mu^d(x) \hat{B}^{e\mu}(x)) \hat{V}_\nu^b(y) \hat{V}_\lambda^c(z)]|0\rangle =$$
$$\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y)[f_{be}^a\langle 0| T[\hat{A}_\nu^e(x) \hat{V}_\lambda^c(y)]|0\rangle] +$$
$$\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-z)[f_{ce}^a\langle 0| T[\hat{A}_\lambda^e(x) \hat{V}_\nu^b(y)]|0\rangle] \tag{3-4-34}$$

式(3-4-34)为 AVV 顶角的轴矢 Ward 恒等式. 当式(3-4-33)、式(3-4-34)中$f_{bc}^a=0$时,其结果在文献[5]中已给出. 在文献[5]中所用的 Lagrange 量虽不是规范不变的,但是奇异的. 在相空间存在一些固有约束. 在文献[5]中,作者在推导 Ward 恒等式时,没有计入约束,这里从另一个角度作了补充讨论.

众所周知,在杨-Mills 理论的 BRS 变换中关于鬼场的变换是非线性的. 这里将找出一个非定域线性变换,在此变换下使系统的 $\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}(x)$不变,从而可推导出正规顶角的另外的 Ward 恒等式. 显然,在

$$\left.\begin{aligned} C^{a\prime} &= C^a + \mathrm{i}g(T^\sigma)_{ab}\varepsilon^\sigma(x)C^b \\ A_\mu^{a\prime} &= A_\mu^a + \mathrm{D}_{\sigma\mu}^a\varepsilon^\sigma(x) \end{aligned}\right\} \tag{3-4-35}$$

变换下,$\mathrm{D}_{b\mu}^a C^b$ 的变更为

$$\mathrm{D}_{b\mu}^{a\prime} C^b = \mathrm{D}_{b\mu}^a C^b + \mathrm{i}g(T^\sigma)_{ab}\varepsilon^\sigma(x)\mathrm{D}_{e\mu}^b C^e \tag{3-4-36}$$

因此,如果进一步考虑 $\bar{C}^a$ 按

$$\partial^\mu\bar{C}^{a\prime} = \partial^\mu\bar{C}^a - \mathrm{i}g\partial^\mu\bar{C}^b(T^\sigma)_{ba}\varepsilon^\sigma(x) \tag{3-4-37}$$

变换,那么$\partial^\mu\bar{C}^a\mathrm{D}_{b\mu}^a C^b$ 在式(3-4-35)、式(3-4-37)变换下是不变的,也就是说,$\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}(x)$在下列非定域变换下保持不变,即

$$C^{a\prime}(x) = C^a(x) + \mathrm{i}g(T^\sigma)_{ab}\varepsilon^\sigma(x)C^b(x) \tag{3-4-38a}$$

$$\overline{C}^{a\prime}(x) = \overline{C}^{a}(x) - \mathrm{i}g\overline{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\varepsilon^{\sigma}(x) +$$
$$\frac{\mathrm{i}g}{\Box}\partial_{\mu}[\overline{C}^{b}(T^{\sigma})_{ba}\,\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)] \tag{3-4-38b}$$
$$A_{\mu}^{a\prime}(x) = A_{\mu}^{a}(x) + \mathrm{D}_{\sigma\mu}^{a}\varepsilon^{\sigma}(x) \tag{3-4-38c}$$

式中$\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$. 式(3-4-38b)又可写为

$$\overline{C}^{a\prime}(x) = \overline{C}^{a}(x) - \mathrm{i}g\overline{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\varepsilon^{\sigma}(x) +$$
$$g\int \mathrm{d}^4 y\Delta_0(x,y)\,\partial_{\mu}[\overline{C}^{b}(y)(T^{\sigma})_{ba}\,\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(y)] \tag{3-4-39}$$

式中

$$\Box\Delta_0(x,y) = \mathrm{i}\delta^4(x-y) \tag{3-4-40}$$

可见，式(3-4-38)的变换为线性非定域变换.

现考虑与式(3-4-38)相应的相空间变量的变换：

$$\left.\begin{aligned}
\psi'(x) &= \psi(x) + \mathrm{i}g\varepsilon^{\sigma}(x)T^{\sigma}\psi(x)\\
\pi'(x) &= \pi(x) - \mathrm{i}g\pi(x)\varepsilon^{\sigma}(x)T^{\sigma}\\
\overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x) - \mathrm{i}g\overline{\psi}(x)\varepsilon^{\sigma}(x)T^{\sigma}\\
\overline{\pi}'(x) &= \overline{\pi}(x) + \mathrm{i}g\varepsilon^{\sigma}(x)\overline{\pi}(x)T^{\sigma}\\
A_{\mu}^{a\prime} &= A_{\mu}^{a}(x) + \mathrm{D}_{\sigma\mu}^{a}\varepsilon^{\sigma}(x)\\
\pi_{a}^{\mu\prime}(x) &= \pi_{a}^{\mu}(x) + gf_{\sigma c}^{a}\pi_{c}^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)\\
C^{a\prime}(x) &= C^{a}(x) + \mathrm{i}g(T^{\sigma})_{ab}\varepsilon^{\sigma}(x)C^{b}(x)\\
\overline{C}^{a\prime}(x) &= \overline{C}^{a}(x) - \mathrm{i}g\overline{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\varepsilon^{\sigma}(x) +\\
&\quad \frac{\mathrm{i}g}{\Box}\partial_{\mu}[\overline{C}^{b}(x)(T^{\sigma})_{ba}\,\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)]
\end{aligned}\right\} \tag{3-4-41}$$

在式(3-4-41)变换下，$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}(x) + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}}(x)$是不变的，而 $\mathscr{L}_m$ 在式(3-4-41)变换下的变更为

$$\delta\mathscr{L}_m = F_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \tag{3-4-42}$$

式中

$$F_{\sigma} = \nu_2\theta_{2\sigma} + \mu_1^a\Lambda_{1\sigma}^a + \mu_2^a\Lambda_{2\sigma}^a - \partial_i(\mu_2^a\Lambda_{2\sigma}^{ai}) - \partial_0\nabla^2(\omega_1^a\Omega_{\sigma}^{a0}) +$$
$$\nabla^2(\omega_1^a\Omega_{1\sigma}^a) + \partial_0\partial_i(\omega_1^a\Omega_{1\sigma}^{ai0}) - \partial_i(\omega_1^a\Omega_{1\sigma}^{ai}) + \omega_1^a\Omega_{1\sigma}^{a1} +$$
$$\nabla^2(\omega_2^a\Omega_{2\sigma}^a) - \partial_i(\omega_2^a\Omega_{2\sigma}^{ai}) + \omega_2^a\Omega_{2\sigma}^{a0} \tag{3-4-43}$$

其中 $\theta_{2\sigma}, \Lambda_{i\sigma}^{\sigma}, \Omega_{i\sigma}^{a}$ 等均为正则变量及其微商的函数. 根据生成泛函式（3-4-13）在式（3-4-41）变换下的不变性，正则 Ward 恒等式为

$$
\begin{aligned}
&\Big\{ \mathrm{i}F_\sigma + \mathrm{i}g\bar{\xi}T^\sigma \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} - \mathrm{i}gKT^\sigma \frac{\delta}{\delta K} - \mathrm{i}g\xi T^\sigma \frac{\delta}{\delta\xi} + \\
&\quad \mathrm{i}g\overline{K}T^\sigma \frac{\delta}{\delta\overline{K}} - \mathrm{i}\,\partial_\mu J^\mu_\sigma + gf^a_{\sigma c}J^\mu_a \frac{\delta}{\delta J^\mu_c} + \\
&\quad gf^a_{\sigma c}K^a_\mu \frac{\delta}{\delta K^c_\mu} + \mathrm{i}g\bar{\zeta}_a(T^\sigma)_{ab} \frac{\delta}{\delta\bar{\zeta}_b} - \mathrm{i}g\zeta_a(T^\sigma)_{ba} \frac{\delta}{\delta\zeta_b} + \\
&\quad \mathrm{i}g\,\partial^\mu\Big[\partial_\mu\Big(\zeta_a \frac{1}{\Box}\Big)(T^\sigma)_{ba} \frac{\delta}{\delta\zeta_b}\Big]\Big\} Z[J,K] = 0 \qquad (3\text{-}4\text{-}44)
\end{aligned}
$$

让 $Z[J,K] = \exp\{\mathrm{i}W[J,K]\}$，并施行泛函 Legendre 变换，则

$$
\Gamma[\phi,\pi] = W[J,K] - \int \mathrm{d}^4x(J\phi + K\pi) \qquad (3\text{-}4\text{-}45)
$$

于是式（3-4-44）可化为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}F_\sigma - \mathrm{i}g \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}T^\sigma\psi + \mathrm{i}g\pi T^\sigma \frac{\delta\Gamma}{\delta\pi} + \mathrm{i}g\bar{\psi}T^\sigma \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} - \mathrm{i}g\bar{\pi}T^\sigma \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\pi}} + \\
&\mathrm{i}\,\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta B^\sigma_\mu} - gf^a_{\sigma c}B^c_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta B^a_\mu} - gf^a_{\sigma c}\pi^\mu_c \frac{\delta\Gamma}{\delta\pi^\mu_a} - \mathrm{i}gC^a(T^\sigma)_{ab} \frac{\delta\Gamma}{\delta C^b} + \\
&\mathrm{i}g\overline{C}^a(T^\sigma)_{ba} \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}^b} - \mathrm{i}g\,\partial^\mu\Big[\partial_\mu\Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}^a}\frac{1}{\Box}\Big)(T^\sigma)_{ba}\overline{C}^b\Big] = 0 \qquad (3\text{-}4\text{-}46)
\end{aligned}
$$

对式（3-4-46）关于 B^a_ν（x_2）和 B^b_λ（x_3）求泛函微商，并让所有场（包括乘子场）为 0，可得

$$
\partial^x_\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\partial B^\sigma_\mu(x)\delta B^a_\nu(x_2)\delta B^b_\lambda(x_3)} = \mathrm{i}gf^\rho_{\sigma a}\delta(x - x_2) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta B^\rho_\nu(x)\delta B^b_\lambda(x_3)} \qquad (3\text{-}4\text{-}47)
$$

对式（3-4-46）关于 C^e（x_2）和 $\overline{C}^f$（x_3）求泛函微商，并让所有场为 0，可得

$$
\begin{aligned}
&(T^\sigma)_{eb}\,\delta(x_1 - x_2) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^f(x_3)\delta C^b(x_1)} - \\
&\quad (T^\sigma)_{fb}\,\delta(x_1 - x_3) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^b(x_1)\delta C^e(x_2)} + \\
&\quad \partial^\mu_{x_1} \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^f(x_3)\delta C^e(x_2)\delta B^\mu_\sigma(x_1)} + \\
&\quad \partial^\mu\Big[\partial_\mu\Big(\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^a(x_1)\delta C^e(x_2)}\,\frac{1}{\Box}\Big)(T^\sigma)_{af}\,\delta(x_1 - x_3)\Big] = 0 \qquad (3\text{-}4\text{-}48)
\end{aligned}
$$

这样由正则 Ward 恒等式导出了顶角间的关系式，其显著优点在于不必要作出相空间路径积分中关于动量的积分．式（3-4-48）是规范场-鬼场正规顶

角的 Ward 恒等式的新形式，它有别于由 BRS 不变性导出的通常的 Ward-Takahashi恒等式. 此外，为了导出式(3-4-48)，这里仅要求 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$在非定域式（3-4-41）变换下不变，而$\mathscr{L}_m$可以是变更的，这也与通常要求的 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 在 BRS 变换下不变不同.

3-5 广义正则 Ward 恒等式

在动力学系统的路径积分（泛函积分）量子理论中，从 Green 函数的生成泛函导出理论的 Feynman 规则和 Ward 恒等式，通常是用位形空间中的Lagrange量（或有效 Lagrange 量）来表述的，它仅适用于相空间中生成泛函对正则动量的路径积分为 Gauss 型的情况. 当对动量的路径积分不能积出或积分十分困难（特别是约束 Hamilton 系统）时，定域变换下的相空间 Ward 恒等式有重要意义[13,15]. 本节不仅研究了相空间 Ward 恒等式的推广，还研究了 ϕ^4 场论的 Lagrange 量添加一个四维散度项后，其系统的量子 Green 函数的变化，同时讨论了相应的 Feynman 规则[17].

一个用奇异 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi^a, \varphi^a_{,\mu})$ $\left(\varphi^a_{,\mu}=\dfrac{\partial \varphi^a}{\partial x^\mu}\right)$描述的系统，在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统. 设 $\Lambda_k\approx 0$ $(k=1, 2, \cdots, K_1)$ 为系统的第一类约束；$\theta_i\approx 0$ $(i=1, 2, \cdots, I_1)$ 为第二类约束；与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k\approx 0$ $(k=1, 2, \cdots, K_1)$. 对正则变量均引入外源，则相空间中 Green 函数的生成泛函为

$$
\begin{aligned}
Z[J,K,L,M,N]=\int &\mathscr{D}\varphi^a\mathscr{D}\pi_a\,\mathscr{D}\lambda_m\mathscr{D}C^a\mathscr{D}p_a\,\mathscr{D}\overline{C}^a\mathscr{D}\overline{p}_a\cdot\\
&\exp\Big\{\mathrm{i}\Big[I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\int \mathrm{d}^4x(J_a\varphi^a+K^a\pi_a+L^m\lambda_m+\\
&\overline{M}_aC^a+\overline{C}^aM_a+\overline{N}^ap_a+\overline{p}_aN^a)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{3-5-1a}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x\Big\{&\pi_a\dot{\varphi}^a-\mathscr{H}_c+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l+\lambda_i\theta_i+\\
&\int \mathrm{d}^4y\Big[\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x),\Omega_l(y)\}C_l(y)+\\
&\frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}C_j(y)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{3-5-1b}
$$

而 $\lambda_m=(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)$ 为乘子场，p_a 和 $\overline{p}_a$ 为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的正则动量. 为

简化记号，令

$$
\begin{aligned}
\phi &= (\varphi^{\alpha}, \lambda_m, C^{\alpha}, \overline{C}^{\alpha}) \\
\pi &= (\pi_{\alpha}, p_{\alpha}, \overline{p}_{\alpha}) \\
J &= (J_{\alpha}, L^{m}, M_{\alpha}, \overline{M}_{\alpha}) \\
K &= (K^{\alpha}, N^{\alpha}, \overline{N}^{\alpha}) \\
I_{\text{eff}}^{\text{p}} &= I^{\text{p}}
\end{aligned}
$$

于是式（3-5-1a）可简记为

$$
Z[J,K] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J,K]} = \int \mathscr{D}\phi\, \mathscr{D}\pi \exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\text{p}} + \int \mathrm{d}^4 x (J\phi + K\pi)\right]\right\} \tag{3-5-2}
$$

对于非奇异（正规）Lagrange 量系统，$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \pi_{\alpha}\dot{\varphi}^{\alpha} - \mathscr{H}_{\text{c}}$.

设 F（ϕ，π）是正则变量的给定泛函，当泛函积分

$$
Z_F[J,K] = \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\pi F(\phi,\pi) \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\text{p}} + \int \mathrm{d}^4 x (J\phi + K\pi)\right]\right\} \tag{3-5-3}
$$

在 $J=K=0$ 时，恰为$\hat{F}$（$\hat{\varphi}$，$\hat{\pi}$）的期望值[18]．式（3-5-3）在下列变量的变换

$$
\left.\begin{aligned}
\phi(x) \to \phi'(x) &= \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + S_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \\
\pi(x) \to \pi'(x) &= \pi(x) + \delta\pi(x) = \pi(x) + T_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x)
\end{aligned}\right\} \tag{3-5-4}
$$

下是不变的．式中：S_{σ} 和 T_{σ} 为线性微分算符；ε^{σ}（x）（$\sigma=1$，2，…，r）为无穷小任意函数，它们及其微商在四维时空区域的边界上为 0．在式（3-5-4）变换下，I^{p} 的变分为

$$
\delta I^{\text{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\delta I^{\text{p}}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta I^{\text{p}}}{\delta\pi}\delta\pi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi\delta\phi)\right] \tag{3-5-5a}
$$

式中

$$
\frac{\delta I^{\text{p}}}{\delta\phi} = -\dot{\pi} - \frac{\delta H}{\delta\phi}, \quad \frac{\delta I^{\text{p}}}{\delta\pi} = \phi - \frac{\delta H}{\delta\pi} \tag{3-5-5b}
$$

假设式（3-5-4）变换的 Jacobi 行列式为 1，根据 ε^{σ}（x）的边界条件，泛函积分式（3-5-3）在式（3-5-4）变换下不变，就得相空间中广义正则 Ward 恒等式[17]，即

$$
\begin{aligned}
&\Big[\widetilde{S}_{\sigma}\Big(\frac{\delta F}{\delta\phi}\Big) + \widetilde{T}_{\sigma}\Big(\frac{\delta F}{\delta\pi}\Big) + \mathrm{i}\widetilde{S}_{\sigma}\Big(F\frac{\delta I^{\text{p}}}{\delta\phi}\Big) + \mathrm{i}\widetilde{T}_{\sigma}\Big(F\frac{\delta I^{\text{p}}}{\delta\pi}\Big) + \\
&\quad \mathrm{i}\widetilde{S}_{\sigma}(FJ) + \mathrm{i}\widetilde{T}_{\sigma}(FK)\Big]_{\substack{\phi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\\ \pi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}}} Z_F[J,K] = 0
\end{aligned} \tag{3-5-6}
$$

式中：$\widetilde{S}_{\sigma}$ 和 $\widetilde{T}_{\sigma}$ 分别为 S_{σ} 和 T_{σ} 的伴随算符．当 $F=1$ 时，式（3-5-6）为相空间中的正则 Ward 恒等式．如果取 $F=\phi$（x_1），ϕ（x_2），…，ϕ（x_n），考虑

正则变量的平移变换，由式（3-5-6）可导出场的 Green 函数之间的关系．设$F(\phi,\pi)$在式（3-5-4）变换下不变，则相空间中广义正则 Ward 恒等式为

$$\begin{aligned}&\left[\widetilde{S}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\right)+\widetilde{T}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)+\widetilde{S}_\sigma(FJ)+\right.\\&\left.\widetilde{T}_\sigma(FK)\right]_{\substack{\phi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\\ \pi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}}}Z_F[J,K]=0\end{aligned}\tag{3-5-7}$$

现考虑增广相空间中一般形式的无穷小定域变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\ \phi'(x')&=\phi(x)+\Delta\phi(x)=\phi(x)+S_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\ \pi(x')&=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+T_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\end{aligned}\right\}\tag{3-5-8}$$

式中：$\varepsilon^\sigma(x)$（$\sigma=1,2,\cdots,r$）为无穷小任意函数；$\varepsilon^\sigma(x)$ 及其所需的各级微商的值在时空区域边界上为 0；R^μ_σ，S_σ 和 T_σ 为线性微分算符，且

$$\left.\begin{aligned}R^\mu_\sigma&=A^{\mu\nu(k)}_\sigma\,\partial_{\nu(k)}\\ S_\sigma&=B^{\nu(l)}_\sigma\,\partial_{\nu(l)}\\ T_\sigma&=C^{\nu(m)}_\sigma\,\partial_{\nu(m)}\\ \nu(n)&=\underbrace{\nu_\mu\cdots\lambda_\rho}_{n}\\ \partial_{\nu(n)}&=\underbrace{\partial_\nu\partial_\mu\cdots\partial_\lambda\partial_\rho}_{n}\end{aligned}\right\}\tag{3-5-9}$$

式中：A，B，C 均为 x，ϕ，π 的函数，并将式（3-5-8）变换的 Jacobi 行列式记为$\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$．泛函积分式（3-5-3）在式（3-5-8）变换下的不变性表明

$$\left.\frac{\delta Z_F}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}\right|_{\varepsilon^\sigma(x)=0}=0\tag{3-5-10}$$

将式（3-5-8）代入式（3-5-3），准确到一级小量，并注意到[1]

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\delta\phi+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\delta\pi+\partial_\mu[(\pi\dot\phi-\mathscr{H}_c)\Delta x^\mu]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi\delta\phi)\right\}$$

在上式中对相关的项作分部积分，利用 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件，可得相空间中的广义正则 Ward 恒等式[17]，即

$$\begin{aligned}&\left[\bar{J}_0+\widetilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta F}{\delta\phi}\right)-\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\phi_{,\mu}\frac{\delta F}{\delta\phi}\right)+\widetilde{T}_\sigma\left(\frac{\delta F}{\delta\pi}\right)-\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\pi_{,\mu}\frac{\delta F}{\delta\pi}\right)+\right.\\&\mathrm{i}\widetilde{S}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\right)-\mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\phi_{,\mu}F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi}\right)+\mathrm{i}\widetilde{T}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)-\mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\pi_{,\mu}F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)+\\&\mathrm{i}\widetilde{S}_\sigma(FJ)-\mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma(\phi_{,\mu}FJ)+\mathrm{i}\widetilde{T}_\sigma(FK)-\\&\left.\mathrm{i}\widetilde{R}^\mu_\sigma(\pi_{,\mu}FK)\right]\Bigg|_{\substack{\phi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\\ \pi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}}}Z_F[J,K]=0\end{aligned}\tag{3-5-11}$$

式中

$$\bar{J}_0 = -\mathrm{i}\frac{\delta \bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}\bigg|_{\varepsilon^\sigma(x)=0} \tag{3-5-12}$$

式中：$\tilde{R}^\mu_\sigma$，$\tilde{S}_\sigma$，$\tilde{T}_\sigma$ 分别为R^μ_σ，S_σ，T_σ 的伴随算符．在导出式（3-5-11）时使用了$\bar{J}$ ［ϕ，π，0］＝1的条件．回到式（3-5-2）利用泛函 Legendre 变换，引入顶角生成泛函 Γ ［ϕ，π］，有

$$\Gamma[\phi,\pi] = W[J,K] - \int \mathrm{d}^4x[J(x)\phi(x) + K(x)\pi(x)] \tag{3-5-13a}$$

$$\phi(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)},\quad J(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)} \tag{3-5-13b}$$

$$\pi(x) = \frac{\delta W}{\delta K(x)},\quad K(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi(x)} \tag{3-5-13c}$$

将式（3-5-2）右端的指数因子在（ϕ_0（x），π_0（x））邻域展开，有

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4(x)[\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathscr{H}_c(x) + J(x)\phi(x) + K(x)\pi(x)] = \\
&\quad\int \mathrm{d}^4x[\pi_0(x)\dot{\phi}_0(x) - \mathscr{H}_c(x)_0 + J(x)\phi_0(x) + K(x)\pi_0(x) + \\
&\quad\int \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi(x)} + J(x)\right][\phi(x) - \phi_0(x)]\right\} + \\
&\quad\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi(x)} + K(x)\right][\pi(x) - \pi_0(x)] + \\
&\quad\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\frac{\delta^2 I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}[\phi(x) - \phi_0(x)]\cdot \\
&\quad[\phi(y) - \phi_0(y)] + \cdots
\end{aligned} \tag{3-5-14}$$

采用最陡下降法，取展开点（ϕ_0（x），π_0（x））适合

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\phi(x)} + J(x) = 0,\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi(x)} + K(x) = 0 \tag{3-5-15}$$

由式（3-5-13a）、式（3-5-14）可得，在树图近似下顶角的生成泛函等于正则作用量，即 Γ ［ϕ_0，π_0］＝I^{p} ［ϕ_0，π_0］．从而，不必作出相空间生成泛函对正则动量的路径积分，就可求出树图近似下的各次顶角，并导出相应的 Feynman规则．

众所周知，对系统的 Lagrange 量添加一个四维散度项，不会改变系统的经典运动方程．在量子水平上对系统是否有影响，从高阶微商理论角度作了探讨[19]．这里讨论 φ^4 场论的 Lagrange 量添加一个四维散度项后，仍为一阶微商的情形．考虑

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\ \partial^\mu\varphi + m^2\varphi^2) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - a_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi \tag{3-5-16}$$

式中：a_μ 为常矢，且 $a_\mu=$（1，0，0，0）．φ（x）的正则动量为 π（x），且

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) - \varphi(x) \tag{3-5-17}$$

正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c(x) = \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathscr{L}(x) =$$
$$\frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\varphi(x) + \frac{1}{2}(m^2+1)\varphi^2(x) +$$
$$\varphi(x)\pi(x) + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + a_k\varphi(x)\,\partial_k\varphi(x) \tag{3-5-18}$$

正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4x[\pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathscr{H}_c] =$$
$$\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{2}[\pi^2(x) - \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi - (m^2+1)\varphi^2(x)] - \right.$$
$$\left.\frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x) - a_k\varphi(x)\,\partial_k\varphi(x)\right\} \tag{3-5-19}$$

树图近似下两点正规顶角为

$$\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\pi=0} = \left.\frac{\delta^2 I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\pi=0} =$$
$$\int \mathrm{d}^4z\mathrm{d}^2w\,\frac{\delta}{\delta\pi(w)}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi(z)}\frac{\delta\pi(z)}{\delta\varphi(x)}\right)\left.\frac{\delta\pi(w)}{\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\pi=0} +$$
$$\left.\frac{\delta^2 I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=\pi=0} =$$
$$-[\partial^2 + a_\mu\partial_\mu + (m^2+1)]\delta(x-y) \tag{3-5-20}$$

可见，其结果与通常 φ^4 场论不同，因而场的传播子发生变化. 不难验证，添加上述四维散度项后，最低次（4 次）顶角不变.

3-6 非定域正则 Ward 恒等式

Ward 恒等式（或 Ward-Takahashi 恒等式）在现代量子场论中占重要地位. 它是理论可重整化的保证，在实际计算中（如 QCD），由它可将高阶顶角的计算化为低阶顶角的计算等. 传统上用泛函积分（路径积分）方法导出 Ward 恒等式均是从位形空间中的路径积分出发的，这仅适用于相空间路径积分关于正则动量可积的情形（如 Gauss 型积分）. 在某些情形即使可作出该动量的积分，化为位形空间路径积分中 Lagrange 量也会出现含 δ-函数的奇异性. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本，前者适合于任意的 Hamilton 量，后者仅适用于 Hamilton 量含正则动量的平方项. 因此，从相空间路径积分表达的 Green 函数生成泛函来导出正则形式的 Ward 恒等式，就具有更普遍的意义[10,13]. 在前面讨论中主要涉及的是相空间中的定域变

换，这里将进一步研究一般的非定域变换下的正则 Ward 恒等式.

在共形场和杨-Mills 场量子理论中研究过非定域变换；在非 Abel 规范理论中，讨论正规顶角所满足的某些关系，只需考虑变换保持原始Lagrange 量和鬼场 Lagrange 量不变就够了. 它是用位形空间中生成泛函来表述的，它只适用于相空间生成泛函对动量可积的情况. 这里讨论一般情形，从相空间中 Green 函数的生成泛函出发，考虑增广相空间中一般的非定域变换，导出相应的正则形式的 Ward 恒等式. 用于非 Abel CS 理论，无须作出生成泛函中对动量的路径积分，即可得到正规顶角间的某些关系式[20].

3-6-1 非定域正则 Ward 恒等式

设场由 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}(\varphi(x),\varphi_{,\mu}(x))$ 描述，$\partial_\mu=\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$，$x=(t,\boldsymbol{x})$，平坦时空度规 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(1\ -1\ -1\ -1)$. 场的正则动量和 Hamilton 量密度分别为 $\pi=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}$和 $\mathscr{H}_c=\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L}$，先考虑正规 Lagrange 量系统，正则 Hamilton 量 $H_c=\int\mathrm{d}^3x\mathscr{H}_c$ 是独立正则变量 $\varphi\,(x)$ 和 $\pi\,(x)$ 的泛函. 采用路径积分量子化，系统 Green 函数的相空间生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)]\}\tag{3-6-1}$$

式中

$$I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c)\tag{3-6-2}$$

为系统的正则作用量. 这里对正则动量 π 也引入了相应的外源，它不影响对 Green 函数的计算

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{\mathrm{i}^n}\frac{\delta^n Z[J,K]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=K=0}=$$

$$\langle 0\mid T[\hat{\varphi}(x_1)\,\hat{\varphi}(x_2)\cdots\,\hat{\varphi}(x_n)]\mid 0\rangle\tag{3-6-3}$$

考虑生成泛函式 (3-6-1) 在增广相空间中的非定域变换性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\ \varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\\&\qquad\int\mathrm{d}^4yE(x,y)A_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\\ \pi'(x')&=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+\\&\qquad\int\mathrm{d}^4yF(x,y)B_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\end{aligned}\right\}\tag{3-6-4}$$

式中：$E(x, y)$ 和 $F(x, y)$ 为给定的光滑函数，R_σ^μ，A_σ 和 B_σ 为线性微分算符，且 $R_\sigma^\mu = r_\sigma^{\mu(l)} \partial_{\mu(l)}, A_\sigma = a_\sigma^{(m)} \partial_{(m)}, B_\sigma = b_\sigma^{(n)} \partial_{(n)}$，其中

$$r_\sigma^{\mu(l)} = r_\sigma^{\overbrace{\mu\nu\cdots\lambda}^{l}},\quad a_\sigma^{(m)} = a_\sigma^{\overbrace{\mu\nu\cdots\rho}^{m}},\quad b_\sigma^{(n)} = b_\sigma^{\overbrace{\mu\nu\cdots\delta}^{n}} \tag{3-6-5}$$

式中 $r_\sigma^{\mu(l)}$，$a_\sigma^{(m)}$ 和 $b_\sigma^{(n)}$ 分别为 x，φ 和 π 的光滑函数，$\varepsilon^\sigma(x)$（$\sigma=1, 2, \cdots, s$）为无穷小任意的光滑函数，它们的值及其微商在四维时空区域边界上为0. 在式（3-6-4）变换下，正则作用量 I^{p} 的变分为

$$\delta I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \left\{ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\delta\pi + \partial_\mu\left[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^\mu\right] + \mathrm{D}(\pi\delta\varphi) \right\} \tag{3-6-6}$$

式中：$\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，且

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} = -\dot{\pi} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi} = \dot{\varphi} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi} \tag{3-6-7}$$

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - \varphi_{,\mu}\Delta x^\mu,\quad \delta\pi = \Delta\pi - \pi_{,\mu}\Delta x^\mu \tag{3-6-8}$$

记变换式（3-6-4）的 Jacobi 行列式为 $1+\delta J^0[\varphi, \pi, \varepsilon]$. 生成泛函在式（3-6-4）变换下不变，根据 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件，有

$$Z[J, K] = \int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\left[1 + \delta J^0 + \mathrm{i}\delta I^{\mathrm{p}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(J\delta\varphi + K\delta\pi)\right] \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}^4 x(J\varphi + K\pi)\right]\right\} \tag{3-6-9}$$

生成泛函在变换式（3-6-4）下的不变性，表明 $\dfrac{\delta Z}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}=0$，将式（3-6-6）代入式（3-6-9），分部积分后关于 $\varepsilon^\sigma(x)$ 求泛函微商，并让 $J=K=0$，得

$$\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi \left\{ J_\sigma^0 + \int \mathrm{d}^4 y \widetilde{A}_\sigma(x)\left[E(x,y)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi(y)}\right] - \widetilde{R}_\sigma^\mu\left[\varphi_{,\mu}(x)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi(x)}\right] + \int \mathrm{d}^4 y \widetilde{B}_\sigma(x)\left[F(x,y)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi(y)}\right] - \overline{R}_\sigma^\mu\left[\pi_{,\mu}(x)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi(x)}\right] + \int \mathrm{d}^4 y \widetilde{A}_\sigma(x)\mathrm{D}[\pi(y)E(y,x)] \right\} \exp\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}}\} = 0 \tag{3-6-10}$$

式中：$J_\sigma^0 = \dfrac{-\mathrm{i}\delta J^0}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}$；$\widetilde{A}_\sigma$，$\widetilde{B}_\sigma$ 和 $\widetilde{R}_\sigma^\mu$ 分别为 A_σ，B_σ 和 R_σ^μ 的伴随算符. 对区域 Ω 上的任意光滑函数 f 和 g，伴随算符 $\widetilde{A}_\sigma$ 与 A_σ 适合

$$\int_\Omega g\widetilde{A}_\sigma f\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega fA_\sigma g\,\mathrm{d}\Omega + [\cdot]_{\partial\Omega} \tag{3-6-11}$$

式中：$[\cdot]_{\partial\Omega}$ 为表面项，与式（3-6-10）相应的 Green 函数为

$$\langle 0 \mid T^*\left(J_\sigma^0 + \int \mathrm{d}^4 y\left\{\widetilde{A}_\sigma\left[E\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} + \mathrm{D}(\pi E)\right] + \widetilde{B}_\sigma\left(F\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)\right\} - \right.$$

$$\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left[\varphi_{,\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}+\pi_{,\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right]\Big)\mid 0\rangle\Big|_{\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}}=0 \qquad (3\text{-}6\text{-}12)$$

式中：T^{*}代表一种特定的编时乘积[5]；$|0\rangle$代表场的真空态．变换式（3-6-4）的Jacobi行列式不依赖于ϵ^{σ}（x）时，将式（3-6-6）代入式（3-6-9），分部积分后关于ϵ^{σ}（x）求泛函微商，得

$$\Big\{\int \mathrm{d}^{4}y\Big\{\widetilde{A}_{\sigma}\Big[E\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}+J\Big)+\mathrm{D}(\pi E)\Big]+\widetilde{B}_{\sigma}\Big[F\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}+K\Big)\Big]\Big\}-$$

$$\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\Big[\varphi_{,\mu}\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}+J\Big)+\pi_{,\mu}\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}+K\Big)\Big]\Big\}\Big|_{\substack{\varphi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\\ \pi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}}}Z[J,K]=0 \qquad (3\text{-}6\text{-}13)$$

式（3-6-13）为非定域变换下，系统Green函数生成泛函满足的正则形式的Ward恒等式，将式（3-6-13）关于外源J多次求泛函微商，并让外源$J=K=0$，即可进一步得到Green函数间的若干关系式．这里的显著优点在于无须作出生成泛函中对动量的路径积分．

对于奇异Lagrange量$\mathscr{L}$（φ^{a}，$\varphi^{a}_{,\mu}$）的系统，该系统在相空间中存在固有约束，该系统称为约束Hamilton系统．设系统的第一类约束为Λ_{k}（φ，π）$\approx$（$k=1$，2，…，K_{1}），第二类约束为θ_{j}（φ，π）≈ 0（$j=1$，2，…，J_{1}）．与第一类约束相应的规范条件为Ω_{k}（φ，π）≈ 0（$k=1$，2，…，K_{1}）．按FS路径积分量子化方案，该约束Hamilton系统Green函数的相空间生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^{a}\mathscr{D}\pi_{a}\pi\delta(\theta_{j})\delta(\Lambda_{k})\delta(\Omega_{l})\det\{\Lambda_{k},\Omega_{l}\}[\det\{\theta_{i},\theta_{j}\}]^{1/2}\cdot$$

$$\exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^{4}x(J_{a}\varphi^{a}+K^{a}\pi_{a})]\} \qquad (3\text{-}6\text{-}14)$$

利用δ-函数以及Grassmann变量C（x）和$\overline{C}$（x）的积分性质

$$\det\{M_{k}(x),N_{l}(y)\}=\int\mathscr{D}C_{l}(y)\mathscr{D}\overline{C}_{k}(x)\cdot$$

$$\exp[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x\mathrm{d}^{4}y\overline{C}_{k}(x)\{M_{k}(x),N_{l}(y)\}C_{l}(y)] \qquad (3\text{-}6\text{-}15)$$

式（3-6-14）可化为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^{a}\mathscr{D}\pi_{a}\mathscr{D}\lambda_{m}\mathscr{D}C_{l}\mathscr{D}\overline{C}_{k}\cdot$$

$$\exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\int\mathrm{d}^{4}x(J_{a}\varphi^{a}+K^{a}\pi_{a})]\} \qquad (3\text{-}6\text{-}16)$$

式中

$$I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}^{4}x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}) \qquad (3\text{-}6\text{-}17)$$

$$\mathscr{L}_{m} = \lambda_j\theta_j + \lambda_k\Lambda_k + \lambda_l\Omega_l, \lambda_m = (\lambda_j, \lambda_k, \lambda_l) \tag{3-6-18}$$

$$\mathscr{L}_{gh} = \int d^4 y[\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x), \Omega_l(y)\}C_l(y) + \frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x), \theta_j(y)C_j(y)\}] \tag{3-6-19}$$

设记 $\varphi=(\varphi^a, \lambda_m, C_l, \overline{C}_k)$，$\pi=(\pi_a)$，$J=(J_a)$，$K=(K^a)$，于是式(3-6-16)可写为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp\{i[I_{eff}^P + \int d^4 x(J\varphi + K\pi)]\} \tag{3-6-20}$$

通过与正规 Lagrange 量系统类似的讨论，可知奇异 Lagrange 量系统相应的非定域正则 Ward 恒等式，这时只需将式（3-6-13）中的 I^P 换为 I_{eff}^P 就是了.

3-6-2 非 Abel CS 场论中的应用

近来大量的工作研究了（2+1）维 Abel CS 规范理论中出现的分数自旋和分数统计性质，这对解释量子 Hall 效应乃至高温超导现象有重要意义[21]，非 Abel CS 场与物质场耦合，也可改变系统的自旋统计性质[22-23]. 这里讨论（2+1）维带 Maxwell 项的非 Abel CS 场与物质场的耦合，给出非定域正则 Ward 恒等式的应用，系统 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a + \frac{1}{3}f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c) + i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{3-6-21}$$

式中：D_μ 为协变微商，$\psi=\psi^a T^a$，T^a 为规范群（如 SU（n））表示的生成元，

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \tag{3-6-22}$$

量子水平下规范不变要求 κ 的取值受到限制[24]. CS 场 A_μ^a 与 Fermi 场 ψ 和 $\overline{\psi}$ 的正则共轭动量分别为

$$\pi^{a\mu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu^a} = F^{a\mu o} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{o\mu\nu}A_\nu^a \tag{3-6-23}$$

$$\overline{P}^a = \frac{\partial_r L}{\partial\dot{\psi}} = i\overline{\psi}^a\gamma^0 \tag{3-6-24}$$

$$P^a = \frac{\partial_r L}{\partial\dot{\overline{\psi}}^a} = 0 \tag{3-6-25}$$

在相空间中，系统存在 3 个初级约束，即

$$\Lambda_1^a = \pi^{ao} \approx 0 \tag{3-6-26}$$

$$\bar{\theta}^a = \bar{P}^a - \mathrm{i}\bar{\psi}^a\gamma^0 \approx 0 \tag{3-6-27}$$

$$\theta^a = P^a \approx 0 \tag{3-6-28}$$

初级约束式（3-6-27）和式（3-6-28）的自洽性（相容性）条件，不导致新的约束，而是确定相应的约束乘子．初级约束式（3-6-26）的自洽性条件给出了次级约束，即

$$\chi - \partial_i\pi^{ai} + f^{abc}A_i^b\pi^{ci} - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_iA_j^a + \mathrm{i}f^{abc}\bar{\psi}^b\gamma^0\psi^c \approx 0 \tag{3-6-29}$$

将约束作线性组合

$$\Lambda_2^a = f^{abc}(\bar{\psi}^bP^c + \bar{P}^b\psi^c) + \partial_i\pi^{ai} - f^{abc}A_i^b\pi^{ci} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_iA_j^a \tag{3-6-30}$$

不难验证，Λ_1^a 和 Λ_2^a 为第一类约束，$\bar{\theta}^a$ 和 θ^a 为第二类约束．

按 FS 对约束 Hamilton 系统的量子化方案，对每一个第一类约束，需选取一个规范条件．当规范场与物质场耦合时，采用辐射规范（$A_0^a \approx 0$，$\partial^iA_i^a \approx 0$）是不恰当的，因为此时辐射规范条件与场方程不相容，这里采用另一组规范条件来实现对系统的量子化．考虑库仑规范

$$\Omega_2^a = \partial^iA_i^a \approx 0 \tag{3-6-31}$$

由 Ω_2^a 的自洽性条件，$\dot{\Omega}_2^a \approx 0$，可确定另一规范条件，即

$$\Omega_1^a = \partial^i\pi^{ai} + \nabla^2A_0^a - f^{abc}A_i^b\partial^iA_0^c \approx 0 \tag{3-6-32}$$

不难验证，$\det\{\bar{\theta}^a, \theta^b\}$ 场量无关，可以从生成泛函中略去，而

$$\det\{\Lambda^a, \Omega^b\} = \det M_c^{ab}$$
$$M_c^{ab} = (\delta^{ab}\nabla^2 - f^{abc}A_i^c\partial^i)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{3-6-33}$$

理论的规范无关性，生成泛函中的因子 $\delta(\partial^iA_i^a)\det M_c^{ab}$ 可用 $\delta(\partial^\mu A_\mu^a)\det M_L^{ab}$ 来代替[1]，

$$M_L^{ab} = (\delta^{ab}\partial^2 - f^{abc}A_\mu^c\partial^\mu)\delta(x - y) \tag{3-6-34}$$

于是系统 Green 函数的相空间生成泛函可写为

$$\begin{aligned}Z[J,K,\bar{\eta},K_1,\eta,\bar{K}_2,\bar{\zeta},\zeta,\xi,X,Y] = \\ \int \mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\pi^{a\mu}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{P}\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}P\mathscr{D}\bar{C}^a\mathscr{D}C^a\mathscr{D}\lambda_k^a\mathscr{D}w_k^l\mathscr{D}\nu_k^a \cdot \\ \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(\mathscr{L}_{\text{eff}} + J_a^\mu A_\mu^a + K_\mu^a\pi^{a\mu} + \bar{\eta}^a\psi^a + \bar{P}^aK_1^a + \bar{\psi}^a\eta^a + \\ \bar{K}_2^aP^a + \bar{\zeta}^aC^a + \bar{C}^a\zeta^a + \xi^a\lambda_k^a + X_k^lw_k^l + Y_k^a\nu_k^a)\}\end{aligned} \tag{3-6-35}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{P}} = \mathscr{L}^{\text{P}} + \mathscr{L}_{\text{m}} + \mathscr{L}_{\text{gh}} \tag{3-6-36}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}} = \pi^{a\mu}\dot{A}^a_\mu + \overline{P}^a\dot{\psi}^a + \dot{\overline{\psi}}^a P^a - \mathscr{H}_c \tag{3-6-37}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{m}} = \nu^a_k\theta^a_k + \lambda^a_k\Lambda^a_k + w^a_l\overline{\Omega}^a_l \quad (\overline{\Omega}^a_1 = \Omega^a_2,\quad \overline{\Omega}^2_a = \partial^\mu A^a_\mu) \tag{3-6-38}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} = \overline{C}^a M^{ab}_{\mathrm{L}} C^b = -\partial^\mu\overline{C}^a \mathrm{D}^a_{\mu b} C^b \tag{3-6-39}$$

和杨-Mills 理论中类似的讨论，考虑下列变换

$$\left.\begin{aligned} C^{a\prime} &= C^a + \mathrm{i}(T^\sigma)_{ab}\varepsilon^\sigma(x)C^b \qquad (3\text{-}6\text{-}40\mathrm{a})\\ A^{a\prime}_\mu &= A^a_\mu + \mathrm{D}^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x) \qquad (3\text{-}6\text{-}40\mathrm{b}) \end{aligned}\right\}$$

在式（3-6-40）变换下，有

$$\mathrm{D}^{a\prime}_{b\mu}C^b = \mathrm{D}^a_{b\mu}C^b + \mathrm{i}(T^\sigma)_{ab}\varepsilon^\sigma(x)\mathrm{D}^b_{e\mu}C^e \tag{3-6-41}$$

因此，如果 $\overline{C}^a$ 按

$$\partial^\mu\overline{C}^{a\prime} = \partial^\mu\overline{C}^a - \mathrm{i}\,\partial^\mu\overline{C}^b(T^\sigma)_{ba}\varepsilon^\sigma(x) \tag{3-6-42}$$

变换，那么 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$不变，即是说 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}(x)+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}(x)$在下列变换下保持不变[25]

$$\left.\begin{aligned} \psi'(x) &= \psi(x) + \mathrm{i}\varepsilon^\sigma(x)T^\sigma\psi(x)\\ \overline{P}'(x) &= \overline{P}(x) - \mathrm{i}\overline{P}(x)\varepsilon^\sigma(x)T^\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}6\text{-}43\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x) - \mathrm{i}\overline{\psi}(x)\varepsilon^\sigma(x)T^\sigma\\ P'(x) &= P(x) + \mathrm{i}\varepsilon^\sigma(x)T^\sigma P(x) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}6\text{-}43\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned} A^{a\prime}_\mu(x) &= A^a_\mu(x) + \mathrm{D}^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x)\\ \pi^{a\mu\prime}(x) &= \pi^{a\mu}(x) + f^{a\sigma c}\pi^{c\mu}(x)\varepsilon^\sigma(x) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}6\text{-}43\mathrm{c})$$

$$C^{a\prime}(x) = C^a(x) + \mathrm{i}(T^\sigma)_{ab}\varepsilon^\sigma(x)C^b(x) \tag{3-6-43d}$$

$$\begin{aligned} C^{a\prime}(x) = \overline{C}^a(x) - \mathrm{i}\overline{C}^b(x)(T^\sigma)_{ba}\varepsilon^\sigma(x) + \\ \frac{\mathrm{i}}{\Box}\partial_\mu[\overline{C}^b(x)(T^\sigma)_{ba}\,\partial^\mu\varepsilon^\sigma(x)] \end{aligned} \tag{3-6-43e}$$

式（3-6-43e）又可写为

$$\begin{aligned} \overline{C}^{a\prime}(x) = C^a(x) - \mathrm{i}\overline{C}^b(x)(T^\sigma)_{ba}\varepsilon^\sigma(x) + \\ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 y\Delta_0(x,y)\,\partial_\mu[\overline{C}^b(y)(T^\sigma)_{ba}\,\partial^\mu\varepsilon^\sigma(y)] \end{aligned} \tag{3-6-43f}$$

其中 Δ_0（x，y）适合

$$\Box\Delta_0(x,y) = \mathrm{i}\delta^4(x-y) \tag{3-6-44}$$

在非定域变换式（3-6-43a）～式（3-6-43e）变换下，$\mathscr{L}_m$ 的改变记为

$$\delta\mathscr{L}_m = Q_\sigma(\lambda,w,\nu,A,\pi,\cdots)\varepsilon^\sigma(x) \tag{3-6-45}$$

其中 Q_σ 为乘子场和物质场以及 CS 场及其正则变量的函数. 生成泛函在（3-6-43）变换下的不变性，有正则 Ward 恒等式，即

$$\Big\{J^0_\sigma + \mathrm{i}Q_\sigma + \mathrm{i}\overline{\eta}T^\sigma\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}} - \mathrm{i}K_1 T^\sigma\frac{\delta}{\delta K_1} - \mathrm{i}\eta T^\sigma\frac{\delta}{\delta\eta} +$$

$$\mathrm{i}K_2 T^\sigma \frac{\delta}{\delta K_2} - \mathrm{i}\,\partial_\mu J^\mu_\sigma + f^{a\sigma c} J^\mu_a \frac{\delta}{\delta J^\mu_c} + g f^{a\sigma c} K^a_\mu \frac{\delta}{\delta K^c_\mu} +$$

$$\mathrm{i}\bar{\zeta}_a (T^\sigma)_{ab} \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_b} - \mathrm{i}\zeta_a (T^\sigma)_{ba} \frac{\delta}{\delta \zeta_b} +$$

$$\mathrm{i}\,\partial^\mu \left[\partial_\mu \left(\zeta_a \frac{1}{\square} \right) (T^\sigma)_{ba} \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_b} \right] \Big\} Z[J, K, \cdots] = 0 \tag{3-6-46}$$

其中 J^0_σ 与场变量无关[13]. 令 $Z[J, K, \cdots] = \exp\{\mathrm{i}W[J, K, \cdots]\}$，通过泛函 Legendre 变换，引入正规顶角生成泛函

$$\Gamma[\phi, \pi, \cdots] = W[J, K, \cdots] - \int \mathrm{d}^3 x (J\phi + K\pi + \cdots) \tag{3-6-47}$$

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x)} = -J(x) \tag{3-6-48a}$$

$$\frac{\delta W}{\delta K(x)} = \pi(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \pi(x)} = -K(x) \tag{3-6-48b}$$

$$\cdots$$

这样式 (3-6-46) 又可写为

$$J^0_\sigma + \mathrm{i}Q_\sigma - \mathrm{i}\psi^\mu T^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^\mu} + \mathrm{i}\bar{P}^a T^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{P}^a} + \mathrm{i}\bar{\psi}^\mu T^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}^\mu} -$$

$$\mathrm{i}P^a T^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta P^a} + \mathrm{i}\,\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\sigma_\mu} - f^{a\sigma c} A^c_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^a_\mu} - f^{a\sigma c} \pi^{c\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta \pi^{a\mu}} +$$

$$\mathrm{i}\bar{C}^a (T^\sigma)_{ba} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^b} - \mathrm{i}C^a (T^\sigma)_{ab} \frac{\delta \Gamma}{\delta C^b} -$$

$$\mathrm{i}\,\partial^\mu \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^a} \frac{1}{\square} \right) (T^\sigma)_{ba} \bar{C}^b \right] = 0 \tag{3-6-49}$$

将式 (3-6-49) 关于 C^r (x_2) 和 $\bar{C}^s$ (x_3) 求泛函微商，然后让所有场（包括乘子场）为零，于是得

$$(T^\sigma)_{rb} \delta(x_1 - x_2) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^s(x_3) \delta C^b(x_1)} -$$

$$(T^\sigma)_{sb} \delta(x_1 - x_3) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^b(x_1) \delta C^r(x_2)} +$$

$$\partial^\mu_{x_1} \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^s(x_3) \delta C^r(x_2) \delta A^\mu_\sigma(x_1)} +$$

$$\partial^\mu_{x_1} \left[\partial^{x_1}_\mu \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^a(x_1) \delta C^r(x_2)} \frac{1}{\square} \cdot \right.$$

$$\left. (T^\sigma)_{as} \delta(x_1 - x_3) \right] = 0 \tag{3-6-50}$$

或 $$(T^{\sigma})_{rb}\delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^s(x_3)\delta C^b(x_1)}-$$

$$(T^{\sigma})_{sb}\delta(x_1-x_3)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^b(x_1)\delta C^r(x_2)}+$$

$$\partial^{\mu}_{x_1}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^s(x_3)\delta C^r(x_2)\delta A^{\mu}_{\sigma}(x_1)}+$$

$$\partial^{\mu}_{x_1}[\partial^{x_1}_{\mu}\int d^3y\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^a(x_1)\delta C^r(x_2)}\Delta_0(x_1,y)\cdot$$

$$(T^{\sigma})_{as}\delta(x_1-x_3)]=0 \tag{3-6-51}$$

将式（3-6-49）关于场量多次求泛函微商，然后让场量为零，可得多种形式的 Ward 恒等式. 式（3-6-50）给出了 CS 规范场-鬼场正规顶角的 Ward 恒等式. 导出该恒等式的显著优点是无须作出生成泛函中对正则动量路径积分；其次是要求理论中的 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$在非定域变换式（3-6-43）下不变，这与通常的 BRS 不变性也是不同的.

3-7 整体变换的广义正则 Ward 恒等式

整体对称性和守恒律的联系在经典理论中由 Noether 第一定律给出，Noether 第二定理或 Noether 恒等式涉及的是系统的定域对称性. 在量子理论中 Noether 恒等式对应于 Ward 恒等式. Noether 定理和 Ward 恒等式通常均是在位形空间中给出的. 正则的经典 Noether 第一、第二定理的系统研究已建立[1]. Ward 恒等式在量子场论中占重要地位，该恒等式已被推广到超对称和超弦等理论中. 从路径积分导出 Ward 恒等式，通常是由位形空间中的生成泛函出发的，它只适用于相空间路径积分对正则动量可积的情形，此时可将相空间路径积分化为位形空间中的路径积分. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本，因此对系统在相空间中正则对称性的研究，就具有更重要的意义. 前面已建立了相空间中定域和非定域变换下正则形式的 Ward 恒等式，这里进一步研究量子系统在相空间中的整体对称性质[7-8,25]. 为此，首先论述整体变换下的正则 Ward 恒等式，下节讨论量子守恒律.

设物理场的运动由场量 $\varphi(x)$ 描述，场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi,\varphi_{,\mu})$. 先考虑正规 Lagrange 量系统，场的正则 Hamilton 量

$$H_c=\int d^3x\mathscr{H}_c=\int d^3x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L})$$

是独立正则变量 $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的泛函，其中 $\pi(x)=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)}$ 为 $\varphi(x)$ 的正则共轭动量. 采用路径积分量子化，其 Green 函数在相空间中的生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\,\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\} \tag{3-7-1}$$

式中

$$I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \tag{3-7-2}$$

为系统的正则作用量. 这里对正则动量 π 引入外源 K，并不影响对 Green 函数计算的结果.

设 $F(\varphi,\pi)$ 是正则变量 $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的给定泛函，定义

$$Z_F[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\,F(\varphi,\pi)\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\} \tag{3-7-3}$$

当 $J=K=0$ 时，式（3-7-3）给出算符 $\hat{F}(\hat{\varphi},\hat{\pi})$ 在场的基态上的期望值. 考虑增广相空间中的无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma\tau^{\mu\sigma}(x;\varphi,\pi)\\\varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\varepsilon_\sigma\xi^\sigma(x;\varphi,\pi)\\\pi'(x')&=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+\varepsilon_\sigma\eta^\sigma(x;\varphi,\pi)\end{aligned}\right\} \tag{3-7-4}$$

式中：ε_σ（$\sigma=1,2,\cdots,r$）为无穷小任意参数；$\tau^{\mu\sigma}$，ξ^σ 和 η^σ 分别为 x，$\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的函数. 例如，场的共形变换和内部对称变换均属于式（3-7-4）的特殊情况. 在式（3-7-4）变换下，正则作用量的变分

$$\delta I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\,\varepsilon_\sigma\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}(\eta^\sigma-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\right\} \tag{3-7-5}$$

式中：$\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，且

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}=-\dot{\pi}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi},\quad\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}=\dot{\varphi}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi} \tag{3-7-6}$$

设式（3-7-4）变换的 Jacobi 行列式为 1. 如果泛函 $F(\varphi,\pi)$ 和正则作用量 I^{p} 在式（3-7-4）变换下不变，根据路径积分式（3-7-3）在积分变量变换下的不变性，可得

$$
\begin{aligned}
&Z_F[J,K]= \\
&\int \mathscr{D}\varphi\, \mathscr{D}\pi\, F(\varphi,\pi)\Big(1+\mathrm{i}\epsilon_\sigma\int \mathrm{d}^4x\Big\{J(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+ \\
&K(\eta^\sigma-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_\mu[(J\varphi+K\pi)\tau^{\mu\sigma}]\Big\}\Big)\cdot \\
&\exp\Big\{\mathrm{i}\Big[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\Big]\Big\}= \\
&\Big(1+\mathrm{i}\epsilon_\sigma\int \mathrm{d}^4x\Big\{J\Big[\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\Big]+K\Big[\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big]+ \\
&\partial_\mu\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)\Big]\Big\}\Big)_{\substack{\varphi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta J}\\ \pi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta K}}}Z_F[J,K] \qquad (3\text{-}7\text{-}7)
\end{aligned}
$$

从而路径积分 Z_F [J，K] 满足

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x\Big\{J\Big(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\Big)+K\Big(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)+ \\
&\qquad\partial_\mu\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)\Big]\Big\}_{\substack{\varphi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta J}\\ \pi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta K}}}Z_F[J,K]=0 \qquad (3\text{-}7\text{-}8)
\end{aligned}
$$

在式（3-7-4）变换下，如果正则作用量 I^{p} 不变，但 F（φ，π）是变更的，那么路径积分式（3-7-3）满足

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x\Big\{\frac{1}{\mathrm{i}}\Big[\frac{\delta F}{\delta\varphi}\Big(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\Big)+\frac{\delta F}{\delta\pi}\Big(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)\Big]+ \\
&J\Big(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\Big)+K\Big(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)+ \\
&\qquad\partial_\mu\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)\Big]\Big\}_{\substack{\varphi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta J}\\ \pi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta K}}}Z_F[J,K]=0 \qquad (3\text{-}7\text{-}9)
\end{aligned}
$$

在式（3-7-9）中取 $F=1$，由式（3-7-1）、式（3-7-3）、式（3-7-9）可得 Green 函数的生成泛函 Z [J，K] 满足

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x\Big\{J\Big(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\Big)+K\Big(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)+ \\
&\qquad\partial_\mu\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)\Big]\Big\}_{\substack{\varphi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta J}\\ \pi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta K}}}Z[J,K]=0 \qquad (3\text{-}7\text{-}10\text{a})
\end{aligned}
$$

对于内部对称变换 $\tau^{\mu\sigma}=0$，此时生成泛函 Z [J，K] 适合[26]

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x\Big[J(x)\xi^\sigma\Big(x,\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)+ \\
&\qquad K(x)\eta^\sigma\Big(x,\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\Big)\Big]Z[J,K]=0 \qquad (3\text{-}7\text{-}10\text{b})
\end{aligned}
$$

如果在式（3-7-4）变换下，正则作用量 I^{p} 和 F 均是变更的，那么泛函积分式（3-7-3）满足

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\delta F}{\delta\varphi}\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+\frac{\delta F}{\delta\pi}\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]+\right.\\&\quad\left(-\dot{\pi}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi}\right)\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+\\&\quad\left(\dot{\varphi}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi}\right)\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)+\\&\quad\partial_\mu\left[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}\right]+\mathrm{D}\left[\pi\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)\right]+\\&\quad J\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+K\left(\eta^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\partial}{\mathrm{i}\,\partial K}\right)+\\&\quad\left.\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}+K\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}\right)\right]\right\}_{\substack{\varphi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta J}\\ \pi\to-\frac{\mathrm{i}\delta}{\delta K}}}Z_F[J,K]=0\end{aligned}\tag{3-7-11}$$

关系式. 这里分别称式（3-7-8）～式（3-7-11）为相空间中整体变换下的正则形式的 Ward 恒等式. 对式（3-7-10）关于 J（x）求多次泛函微商，并让所有外源为 0（$J=K=0$），不必作出生成泛函式（3-7-1）中对动量的路径积分，即可得Green函数间的一些关系式.

对于用奇异 Lagrange 量 $\mathscr{L}$（$\varphi,\partial_\mu\varphi$）描述的系统，在相空间中存在固有约束. 设 $\Lambda_k\approx0$（$k=1, 2, \cdots, K_1$）为第一类约束；$\theta_i\approx0$（$i=1, 2, \cdots, I_1$）为第二类约束；与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k\approx0$（$k=1, 2, \cdots, K_1$）. 通过和 3-6 中类似的讨论，该奇异 Lagrange 量系统在相空间中的生成泛函可简化为式（3-6-16）的形式，即

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\pi\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\left[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)\right]\right\}\tag{3-7-12}$$

其中 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 由式（3-6-17）给出. 通过上述类似的讨论，可得奇异 Lagrange 量系统在相空间中整体对称的正则形式的 Ward 恒等式. 这只需将式（3-7-3）、式（3-7-5）、式（3-7-7）中的 I^{p} 换为 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 就是了.

3-8 整体正则对称性和量子守恒律

在经典理论中，整体正则对称性和守恒律的联系已被系统研究[1,27]，这里在量子水平上进一步讨论这个问题. 先讨论正规 Lagrange 量系统. 假设系统的正则作用量 I^{p} 在式（3-7-4）整体变换下不变，将该变换定域化，考虑与式（3-7-4）相应的定域变换

$$\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma}(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\pi) \\
\varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_{\sigma}(x)\xi^{\sigma}(x,\varphi,\pi) \\
\pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \xi_{\sigma}(x)\eta^{\sigma}(x,\varphi,\pi)
\end{aligned}\right\} \tag{3-8-1}$$

式中：$\varepsilon_{\sigma}(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意函数，它们的值及其微商在四维时空区域的边界上为零．在式（3-8-1）变换下，式（3-7-2）的正则作用量的变分为

$$\begin{aligned}
\delta I^{\mathrm{p}} = &\int \mathrm{d}^{4}x\varepsilon_{\sigma}(x)\Big\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}(\eta^{\sigma}-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \\
&\partial_{\mu}[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{c})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\Big\} + \\
&\int \mathrm{d}^{4}x\Big\{[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{c})\tau^{\mu\sigma}]\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x) + \pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_{\sigma}(x)\Big\}
\end{aligned} \tag{3-8-2}$$

由于已设正则作用量 I^{p} 在式（3-7-4）的整体变换下不变，因此式（3-8-2）中的第一个积分为0．假设变换式（3-8-1）的Jacobi行列式为1，生成泛函式（3-7-1）在式（3-8-1）变换不是不变的．将式（3-8-2）中剩下的项作分部积分，利用 $\varepsilon_{\sigma}(x)$的边界条件，将所得结果代入式（3-7-1），并对 $\varepsilon_{\sigma}(x)$求泛函微商，得

$$\begin{aligned}
&\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\{\partial_{\mu}[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{c})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - M^{\sigma}\}\cdot \\
&\exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}^{4}x(J\varphi+K\pi)]\} = 0
\end{aligned} \tag{3-8-3}$$

式中

$$M^{\sigma} = J(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + K(\eta^{\sigma}-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \tag{3-8-4}$$

将式（3-8-3）关于 $J(x)$作 n 次泛函微商，得

$$\begin{aligned}
&\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\Big(\{\partial_{\mu}[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{c})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - M^{\sigma}\}\cdot \\
&\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) - \\
&\mathrm{i}\sum_{j}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)N^{\sigma}\delta(x-x_j)\Big)\cdot \\
&\exp\Big\{\mathrm{i}\Big[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}^{4}x(J\varphi+K\pi)\Big]\Big\} = 0
\end{aligned} \tag{3-8-5}$$

式中

$$N^\sigma = \xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} \tag{3-8-6}$$

在式（3-8-5）中让 $J=K=0$，得[5]

$$\begin{aligned}\langle 0 \mid T^* \{ \partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \cdot \\ \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) \mid 0\rangle = \mathrm{i}\sum_j \langle 0 \mid T^*[\varphi(x_1)\cdots \\ \varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)N^\sigma] \mid 0\rangle\delta(x - x_j)\end{aligned} \tag{3-8-7}$$

固定 t，让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \to \infty; \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \to -\infty$$

考虑到 $\langle 0 \mid \varphi(\infty, \boldsymbol{x}) = \langle \text{out} \mid$，$\varphi(-\infty, \boldsymbol{x}) \mid 0\rangle = \mid \text{in}\rangle$，可将式（3-8-7）化为

$$\begin{aligned}\langle \text{out}, m \mid \{ \partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] + \\ \mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \mid n - m, \text{in}\rangle = 0\end{aligned} \tag{3-8-8}$$

由于 m 和 n 任意，由式（3-8-8）得

$$\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] = 0 \tag{3-8-9}$$

在四维时空中取一柱体，柱轴沿 t 轴方向，上底 V_1 和下底 V_2 分别为 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的超平面．在此四维柱体上对式（3-8-9）积分，利用四维 Gauss 定理及柱侧面趋于无穷远时场为零的条件，得量子守恒量（算符）

$$Q_R^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_c\tau^{0\sigma}]$$
$$(k = 1,2,3; \sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{3-8-10}$$

由此得到，对于正规 Lagrange 系统，如果系统的正则作用量在增广相空间中的整体变换下不变，且相应变换的 Jacobi 行列式为 1，那么该系统必存在式（3-8-10）的量子守恒量．此结果可视为量子水平的正则形式 Nother 定理．无反常情形，此结论成立．

对于奇异 Lagrange 量系统，其 Green 函数的生成泛函由式（3-7-12）给出．如果有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 在式（3-7-4）的整体变换下不变，且相应的定域变换式（3-8-1）的 Jacobi 行列式为 1，那么与正规 Lagrange 量系统类似的讨论，可得奇异Lagrange量系统的量子守恒量

$$Q_s^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}] \quad (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{3-8-11}$$

式中：$\mathscr{H}_{\text{eff}}$ 为有效 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 相应的 Hamilton 量密度．

式（3-8-11）所示的量子守恒律与正则 Noether 定理给出的经典守恒律相对应[25]，两者一般来说是不同的．由于奇异 Lagrange 量系统在相空间中存在约束，量子化后系统的有效 Hamilton 量一般不同于正则 Hamilton 量，约束 Hamilton 系统的量子正则方程不同于经典正则方程，自然对应的守恒量也不同．此外，在量子情形下除变换需保持系统的有效正则作用量不变外，还须保持泛函测度不变，才能有如式（3-8-11）所示量子守恒律．这也与经典理论不同．可见，经典理论中对称性和守恒律的联系，在量子理论中一般不再保持．在某些问题，如杨-Mills 理论、非 Abel CS 理论，当作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分后，将其化为位形空间生成泛函，位形空间中的有效 Lagrange 量不再具有规范不变性．在杨-Mills 理论中，仍具有 BRS 和 BRST 对称性，在量子水平下，BRS 荷或 BRST 荷代替了经典杨-Mills 守恒荷．在这些对动量可积的情形，这里的形式给出的结果与从位形空间生成泛函导出的结果一致．此处给出的形式的显著优点在于无须作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，一般情况，作出该积分是十分困难的，甚至是不可能的．类似地讨论，如果考虑场的正则变量分别作平移变换，则导致系统的量子正则方程[25]

$$\dot{\varphi}=\frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta \dot{\pi}},\quad \dot{\pi}=\frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta \varphi} \tag{3-8-12}$$

下面来分析杨-Mills 场的量子整体正则对称性[28]．纯杨-Mills 场的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu} \tag{3-8-13}$$

$$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}-f_{bc}^{a}A_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c} \tag{3-8-14}$$

式中：$F_{\mu\nu}^{a}$ 中的耦合常数 g 已省略．Lagrange 量是奇异的，系统在相空间的约束为

$$\Lambda_{a}^{1}=\pi_{a}^{0}\approx 0 \tag{3-8-15}$$

$$\Lambda_{a}^{2}=\partial_{i}\pi_{a}^{i}-f_{ab}^{c}A_{i}^{b}\pi_{c}^{i}\approx 0 \tag{3-8-16}$$

式中：π_{a}^{μ} 为 A_{μ}^{a} 的正则共轭动量．记号“≈”代表弱等，它表示等式在约束确定的超曲面上成立，Λ_{a}^{1}，Λ_{a}^{2} 均为第一类约束，规范条件取为（$\Omega_{1}^{a}\approx 0$ 为 $\dot{\Omega}_{2}^{a}\approx 0$ 而来）

$$\Omega_{1}^{a}=\partial^{i}\pi_{i}^{a}+\nabla A_{0}^{a}-f_{bc}^{a}A_{i}^{b}\partial^{i}A_{0}^{c}\approx 0 \tag{3-8-17}$$

$$\Omega_2^a = \partial^i A_i^a \approx 0 \tag{3-8-18}$$

Green 函数的相空间的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \delta(\Lambda_a^1)\delta(\Lambda_a^2)\delta(\Omega_1^a)\delta(\Omega_2^a)\det\{\Lambda_k, \Omega^l\} \cdot$$

$$\exp\left\{ i\int d^4x(\pi_a^\mu \dot{A}_\mu^a - \mathscr{H}_c + J_a^\mu A_\mu^a) \right\} \tag{3-8-19}$$

式中：$\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量密度．因子 det $\{\Lambda_k, \Omega^l\}$ δ $(\partial^i A_i^a)$ 可用 det $\boldsymbol{M}_L$ δ $(\partial^\mu A_\mu^a)$来代替，而

$$\boldsymbol{M}_L = (\delta_b^a \partial^\mu \partial_\mu + f_{bc}^a A_\mu^c \partial^\mu)\delta(x-y) \tag{3-8-20}$$

由于理论规范无关，以 $\overline{\Omega}_l^a = \Omega_l^a - p_l^a$ (x) 代替 Ω_l^a，生成泛函不变，用 $\exp\left[-\frac{1}{2\alpha_l}\int d^4x(p_l^a)^2\right]$ 乘式 (3-8-19) 后，作关于 p_l^a (x) 的路径积分，略去无关紧要因子，得

$$Z[J, \overline{\zeta}, \zeta, \xi] = \int DA_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \mathscr{D}\lambda_k^a \mathscr{D}\overline{C}^a \mathscr{D}C^a \cdot$$

$$\exp\left\{ i\int d^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^p + J_a^\mu A_\mu^a + \overline{\zeta}^a C^a + \overline{C}^a \zeta^a + \xi_k^a \lambda_k^a) \right\} \tag{3-8-21}$$

式中：$\overline{\zeta}^a$ 和 ζ^a 分别为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的外源，ξ_k^a 为乘子场 λ_k^a 的外源，且

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^p = \mathscr{L}^p + \mathscr{L}_{\text{fix}} + \mathscr{L}_{\text{gh}} + \mathscr{L}_{\text{m}} \tag{3-8-22a}$$

$$\mathscr{L}^p = \pi_a^\mu A_\mu^a - \mathscr{H}_c \tag{3-8-22b}$$

$$\mathscr{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\alpha_2}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \tag{3-8-22c}$$

$$\mathscr{L}_{\text{gh}} = -\partial^\mu \overline{C}^a D_{b\mu}^a C^b \quad (D_{b\mu}^a = \delta_b^a \partial_\mu + f_{bc}^a A_\mu^c) \tag{3-8-22d}$$

$$\mathscr{L}_{\text{m}} = \lambda_k^a \Lambda_a^k - \frac{1}{2\alpha_1}(\Omega_1^a)^2 \tag{3-8-22e}$$

在 BRS 变换

$$\delta A_\mu^a = -\tau D_{b\mu}^a C_b \tag{3-8-23a}$$

$$\delta \pi_a^\mu = \tau f_{bc}^a \pi_c^\mu C_b \tag{3-8-23b}$$

$$\delta C^a = \frac{1}{2}\tau f_{bc}^a C_b C_c \tag{3-8-23c}$$

$$\delta \overline{C}^a = -\frac{1}{\alpha_2}\tau \partial^\mu A_\mu^a \tag{3-8-23d}$$

下，$\delta(D^{\mu}_{b\mu}C_b)=0$，$\delta(\delta C^a)=0$[1]，对 δA^a_μ 和 δC^a 引入相应的外源 u^μ_a 和 v^a，将生成泛函写为

$$Z[J,\bar{\zeta},\zeta,\xi,u,v]=\int \mathscr{D}A^a_\mu \mathscr{D}\pi^\mu_a \mathscr{D}\lambda^a_k \mathscr{D}\bar{C}^a \mathscr{D}C^a \cdot \exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}^p_{\text{eff}}+J^\mu_a A^a_\mu+\bar{\zeta}^a C^a+\bar{C}^a\zeta^a+\xi^a_k\lambda^a_k+u^\mu_a\delta A^a_\mu+v^a\delta C^a)\right\} \tag{3-8-24}$$

在式(3-8-23a)～式(3-8-23d)变换下，$\mathscr{L}^p+\mathscr{L}_{\text{fix}}+\mathscr{L}_{\text{gh}}$ 是不变的. 变换式(3-8-23a)与式(3-8-23b)是第一类约束作为规范生成元所产生的变换，它不会离开约束超曲面[13]. 因此，在上述变换下，$\delta\mathscr{L}_m\approx 0$. 这样，在式(3-8-23a)～式(3-8-23d)变换下，$\delta\mathscr{L}^p_{\text{eff}}\approx 0$. 变换式(3-8-23a)～式(3-8-23d)的 Jacobi 行列式为 1，生成泛函式(3-8-24)在式(3-8-23a)～式(3-8-23d)变换下不变，则有

$$\int \mathscr{D}A^a_\mu \mathscr{D}\pi^\mu_a \mathscr{D}\lambda^a_k \mathscr{D}\bar{C}^a \mathscr{D}C^a\left[\int d^4x(J^\mu_a\delta A^a_\mu+\bar{\zeta}^a\delta C^a+\delta\bar{C}^a\zeta^a)\right]\cdot \exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}^p_{\text{eff}}+J^\mu_a A^a_\mu+\bar{\zeta}^a C^a+\bar{C}^a\zeta+\xi^a_k\lambda^a_k+u^\mu_a\delta A^a_\mu+v^a\delta C^a)\right\}=0 \tag{3-8-25}$$

由此得 Green 函数的 Ward-Takahashi 恒等式，即

$$\int d^4x\left[J^\mu_a\frac{\delta}{\delta u^\mu_a}-\bar{\zeta}^a\frac{\delta}{\delta v^a}-\frac{1}{\alpha_2}\zeta^a\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta J^a_\mu}\right)\right]Z[J,\bar{\zeta},\zeta,\xi,u,v]=0 \tag{3-8-26}$$

在式(3-8-23a)～式(3-8-23d)变换下，沿着约束决定的超曲面上，有效正则作用量不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1. 按式(3-8-11)可得系统的量子 BRS 守恒荷

$$Q=\int d^3x(\pi^\mu_a\delta A^a_\mu+\bar{\pi}_a\delta C^a+\delta\bar{C}^a\pi_a) \tag{3-8-27}$$

式中：$\bar{\pi}^a$ 和 π_a 分别为 C^a 和 $\bar{C}^a$ 的正则动量. 这样无须作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，即可导出 BRS 变换下的 Ward-Takahashi 恒等式和守恒量.

在整体变换

$$C^{a\prime}(x)=C^a(x)+i\varepsilon^\nu(T_\sigma)^a_b C^b(x)A^\sigma_\nu(x) \tag{3-8-28a}$$

$$\bar{C}^{a\prime}(x)=\bar{C}^a(x)-i\varepsilon^\nu\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b A^\sigma_\nu(x)+\frac{i}{\Box}\varepsilon^\nu\partial_\mu[\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\partial^\mu A^\sigma_\nu(x)] \tag{3-8-28b}$$

$$A_\mu^{a\prime}(x) = A_\mu^a(x) + \varepsilon^\nu D_{\sigma\mu}^a A_\nu^\sigma(x) \tag{3-8-28c}$$

$$\pi_a^{\mu\prime}(x) = \pi_a^\mu(x) + \varepsilon^\nu f_{\sigma c}^a \pi_c^\mu(x) A_\nu^\sigma(x) \tag{3-8-28d}$$

下，$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$不变．其中 ε^ν 为参数；T_σ 为规范群生成元的矩阵，式(3-8-28b)又可写为

$$\bar{C}^{a\prime}(x) = \bar{C}^a(x) - \mathrm{i}\varepsilon^\nu \bar{C}^b(x)(T_\sigma)_b^a A_\nu^\sigma(x) +$$
$$\varepsilon^\nu \int \mathrm{d}^4 y \Delta_0(x,y) \partial_\mu [\bar{C}^b(y)(T_\sigma)_b^a \partial^\mu A_\nu^\sigma(y)]$$

式中

$$\square \Delta_0(x,y) = \mathrm{i}\delta^4(x-y) \tag{3-8-29}$$

设 $\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$ 在式(3-8-28)变换下的变更为

$$\delta(\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}}) = \varepsilon^\nu F_\nu(A,\pi)$$

变换式(3-8-28)的 Jacobi 行列式为 1，由整体变换下的正则 Ward 恒等式

$$\int \mathrm{d}^4 x \Big[F^\sigma + J\Big(\xi^\sigma - \tau^{\mu\sigma}\partial_\mu \frac{\delta}{\delta J}\Big) +$$
$$\partial_\mu\Big(\tau^{\mu\sigma} J \frac{\delta}{\delta J}\Big)\Big]_{\substack{\pi \to \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} \\ \varphi \to -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J}}} Z[J] = 0 \tag{3-8-30a}$$

得

$$\int \mathrm{d}^4 x \Big\{ F_\nu - \partial_\mu J_\sigma^\mu \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} - \mathrm{i} f_{\sigma c}^a J_a^\mu \frac{\delta}{\delta J_c^\mu} \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} +$$
$$\bar{\zeta}_a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_b} \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} - \mathrm{i}\zeta_a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta}{\delta \zeta_b} \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} +$$
$$\frac{1}{\square}\partial_\mu \Big[\frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_b} (T_\sigma)_b^a \zeta_a \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} \Big] \Big\} Z[J_a^\mu, \xi_k^a, \bar{\zeta}^a, \zeta^a] = 0 \tag{3-8-30b}$$

令 $Z[J_a^\mu,\xi_k^a,\bar{\zeta}^a,\zeta^a]=\exp\{\mathrm{i}W[J_a^\mu,\xi_k^a,\bar{\zeta}^a,\zeta^a]\}$，按寻常方法通过泛函 Legendre 变换，将 $W[J_a^\mu,\xi_k^a,\bar{\zeta}^a,\zeta^a]$换为正规顶角的生成泛函$\Gamma[A_\mu^a,\lambda_k^a,C^a,\bar{C}^a]$，这样式(3-8-30b)可写为

$$\int \mathrm{d}^4 x \Big\{ F_\nu - A_\nu^\sigma \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} - \mathrm{i} f_{\sigma c}^a A_\nu^\sigma A_\mu^c \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} + A_\nu^\sigma C^a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta \Gamma}{\delta C^b} -$$
$$A_\nu^\sigma \bar{C}^a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^b} + A_\nu^\sigma \partial^\mu \Big[\partial_\mu \Big(\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^a} \frac{1}{\square} \Big) (T_\sigma)_b^a \bar{C}^b \Big] \Big\} = 0 \tag{3-8-31}$$

将式(3-8-31)关于 $A_\lambda(x_1)$、$C^e(x_2)$和 $\bar{C}^f(x_3)$求泛函微商，并让所有场为 0，可得式(3-4-48)那样的规范场-鬼场正规顶角的 Ward 恒等式．其次，变换式(3-8-28c)、式(3-8-28d)是第一类约束作为规范生成元所产生的变换，在此规范变换下，第一类约束式(3-8-15)、式(3-8-16)不会离开约束超曲面[13]．因此，

在式(3-8-28)变换下，

$$\delta\mathscr{L}_{\text{m}}\approx 0,\quad \delta\mathscr{L}_{\text{fix}}\approx 0 \tag{3-8-32}$$

也就是说，在约束(包括规范约束)所确定的超曲面上，有效正则作用量不变，由式(3-8-11)可得系统的量子守恒量[29]，即

$$Q_\nu = \int d^3x \Big\{ \pi_a^\mu D_{b\mu}^a A_\nu^b + i\pi_a (T_\sigma)_b^a C^b A_\nu^\sigma - i\bar{\pi}_a \bar{C}^b (T_\sigma)_b^a A_\nu^\sigma + \pi_a \int d^4 y \Delta_0(x,y)\partial_\mu [\bar{C}^b(y)(T_\sigma)_b^a \partial^\mu A_\nu^\sigma(y)] \Big\} \tag{3-8-33}$$

式中：π_a^μ，π_a 和 $\bar{\pi}_a$ 分别为 A_μ^a，C^a 和 $\bar{C}^a$ 的正则共轭动量，其中

$$\pi_a^\mu = -F_a^{0\mu},\quad \pi_a = -\dot{\bar{C}}^a,\quad \bar{\pi}_a = D_{b0}^a C^b \tag{3-8-34}$$

最后，有效正则作用量在鬼场的标度变换

$$C^a(x) \to e^\theta C^a(x),\quad \bar{C}^a(x) \to e^{-\theta}\bar{C}^a(x) \tag{3-8-35}$$

下不变，其中 θ 为数值参数，且变换的 Jacobi 行列式为 1，由式(3-8-11)得到系统的量子守恒量

$$Q_{\text{gh}} = \int d^3x\, \bar{\pi}^a (\overleftrightarrow{\partial}^0 \delta_b^a + f_{eb}^a A^{0e}) C^b \tag{3-8-36}$$

这与用所谓有效 Lagrange 量理论导致的结果相同[30]. 从分析相空间路径积分中的正则对称性导出的 Ward 恒等式和量子守恒律，其显著优点是不必作出路径积分中对正则动量的积分，因而具有普遍的意义.

3-9 CS 物质场 分数自旋

在(2+1)维时空中任意子(Anyon)呈现出的分数自旋和分数统计性质[31]与凝聚态物质的某些现象相关(特别是分数量子 Hall 效应和高温超导[21])，受到人们的广泛关注. 从量子力学和量子场论方面均开展了理论研究，但量子场论方面的研究远远不及量子力学开展得充分[21-22]. 在场论水平上研究任意子，Abel-CS 理论与物质场最小耦合是最基本的系统.

复标量场耦合 CS 项在(2+1)维时空中的Lagrange量密度[32]

$$\mathscr{L} = (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda \tag{3-9-1}$$

式中：$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$；$\varepsilon_{012} = 1$. 式(3-9-1)对应的作用量在下列变换下不变(Lagrange量改变一散度项)

$$\varphi(x) \to e^{i\varepsilon(x)}\varphi(x),\quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\varepsilon(x) \tag{3-9-2}$$

式(3-9-1)所示 Lagrange 量是奇异的. 为给出此奇异 Lagrange 系统的量子化，需先写出该系统的正则形式表述.

场量 A_μ，φ 和 φ^* 的共轭动量分别为

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0, \quad \pi_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^i} = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j \tag{3-9-3}$$

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (D_0\varphi)^* \tag{3-9-4}$$

$$\pi^* = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = D_0\varphi \tag{3-9-5}$$

式中：$\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{0ij}$. 系统的正则 Hamilton 量

$$\mathscr{H}_c = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi\dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathscr{L} =$$
$$\pi\pi^* - (D_i\varphi)^*(D^i\varphi) - A_0\left(\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0\right) \tag{3-9-6}$$

式中

$$J_0 = i(\pi\varphi - \varphi^*\pi^*) \tag{3-9-7}$$

系统在相空间中的初级约束为

$$\Lambda_1 = \pi_0 \approx 0 \tag{3-9-8}$$

$$\theta_i = \pi_i - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^j \approx 0 \quad (i,j = 1,2) \tag{3-9-9}$$

总 Hamilton 量为

$$H_T = \int d^3x(\mathscr{H}_c + \lambda_1\Lambda_1 + \mu_i\theta_i) \tag{3-9-10}$$

式中：λ_1 和 μ_i 为约束乘子. 初级约束 $\Lambda_1 \approx 0$ 的自洽性要求 $\{\Lambda_1, H_T\} \approx 0$，导致次级约束

$$\phi^1 = \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0 \approx 0 \tag{3-9-11}$$

初级约束 $\theta_i \approx 0(i=1,2)$，$\{\theta_i, H_T\} \approx 0$，给出确定约束乘子 $\mu_i(i=1,2)$ 的方程，而不产生新的次级约束.

容易验证，$\Lambda_1 \approx 0$ 为第一类约束，而 $\theta_i \approx 0(i=1,2)$ 和 $\phi^1 \approx 0$ 为第二类约束. 由于第一类约束与系统的规范不变性(规范生成元)相联系，在系统的量子化中规范条件的选取直接与第一类约束有关. 因此，必须将系统的所有约束作线性组合，以提取系统中第一类约束的最大集合. 不难看出，下列第二类约束的线性组合给出了第一类约束，即

$$\Lambda_2 = \partial^i\theta_i + \phi^1 = \partial^i\pi_i + J_0 + \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \tag{3-9-12}$$

这样，系统的第一类约束为 $\Lambda_1 \approx 0$ 和 $\Lambda_2 \approx 0$，第二类约束为 $\theta_i \approx 0(i=1,2)$.

按照约束 Hamilton 系统的量子化规则，对含第一类约束的系统，需选取规范条件. 考虑采用 Coulomb 规范

$$\Omega_1 = \partial_i A^i \approx 0 \tag{3-9-13}$$

由于存在两个第一类约束，还须再取另一个规范条件. 其规范条件至少应满足一些基本要求，例如规范条件必须能固定规范，必须为系统动力学演化所保持，必须是可达到的等. 下面从 Coulomb 规范随时间演化的稳定性 $\dot{\Omega}_1 \approx 0$ 和系统的运动方程来确定另一规范条件. 由式(3-9-1)写出 A_μ 的 EL 方程，得

$$\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda = J^\mu \tag{3-9-14}$$

式中

$$J^\mu = -\mathrm{i}\varphi^* \mathrm{D}^\mu\varphi + \mathrm{i}(\mathrm{D}^\mu\varphi^*)\varphi \tag{3-9-15}$$

由于 $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\varepsilon_{\mu'\nu\lambda} = 2!\delta_{\mu\mu'}$，所以式(3-9-14) 又可写为

$$\partial_\nu A_\lambda = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}J^\mu \tag{3-9-16}$$

从而

$$\partial_\nu(\partial^\lambda A_\lambda) = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\lambda J^\mu \tag{3-9-17}$$

让 $\nu=0$，得

$$\partial_0(\partial^0 A_0 - \partial^i A_i) = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu 0\lambda}\partial^\lambda J^\mu \tag{3-9-18}$$

由 Coulomb 规范的稳定性要求 $\partial^i \dot{A}_i \approx 0$，从式(3-9-18)，可得

$$\partial_0\partial^0 A_0 \approx \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{i0j}\partial^j J^i \tag{3-9-19}$$

由式(3-9-16)，又有

$$\partial^\nu(\partial_\nu A_\lambda) = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu J^\mu \tag{3-9-20}$$

让 $\lambda=0$，得

$$\partial^0 \partial_0 A_0 - \partial^i \partial_i A_0 = \frac{\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij0}\partial^j J^i \tag{3-9-21}$$

由式(3-9-19)、式(3-9-21) 得

$$\partial_i\partial^i A_0 \approx \frac{2\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij}\partial^j J^i \tag{3-9-22}$$

记 $\nabla^2 = \partial_i \partial^i$，这样，另一个规范条件可取为

$$\Omega_2 = -\nabla^2 A_0 + \frac{2\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij}\partial^i J^j \approx 0 \tag{3-9-23}$$

所有约束 $\Lambda_1, \Lambda_2, \theta_i (i=1,2)$ 和规范约束 Ω_1, Ω_2 一起构成第二类约束. 这样可通过 Dirac 括号和量子括号的对应关系实现对系统的量子化，其对应关系为 $\{\cdot,\cdot\}_\mathrm{D} \to -\mathrm{i}[\cdot,\cdot]$. 计算出场量、正则共轭动量的 Dirac 括号后，可得出非零

的等时对易关系.

为分析系统量子对称性,采用FS路径积分量子化方案,规范条件可写为

$$\Omega_1 = \partial_i A^i \approx 0 \tag{3-9-24}$$

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 - \frac{2\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij}\partial^i J^j \approx 0 \tag{3-9-25}$$

而

$$J^\mu = -\mathrm{i}\phi^* \mathrm{D}^\mu\phi + \mathrm{i}(\mathrm{D}^\mu\phi^*)\phi \tag{3-9-26}$$

此时,Green 函数的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[J] = &\int \mathscr{D}\phi\, \mathscr{D}\pi\, \mathscr{D}\phi^*\, \mathscr{D}\pi^*\, \mathscr{D}A_\mu\, \mathscr{D}\pi^\mu \prod_{j,k,l} \delta(\theta_j)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l) \cdot \\ &\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|\,[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2} \cdot \\ &\exp\left\{\mathrm{i}I^{\mathrm{p}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(J\phi + J^*\phi^* + J^\mu A_\mu)\right\} \end{aligned} \tag{3-9-27}$$

式中:I^{p} 为系统的正则作用量;J, J^*, J^μ 分别为场量 ϕ, ϕ^*, A_μ 的外源.不难验证,Poisson 括号 $\{\Lambda_k, \Omega_l\}$ 以及 $\{\theta_i, \theta_j\}$ 均与场量无关,可以从生成泛函中略去(无须引入鬼场).利用 δ-函数的性质,可将生成泛函写为

$$\begin{aligned} Z[J,\xi] = &\int \mathscr{D}\phi\, \mathscr{D}\pi\, \mathscr{D}\phi^*\, \mathscr{D}\pi^*\, \mathscr{D}A_\mu\, \mathscr{D}\pi^\mu\, \mathscr{D}\lambda_m \cdot \\ &\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J\phi + J^*\phi^* + J^\mu A_\mu + \xi_m\lambda_m)\right\} \end{aligned} \tag{3-9-28}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = \mathscr{L}^{\mathrm{p}} + \mathscr{L}_{\mathrm{m}} = \pi\dot\phi + \pi^*\dot\phi^* + \pi^\mu \dot A_\mu - \\ \mathscr{H}_{\mathrm{c}} + \lambda_j\theta_j + \lambda_k\Lambda_k + \lambda_l\Omega_l \end{aligned} \tag{3-9-29}$$

$\lambda_m = (\lambda_j, \lambda_k, \lambda_l)$ 代表乘子场;$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为正则 Hamilton 量密度;ξ_m 为乘子场的外源.

根据3-8中阐明的整体正则对称性和量子守恒律的关系,已经指出,如果系统的有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 在式(3-7-4)的整体变换下不变,且对应的定域变换式(3-8-1)的Jacobi行列式为1,那么,系统必存在量子守恒律式(3-8-11).在 (x_1, x_2) 平面内的转动变换下,此系统的有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 不变,且对应变换的Jacobi行列式为1,在转动变换下,式(3-7-4)中 $\tau^{0\sigma} = 0$,$\tau^{k\sigma}$ 为空间转动变换的生成函数,ξ^σ 与场(标量场、矢量场)属于 Lorentz 群何种表示有关,按式(3-8-11)得系统的量子守恒角动量

$$\begin{aligned} L = &\int \mathrm{d}^2x[\varepsilon^{jk}(\pi_l x_j \partial_k A^l + \pi x_j \partial_k \varphi + \pi^* x_j \partial_k \varphi^*) + \\ &\pi_i \textstyle\sum_{12}^{ij} A_j] \end{aligned} \tag{3-9-30}$$

式中

$$\sum\nolimits_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j \tag{3-9-31}$$

注意到式(3-9-3)和 $\delta^{jk}\delta^{li}=\delta^{jl}\delta^{ki}-\delta^{ji}\delta^{kl}$，式(3-9-30)可化为[31]

$$L = \int \mathrm{d}^2 x\, \varepsilon^{jk} x_j (\pi \partial_k \varphi + \pi^* \partial_k \varphi^*) - \int \mathrm{d}^2 x\, \varepsilon^{jk} x_j A_k J_0 \tag{3-9-32}$$

其中 J_0 由式(3-9-7)给出.

由 $\phi^1=0$，即式(3-9-11)，有

$$A_i = -\frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon_{ij} \partial_x^j \int \mathrm{d}^2 y\, G(x-y) J_0(y) \tag{3-9-33}$$

式中

$$\nabla^2 G(x-y) = -\delta^{(2)}(x-y) \tag{3-9-34}$$

$$G(x-y) = -\frac{1}{4\pi} \ln |x-y|^2 + \text{const} \tag{3-9-35}$$

将式(3-9-33)代入式(3-9-32)，得

$$L = \int \mathrm{d}^2 x\, \varepsilon^{jk} x_j (\pi \partial_k \varphi + \pi^* \partial_k \varphi^*) - \frac{Q^2}{2\kappa} \tag{3-9-36}$$

式中

$$Q = \int \mathrm{d}^2 x J_0 \tag{3-9-37}$$

式(3-9-36)中右端前面两项为轨道角动量算符，最后一项为反常项，可解释为自旋算符. 记自旋算符为 $S=\frac{Q^2}{(2\kappa)}$，任意子单粒子态记为 $|1\rangle_a$，它携带单位电荷，用算符 S 旋转单粒子态，得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta S} |1\rangle_a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2\kappa}} |1\rangle_a \tag{3-9-38}$$

式中：θ 为转动参数，自旋算符 S 的本征值就是自旋 s，这样就得到自旋 s 和 CS 项中的系数 κ 之间的关系为

$$s = \frac{1}{2\kappa} \tag{3-9-39}$$

如果取 $\theta=2\pi$，当 $\kappa=\frac{1}{2n+1}(n\in\mathbf{Z})$时，单粒子态变号，表明它是Fermi 子，此时自旋为单奇数；而当 $\kappa=\frac{1}{2n}$时，单粒子态不变号，表明它为 Bose 子，其自旋为整数；对其他 κ 的值，就变为任意态，其自旋被称为分数自旋.

在前面关于 Abel CS 项与物质场耦合系统的分数自旋性质的分析中，式(3-9-1)所示 Lagrange 量不含 CS 规范场 A_μ 的 Maxwell 项

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

如果在式(3-9-1)中添加 Maxwell 项,构成所谓含 Abel CS 项的标量电动力学,类似地分析可知,该系统具有分数自旋性质[33],但此时总角动量中需计及 Abel CS 矢量场的自旋角动量等的贡献. 同样的研究指出,含 Abel CS 项的旋量电动力学[9]以及一些含 Abel CS 项的非线性σ-模型[34],也具有分数自旋性质,其研究是在量子场论水平下给出的,不同于其他由经典场论基于经典 Noether 定理计算系统的角动量[23,31],经典理论的结果在量子水平下是否保持,是需要澄清的. 这里的分析还可推广到非 Abel CS 项与物质场耦合的系统[22].

3-10 电子-声子系统

电子-声子系统(极化子)的相互作用是超导的 BCS 理论的基础. 在(1+1)维时空情形的研究中,用了奇异 Lagrange 量来描述电子和声子的相互作用,并按约束系统的 Dirac 理论分析了该系统的正则量子化[1],但其中的 Lagrange 量中的电子场函数满足 Schrödinger 方程,不能反映电子具有自旋和量子化后给出电子场准确的反对易关系. 这里将 Lagrange 量中电子场用 Dirac 旋量 ψ 来描述,就可克服上述困难. 现考虑(2+1)维系统,将该系统的 Lagrange 量密度修改为

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}[\rho\dot{q}^2 - s(\nabla q)^2] - G\bar{\psi}\gamma^0\psi q \tag{3-10-1}$$

式中:ρ,s 和 G 为参量;ψ 为 Dirac 旋量(四分量)电子场;γ^μ 为 Dirac γ-矩阵,$\bar{\psi}=\psi^+\gamma^0$;$q$ 为声子场.

与场 ψ,$\bar{\psi}$和 q 相应的正则动量分别为

$$\pi_\psi = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = \mathrm{i}\,\bar{\psi}\gamma^0, \quad \pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = 0, \quad \pi_q = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}} = \rho\dot{q} \tag{3-10-2}$$

初级约束为

$$\theta_1 = \pi_\psi - \mathrm{i}\,\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0, \quad \theta_2 = \pi_{\bar{\psi}} \approx 0 \tag{3-10-3}$$

正则 Hamilton 量密度为

$$\mathscr{H}_c = \pi_\psi\dot{\psi} + \pi_{\bar{\psi}}\dot{\bar{\psi}} + \pi_q\dot{q} - \mathscr{L} = \bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^k\partial_k + m)\psi - \frac{1}{2\rho}\pi_q^2 + \frac{s}{2}(\nabla q)^2 + G\bar{\psi}\gamma^0\psi q \tag{3-10-4}$$

总 Hamilton 量

$$H_\mathrm{T} = \int_V \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_c + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2) \tag{3-10-5}$$

根据约束的相容性条件 $\dot{\theta}_1=\{\theta_1,H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$ 和 $\dot{\theta}_2=\{\theta_2,H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$，可给出 Lagrange 乘子 λ_1,λ_2 适合的方程：

$$\mathrm{i}\,\lambda_1=(-\mathrm{i}\gamma^k\partial_k+m)\psi(x)+Gq(x)\psi(x)$$

$$\mathrm{i}\,\lambda_2=(\mathrm{i}\gamma^k\partial_k-m)\psi(x)-G\bar{\psi}(x)q(x)$$

因而不再导致新的约束，容易验证，所有约束 θ_1 和 θ_2 都是第二类的.

从式(3-10-1)所示的 Lagrange 量在相空间中的约束，可计算出相应的 Dirac 括号. 为了计算与第二类约束相应的 Dirac 括号，先计算 θ_i 和 θ_j 之间的 Poisson 括号. 场论中含 Fermi 子情形相空间变量的函数的 Poisson 括号

$$\{F(x),G(x)\}=\int\mathrm{d}^3z\left[\frac{\partial_{\mathrm{r}}F(x)\partial_{\mathrm{l}}G(y)}{\partial\psi(z)\partial\pi_\psi(z)}-(-1)^{n_Fn_G}\frac{\partial_{\mathrm{r}}G(y)\partial_{\mathrm{l}}F(x)}{\partial\psi(z)\partial\pi_\psi(z)}\right]\tag{3-10-6}$$

式中：n_F 和 n_G 分别为 F 和 G 的 Grassmann 宇称. 由式(3-10-6)，约束 θ_i 和 θ_j 间的 Poisson 括号 $\{\theta_i,\theta_j\}$ 构成的矩阵

$$\boldsymbol{C}=-\mathrm{i}\begin{bmatrix}0&\gamma_0^{\mathrm{T}}\\\gamma_0&0\end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\tag{3-10-7}$$

其逆矩阵

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\mathrm{i}\begin{bmatrix}0&\gamma_0\\\gamma_0^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\tag{3-10-8}$$

场论中的 Dirac 括号

$$\{F(x),G(x)\}_{\mathrm{D}}=\{F(x),G(x)\}-\int\mathrm{d}z\mathrm{d}w\{F(x),\theta_i(z)\}\cdot C_{ij}^{-1}(z,w)\{\theta_j(w),G(y)\}\tag{3-10-9}$$

式中 $C_{ij}^{-1}\{\theta_j,\theta_k\}=\delta_{ik}$，由此可求出

$$\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\}_{\mathrm{D}}=-\mathrm{i}\gamma^0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\tag{3-10-10}$$

$$\{\psi(x),\pi_\psi(y)\}_{\mathrm{D}}=-\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\tag{3-10-11}$$

式中：$\psi,\bar{\psi}$ 等为 Grassmann 变量，由 Dirac 括号过渡到量子括号，$\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}}\to-\mathrm{i}[\cdot,\cdot]_+$，就自然得到电子场的反对易量子化规则

$$\{\psi,\pi\}_{\mathrm{D}}\longrightarrow\mathrm{i}[\hat{\psi},\hat{\pi}]_+\tag{3-10-12}$$

式中：$[\cdot,\cdot]_+$ 为场算符的反对易子；$\hat{\psi}$ 和 $\hat{\pi}$ 分别为 ψ 和 π 相应的算符. 这样就自动得到了旋量场量子化中的反对易关系，从而改进了原有的讨论.

系统 Green 函数的生成泛函可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^a\mathscr{D}\pi_a\prod_i\delta(\theta_i)(\det|\{\theta_i,\theta_j\}|)^{1/2}\cdot\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\pi_a\dot{\varphi}^a-\mathscr{H}_c+J_a\varphi^a+K^a\pi_a)\}\tag{3-10-13}$$

不难验证,式中因子 $\det|\{\theta_i,\theta_j\}|$ 与场量无关,故可将它们从生成泛函中略去,式(3-10-13)可写为

$$Z[J,K,Y]=\int\mathscr{D}\varphi^a\mathscr{D}\pi_a\mathscr{D}\mu\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}+J_a\varphi^a+K^a\pi_a+Y_i\mu_i)\right\} \tag{3-10-14}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}=\mathscr{L}^{\mathrm{P}}+\mathscr{L}_m \tag{3-10-15}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}=\dot{\psi}\pi_\psi+\dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}}+\pi_q\dot{q}-\mathscr{H}_c \tag{3-10-16}$$

$$\mathscr{L}_m=\mu_i\theta_i \tag{3-10-17}$$

式中:$\mu_i(x)$为与约束 θ_i 相联系的乘子场.

系统的有效正则 Lagrange 量在空间平移下不变,平移变换的 Jacobi 行列式为 1,且 $\tau^{0\sigma}=0$. 由式(3-8-11)可得量子理论中系统的动量 $\boldsymbol{P}$ 守恒

$$\boldsymbol{P}=\int\mathrm{d}^3x(\pi_\psi\boldsymbol{\nabla}\psi+\pi_q\boldsymbol{\nabla}q) \tag{3-10-18}$$

有效正则作用量的时间平移不变性,$\tau^{i\sigma}=0(i=1,2,3)$,$\tau^{0\sigma}=1$,且变换的 Jacobi行列式为 1. 在约束超曲面上由式(3-8-11)可得量子水平下守恒的能量

$$E=\int\mathrm{d}^3x\left[\bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^k\partial_k+m)\psi-\frac{1}{2\rho}\pi_q^2+\frac{s}{2}(\boldsymbol{\nabla}q)^2+G\bar{\psi}\gamma^0\psi q\right] \tag{3-10-19}$$

在空间转动变换下,场变换的 Jacobi 行列式为 1,且 $\tau^{0\sigma}=0$. 根据场量 $\psi(x)$和 $q(x)$的 Lorentz 变换性质以及式(3-8-11),得量子守恒角动量

$$M_{jk}=\int\mathrm{d}^3x\left\{\pi_\psi\left(x_k\frac{\partial\psi}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)+\frac{1}{2}\psi^+\sigma_{jk}\psi+\pi_q\left(x_k\frac{\partial q}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial q}{\partial x_k}\right)\right\} \tag{3-10-20}$$

式中:$\sigma_{jk}=-\mathrm{i}\gamma_j\gamma_k$,$j\neq k$. 此结果与原有的结果不同,这里的量子守恒总角动量中有电子自旋角动量的贡献,而原有的总角动量中不含电子自旋角动量,因为用 Schrödinger 场描述电子,就不能反映电子的自旋.

系统的有效正则作用量在下列整体规范变换

$$\psi'(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\varepsilon}\psi(x),\quad \pi'_\psi(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}e\varepsilon}\pi_\psi(x)$$

下不变,且变换的 Jacobi 行列式为 1. 由式(3-8-11)得量子水平下的量子守恒荷,即

$$Q=e\int\mathrm{d}^3x\psi^+(x)\psi(x) \tag{3-10-21}$$

量子守恒量式(3-10-19)～式(3-10-21)与从式(3-10-1)出发，按经典正则 Noether 定理导出的经典守恒量相同.这里得到的是量子守恒律，而原有得到的是经典守恒律.对含 Maxwell 项的电子、声子和光子相互作用系统的量子对称性已进行了研究[35]，这里不再叙述了.

3-11 CS 项与极化子耦合系统

在(2+1)维时空中任意子呈现出的分数自旋和分数统计性质，与凝聚态物质的某些现象相关(特别是分数量子 Hall 效应和高温超导)，受到人们的广泛关注，CS 项分别与标量场[32-33]、旋量场[9]耦合的模型在量子水平下出现了分数自旋的性质.这里对 CS 项与极化子耦合的系统采用 FS 路径积分量子化的方法进行量子化，讨论其量子对称性，并分析在含有 Maxwell 动力学项的情况下是否仍具有分数自旋和分数统计的性质[36].

(2+1)维时空 CS 场与极化子耦合系统的 Lagrange 量为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}=&\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda+\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m)\psi+\\
&\frac{1}{2}[\rho\dot{q}^2-s(\nabla q)^2]-G\bar{\psi}\gamma^0\psi q
\end{aligned}
\tag{3-11-1}
$$

式中：$D_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu$. A_μ 是 CS 规范场.

按 Dirac 约束系统理论，式(3-11-1)所示 Lagrange 密度是奇异的.这里首先在相空间中分析系统的约束.与场 $A_\mu,\psi,\bar{\psi}$ 和 q 相应的正则动量分别为

$$
\left.
\begin{aligned}
&\pi^0=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_0}=0,\quad \pi_\psi=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0\\
&\pi_{\bar{\psi}}=\frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}=0,\quad \pi_q=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}=\rho\dot{q}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3-11-2}
$$

$$
\pi^i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i}=\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j
\tag{3-11-3a}
$$

系统的初级约束分别为

$$
\left.
\begin{aligned}
&\theta_1^0=\pi^i-\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j\approx0,\quad \theta_2^0=\pi^0\approx0\\
&\theta_3^0=\pi_\psi-\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0\approx0,\quad \theta_4^0=\pi_{\bar{\psi}}\approx0
\end{aligned}
\right\}
\tag{3-11-3b}
$$

其中符号“≈”为 Dirac 意义上的弱等.系统的正则 Hamilton 量密度为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}_c=&\pi_\mu\dot{A}^\mu+\pi_\psi\dot{\psi}+\dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}}+\pi_q\dot{q}-\mathscr{L}=\\
&\bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^iD_i+m)\psi-\frac{1}{2\rho}\pi_q^2+\frac{s}{2}(\nabla q)^2+G\bar{\psi}\gamma^0\psi q+
\end{aligned}
$$

$$\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}A_0\partial_i A_j - \bar{\psi}\gamma^0 A_0\psi \tag{3-11-4}$$

其总 Hamilton 量为

$$H_T = \int_V d^3x(\mathscr{H}_c + \lambda_1\theta_1^0 + \lambda_2\theta_2^0 + \lambda_3\theta_3^0 + \lambda_4\theta_4^0) \tag{3-11-5}$$

由初级约束的自洽性条件 $\dot{\theta}_1^0=\{\theta_1^0, H_T\}\approx 0$ 和 $\dot{\theta}_2^0=\{\theta_2^0, H_T\}\approx 0$ 可导致次级约束，即

$$\theta_1^1 = \bar{\psi}\gamma^i\psi - \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_j A_0 \approx 0 \tag{3-11-6a}$$

$$\theta_2^1 = -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j + \bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0 \tag{3-11-6b}$$

初级约束的自洽性条件 $\{\theta_3^0, H_T\}\approx 0$，$\{\theta_4^0, H_T\}\approx 0$ 不导致新的约束，而是确定了 Lagrange 乘子 λ_4，λ_3，有

$$\mathrm{i}\gamma^0\lambda_4 = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^i D_i - m) - G\bar{\psi}\gamma^0 q + \bar{\psi}\gamma^0 A_0 \tag{3-11-7}$$

$$\mathrm{i}\gamma^0\lambda_3 = -(\mathrm{i}\gamma^i D_i - m)\psi + G\gamma^0 q\psi - \gamma^0 A_0\psi \tag{3-11-8}$$

次级约束的自洽性条件 $\dot{\theta}_1^1\approx 0$，$\dot{\theta}_2^1\approx 0$，不再导致新的约束，确定了 Lagrange 乘子 λ_2，λ_1.

容易检验，所有约束均为第二类约束. 根据 FS 量子化方案，系统的 Green 函数的相空间的生成泛函为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi^a \mathscr{D}\pi_a \prod_i \delta(\theta_i)(\det|\{\theta_i,\theta_j\}|)^{1/2} \cdot$$
$$\exp\{\mathrm{i}\int d^3x(\pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c + J_a\varphi^a + K^a\pi_a)\} \tag{3-11-9}$$

式中：$\varphi^a=(\psi,\bar{\psi};A_\mu,q)$；$\pi_a$ 为与场 φ^a 相应的共轭动量. 这里分别对场 φ^a、动量 π_a 引进外源 J_a，K^a. 不难验证，$\det|\{\theta_i,\theta_j\}|$ 与场变量无关. 这样可将它从式(3-11-9)所示生成泛函中略去. 利用 δ-函数的性质，式(3-11-9)可表示成

$$Z[J,K,Y] = \int \mathscr{D}\varphi^a \mathscr{D}\pi_a \mathscr{D}\mu_i \exp\{\mathrm{i}\int d^3x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_a\varphi^a + K^a\pi_a + Y_i\mu_i)\} \tag{3-11-10}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_m \tag{3-11-11}$$

$$\mathscr{L}^{\text{p}} = \pi^\mu\dot{A}_\mu + \dot{\psi}\pi_\psi + \dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}} + \pi_q\dot{q} - \mathscr{H}_c \tag{3-11-12}$$

$$\mathscr{L}_m = \mu_i\theta_i \tag{3-11-13}$$

μ_i 为与约束 θ_i 相联系的乘子场；Y_i 为与 μ_i 相应的外源.

3-11-1 分数自旋与分数统计

如果在下面整体变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\pi) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma \zeta^\sigma(x,\varphi,\pi) \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma \eta^\sigma(x,\varphi,\pi) \end{aligned}\right\} \tag{3-11-14}$$

下，有效作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{P}} = \int \mathrm{d}^2 x \mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{P}}$ 不变. 式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 是无穷小参数；$\tau^{\mu\sigma}, \zeta^\sigma, \eta^\sigma$ 为时空坐标和正则变量的给定函数，且变换的 Jacobi 行列式为 1，那么由正则量子 Noether 定理，按式(3-8-11)，有量子守恒荷

$$Q^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3 x [\pi(\zeta^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}] = \text{const}$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{3-11-15}$$

式中：$\mathscr{H}_{\text{eff}}$ 为与有效 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{P}}$ 相联系的有效 Hamilton 量密度. 式(3-11-11)所示的有效 Lagrange 量在空间平移下不变，平移变换的 Jacobi 行列式为 1，且 $\tau^{0\sigma}=0$. 由式(3-11-15)可得量子理论中系统的动量 $\boldsymbol{P}$ 守恒，即

$$\boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}^2 x (\pi_\mu \nabla A_\mu + \pi_\psi \nabla \psi + \pi_q \nabla q) \tag{3-11-16}$$

有效正则作用量的时间平移不变性，类似地讨论，由式(3-8-11)可求出系统的量子守恒的能量.

系统的有效正则 Lagrange 量在下列整体 U(1)群规范变换下不变，即

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\varepsilon}\psi(x), \quad \pi'_\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\varepsilon}\pi_\psi(x) \tag{3-11-17}$$

式中：ε 为 U(1)群参数，且变换的 Jacobi 行列式为 1. 由式(3-11-15)得在量子水平下的荷守恒，即

$$Q' = e\int \mathrm{d}^2 x \bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) = e\int \mathrm{d}^2 x \psi^+(x)\psi(x) = \text{const} \tag{3-11-18}$$

在空间转动变换下 $\tau^{0\sigma}=0$，场变换的 Jacobi 行列式为 1，由式(3-11-15)，可得系统的量子守恒角动量

$$\begin{aligned} L = \int \mathrm{d}^2 x [&(\pi_k S_{12}^{kl} A_l + \varepsilon^{ij} x_i \pi^k \partial_j A_k) + \\ &(\pi_{\psi\alpha} R_{12}^{\alpha\beta}\psi_\beta + \varepsilon^{ij} x_i \pi_\psi \partial_j \psi) + \varepsilon^{ij} x_i \pi_q \partial_j q] \end{aligned} \tag{3-11-19}$$

式中：$S_{ij}^{kl} = \delta_i^k\delta_j^l - \delta_j^k\delta_i^l$，$R_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_j)^{\alpha\beta}$. 其中 γ_i 为 Dirac 矩阵. 将式(3-11-3b)代入式(3-11-19)，并利用关系 $\varepsilon^{jk}\varepsilon_{il} = \delta_i^j\delta_l^k - \delta_l^j\delta_i^k$，可得[31]

$$L = \int \mathrm{d}^2 x\, \varepsilon^{ij} x_i (\pi_\psi \partial_j \psi + \pi_q \partial_j q) +$$

$$\int d^2x\, \pi_{\psi_\alpha} R_{12}^{\alpha\beta}\, \psi_\beta + \frac{\kappa}{4\pi}\int d^2x[\varepsilon^{ij} x_i A_j (\varepsilon^{lk}\partial_l A_k)] \tag{3-11-20}$$

由式(3-11-1)所示 Lagrange 量可写出与场 A_μ 相应的 EL 方程：

$$\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda = J^\mu \quad (\partial_\mu J^\mu = 0) \tag{3-11-21}$$

式中：J^μ 包括 J^0 和 J^i，其中

$$J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{3-11-22}$$

$$J^i = \bar{\psi}\gamma^i\psi \tag{3-11-23}$$

让 $\mu=0$，由式(3-11-21)，可得

$$\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_j A_j = J^0 \tag{3-11-24}$$

由式(3-11-24)可得

$$A_i(x) = \frac{2\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij}\partial_x^j\int d^2y\, G(x-y)J^0(y) \tag{3-11-25}$$

式中：$G(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| + \text{const}$ 为二维空间的 Green 函数，满足 Poisson方程$\partial_i\partial_i G(x,y) = \delta^{(2)}(x-y)$. 因此，式(3-11-20)右端的第三项可表示为

$$\frac{\kappa}{4\pi}\int d^2x\, \varepsilon^{ij} x_i A_j \varepsilon^{kl}\partial_k A_l = \frac{1}{2\kappa}\int d^2x d^2y x_i j^0(x) G(x-y)\partial_i j^0(y) =$$

$$\frac{1}{2\kappa}\int d^2x d^2y\, j^0(x) x_k \frac{(x-y)_k}{|x-y|^2} j^0(y) = \frac{Q^2}{2\kappa} \tag{3-11-26}$$

由式(3-11-20)和式(3-11-26)，可得

$$L = \int d^2x\, \varepsilon^{ij} x_i(\pi_\psi\partial_j\psi + \pi_q\partial_j q) + \int d^2x \pi_{\psi_\alpha} R_{12}^{\alpha\beta}\psi_\beta - \frac{Q^2}{2\kappa} \tag{3-11-27}$$

其中 $Q = \int d^2x J^0$，式(3-11-27)右端第一项为轨道角动量，第二项为通常的自旋角动量，最后一项为附加项，通常被解释为分数自旋项[32]. 记自旋算符 $S = \frac{Q^2}{(2\kappa)}$，带一个单位电荷的单粒子(任意子)态用$|1\rangle_a$表示. 则将算符 S 作用在单粒子态上，得

$$e^{i\beta S}\,|1\rangle_a = e^{i\frac{\beta}{2\kappa}}\,|1\rangle_a \tag{3-11-28}$$

其中 β 为参数. 自旋算符 S 的本征值为 s. 则 s 和 CS 系数 k 的关系为

$$s = \frac{1}{2\kappa} \tag{3-11-29}$$

取 $\beta=2\pi$，当 $2\kappa = \frac{1}{(2n+1)}$ $(n\in\mathbf{Z})$时，单粒子态取负号，表明它遵从 Fermi 统

计，κ 使得自旋 s 取半整数值；当 $2\kappa=\frac{1}{(2n)}(n\in\mathbf{Z})$ 时，单粒子态不改变，它遵从 Bose 统计，自旋s取整数值；当 κ 取其他值时，单粒子态是任意的，自旋s取分数值[32].

3-11-2　含 Maxwell 项和 CS 项与极化子耦合的系统

如果在式(3-11-1)给出的 Lagrange 量中加入 Maxwell 动力学项，含有 Maxwell 动力学项的 CS 项与极化子耦合系统的 Lagrange 量密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\lambda}+\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}-m)\psi+\\&\frac{1}{2}[\rho\dot{q}^{2}-s(\nabla q)^{2}]-G\bar{\psi}\gamma^{0}\psi q\end{aligned}\tag{3-11-30}$$

式中

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\tag{3-11-31}$$

与场 $A_{\mu},\psi,\bar{\psi}$，和 q 相应的正则动量为

$$\pi^{i}=-F^{0i}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_{j}\tag{3-11-32}$$

$$\pi^{0}=0,\quad \pi_{\psi}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{0},\quad \pi_{\bar{\psi}}=0,\quad \pi_{q}=\rho\dot{q}\tag{3-11-33}$$

该系统的初级约束为

$$\theta_{1}^{0}=\pi^{0}\approx 0,\quad \theta_{2}^{0}=\pi_{\psi}-\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{0}\approx 0,\quad \theta_{3}^{0}=\pi_{\bar{\psi}}\approx 0\tag{3-11-34}$$

与此 Lagrange 量相应的正则 Hamilton 密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{c}=&\pi_{\mu}\dot{A}^{\mu}+\pi_{\psi}\dot{\psi}+\pi_{\bar{\psi}}\dot{\bar{\psi}}+\pi_{q}\dot{q}-\mathscr{L}=\\&\frac{1}{2}\pi^{i}\pi_{i}+\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\pi_{i}A_{j}-\frac{\kappa^{2}}{16\pi^{2}}A^{i}A_{j}-A_{0}\partial_{i}\pi^{i}+\\&\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}+\bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^{i}\mathrm{D}_{i}+m)\psi-\frac{1}{2\rho}\pi_{q}^{2}+\\&\frac{s}{2}(\nabla q)^{2}+G\bar{\psi}\gamma^{0}\psi q-\bar{\psi}\gamma^{0}A_{0}\psi-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}A_{0}\partial_{i}A_{j}\end{aligned}\tag{3-11-35}$$

总 Hamilton 量为

$$H_{\mathrm{T}}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{c}+\lambda_{1}\theta_{1}^{0}+\lambda_{2}\theta_{2}^{0}+\lambda_{3}\theta_{3}^{0})\tag{3-11-36}$$

自洽性条件$\{\theta_{1}^{0},H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$ 导致次级约束

$$\theta_{1}^{1}=\partial_{i}\pi^{i}+\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_{i}A_{j}+\bar{\psi}\gamma^{0}\psi\approx 0\tag{3-11-37}$$

初级约束 $\dot{\theta}_{2}^{0}\approx 0,\dot{\theta}_{3}^{0}\approx 0$ 和次级约束 $\dot{\theta}_{1}^{1}\approx 0$(自洽性条件)给出确定 Lagrange 乘子 λ_{3},λ_{2} 的方程，不再产生新的约束. 容易检验所有约束都为第二类约束，类似地可写出系统的生成泛函，导出量子正则 Noether 定理，按照同样的方法可得到量子守恒量，量子水平下所得守恒动量与不包含 Maxwell 动力学项时

的表达式相似（π^μ 不同），有

$$\boldsymbol{P}=-\int \mathrm{d}^2 x(\pi_\psi \nabla \psi+\pi_q \nabla q+\pi^\mu A_\mu) \tag{3-11-38}$$

在约束超曲面上的量子守恒能量为

$$E=\int \mathrm{d}^2 x\Big[\frac{1}{2}\pi^i\pi_i+\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\pi_i A_j-\frac{\kappa^2}{16\pi^2}A^i A_j+\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}+\\ \bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^i \mathrm{D}_i+m)\psi-\frac{1}{2\rho}\pi_q^2+\frac{s}{2}(\nabla q)^2+G\bar{\psi}\gamma^0\psi q\Big] \tag{3-11-39}$$

空间转动不变性导致该系统的量子守恒角动量为

$$L=\int \mathrm{d}^2 x[(\pi_k S_{12}^{kl}A_l+\varepsilon^{ij}x_i\pi^k\partial_j A_k)+(\pi_{\psi a}R_{12}^{\alpha\beta}\psi_\beta+\\ \varepsilon^{ij}x_i\pi_\psi\,\partial_j\psi)+\varepsilon^{ij}x_i\pi_q\partial_j q] \tag{3-11-40}$$

其中 $S_{ij}^{kl}=\delta_i^k\delta_j^l-\delta_j^k\delta_i^l$. 将式(3-11-32)代入式(3-11-40)，并利用关系 $\varepsilon^{jk}\varepsilon_{il}=\delta_i^j\delta_l^k-\delta_l^j\delta_i^k$，得

$$L=\int \mathrm{d}^2 x\,\varepsilon^{ij}x_i(F^{k0}\partial_j A_k+\pi_\psi\partial_j\psi+\pi_q\partial_j q)+\int \mathrm{d}^2 x\pi_{\psi a}R_{12}^{\alpha\beta}\psi_\beta+\\ \int \mathrm{d}^2 x F_{k0}S_{12}^{kl}A_l+\int \mathrm{d}^2 x\,\varepsilon^{ij}\,\frac{\kappa}{4\pi}x_i A_j(\varepsilon^{lk}\partial_l A_k) \tag{3-11-41}$$

由 Lagrange 量式(3-11-30)，与场 A_μ 相应的 EL 方程为

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda+J^\mu=0 \tag{3-11-42}$$

让 $\mu=0$，得

$$\partial_i\pi^i+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j+J^0=0 \tag{3-11-43}$$

由式(3-11-43)可知，含 Maxwell 项和 CS 项与极化子耦合的系统，其分数自旋项仍为$\frac{Q^2}{2\kappa}$，其中 $Q=\int \mathrm{d}^2 x J^0$，则式(3-11-41)变为

$$L=\int \mathrm{d}^2 x\,\varepsilon^{ij}x_i(F^{k0}\partial_j A_k+\pi_\psi\partial_j\psi+\pi_q\partial_j q)+\\ \int \mathrm{d}^2 x\pi_{\psi a}R_{12}^{\alpha\beta}\psi_\beta+\int \mathrm{d}^2 x\,F_{k0}S_{12}^{kl}A_l-\frac{Q^2}{2\kappa} \tag{3-11-44}$$

由式(3-11-44)可看出，Maxwell 动力学项的存在为总角动量提供了轨道角动量和自旋角动量，分数自旋性质依然存在.

3-12 非 Abel CS 理论中的量子守恒荷

从相空间中的对称性分析，建立了约束 Hamilton 系统经典理论中的正

则形式 Noether 定理[1,25]，并已推广到量子情形[8]. 近年来大量的工作讨论了(2+1)维 Abel CS 规范理论中呈现的分数自旋和分数统计性[21-22]，这与量子 Hall 效应和高温超导有关. CS 项与物质场耦合的现有研究中，一些基本问题有待进一步澄清. 首先，在 Hamilton 分析中利用经典场方程和规范条件消去规范场，而忽略了对约束的处理，在量子水平上其结果是否与原始模型等价[7]. 其次，关于任意子角动量的讨论，均是基于经典 Noether 定理来导出的，其结果在量子水平上是否有效，值得仔细研究. 已指出对一些 Abel CS 模型，在量子水平上仍然保持分数自旋性质[7,33-34]. 一些作者讨论了非 Abel CS 理论中的经典角动量[31]. 由于非 Abel CS 项存在，能否改变系统的自旋统计性质，这里将在量子水平上来研究这个问题. 此外，还导出了非 Abel CS 理论的量子 BRS 荷.

考虑(2+1)维非 Abel CS 项和标量场耦合的系统，其 Lagrange 量为

$$\mathscr{L} = (\mathrm{D}_\mu\phi)^+ (\mathrm{D}^\mu\phi) + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a + \frac{1}{3}f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c\right) \quad (3\text{-}12\text{-}1)$$

式中：ϕ 为 N 分量的标量场，$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}T^a A_\mu^a$，$T^a$ 为规范群生成元，$[T^a, T^b] = \mathrm{i}f^{abc}T^c$，$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$. 规范不变性要求参数 κ 受限制[24]. CS 场和标量场的正则动量分别为

$$\pi_0^a \approx 0, \quad \pi_i^a = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^{ja} \quad (3\text{-}12\text{-}2)$$

$$\pi = (\mathrm{D}_0\phi)^+, \quad \pi^+ = (\mathrm{D}_0\phi) \quad (3\text{-}12\text{-}3)$$

这里约定 $\varepsilon^{012} = \varepsilon^{12} = 1$. 式(3-12-2)为初级约束. 正则 Hamilton 量为

$$H_c = \int \mathrm{d}^2x\mathscr{H}_c = \int \mathrm{d}^2x\left[\pi\pi^+ + (\mathrm{D}_i\phi)^+ (\mathrm{D}_i\phi) - A_0^a\left(\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}F_{ij}^a + J_0^a\right)\right] \quad (3\text{-}12\text{-}4)$$

式中：$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_j^a + f^{abc}A_i^b A_j^c$，$J_0^a = -\mathrm{i}(\pi T^a\phi - \phi^+ T^a\pi^+)$. 总 Hamilton 量为

$$H_\mathrm{T} = \int \mathrm{d}^2x\left[\mathscr{H}_c + \lambda^a\pi_0^a + \lambda_i^a\left(\pi_i^a - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^{ja}\right)\right] \quad (3\text{-}12\text{-}5)$$

初级约束 $\pi_0^a \approx 0$ 的自洽性条件，$\{\pi_0^a, H_\mathrm{T}\} \approx 0$，导致次级约束为

$$\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}F_{ij}^a + J_0^a \approx 0 \quad (3\text{-}12\text{-}6)$$

其他初级约束的自洽性条件，导致的方程用以确定约束乘子 λ_i^a. 次级约束式(3-12-6)的自洽性条件不产生新的约束. 与 Abel CS 理相似，作约束的线性组合，并记

$$\Lambda_0^a = \pi_0^a \approx 0 \quad (3\text{-}12\text{-}7)$$

$$\Lambda_1^a = (D_i\pi^i)^a + J_0^a + \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a \approx 0 \qquad (3\text{-}12\text{-}8)$$

$$\theta_i^a = \pi_i^a - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^{ja} \approx 0 \qquad (3\text{-}12\text{-}9)$$

不难验证,Λ_0^a 和 Λ_1^a 为第一类约束,θ_i^a为第二类约束.

按约束 Hamilton 系统路径积分量子化理论,对每一个第一类约束,需选取一个规范条件. 考虑 Coulomb 规范

$$\overline{\Omega}_2^a = \partial^i A_i^a \approx 0 \qquad (3\text{-}12\text{-}10)$$

$\overline{\Omega}_2^a$ 的自洽性要求,$\dot{\overline{\Omega}}_2^a \approx 0$,给出另一规范约束,即

$$\overline{\Omega}_1^a = \partial^i\pi_i^a + \nabla^2 A_0^a - f_{bc}^a A_i^b \partial^i A_0^c \approx 0 \qquad (3\text{-}12\text{-}11)$$

此系统 Green 函数的相空间生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[J] = \int & \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \mathscr{D}\phi^a \mathscr{D}\pi_a \mathscr{D}\phi^{+a} \mathscr{D}\pi_a^+ \cdot \\ & \det\{\Lambda_k^a, \overline{\Omega}_l^b\}(\det\{\theta_i^a, \theta_j^b\})^{1/2}\delta(\Lambda)\delta(\overline{\Omega})\delta(\theta) \cdot \\ & \exp\{\mathrm{i}\int d^3x(\mathscr{L}^p + J_a^\mu A_\mu^a + J_a^+\phi^a + \phi^{+a}J_a)\} \end{aligned} \qquad (3\text{-}12\text{-}12)$$

因子 $\det\{\theta_i^a(x), \theta_j^b(y)\} = -\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}\delta^{ab}\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$与场量无关,可以从生成泛函中略去,而

$$\det\{\Lambda_i^a(x), \overline{\Omega}_j^b(y)\} = \det | M_C^{ab}\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) | \qquad (3\text{-}12\text{-}13)$$

$$M_C^{ab} = \delta^{ab}\partial^i\partial_i - g f_{bc}^a A_i^c \partial^i \qquad (3\text{-}12\text{-}14)$$

因子 $\det\{\Lambda_i^a(x), \overline{\Omega}_j^b(y)\}\delta(\partial^i A_i^a)$可用因子 $\det \boldsymbol{M}_L(\partial^\mu A_\mu^a)$来代替[1],而

$$\boldsymbol{M}_L = (\delta^{ab}\partial^\mu\partial_\mu - g f_{bc}^a A_\mu^c \partial^\mu)\delta^{(2)}(x-y) \qquad (3\text{-}12\text{-}15)$$

根据 δ-函数和 Grassmann 变量 $\overline{C}^a(x)$,$C^a(x)$的积分性质,可将式(3-12-2)所示生成泛函写为

$$\begin{aligned} Z[J, \bar{\xi}, \xi, X, Y] = \int & \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\pi_a^\mu \mathscr{D}\phi^a \mathscr{D}\pi_a \mathscr{D}\phi^{+a} \mathscr{D}\pi_a^+ \mathscr{D}\overline{C}^a \mathscr{D}C^a \cdot \\ & \exp\{\mathrm{i}\int d^3x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^p + J_a^\mu A_\mu^a + J_a^+\phi^a + \phi^{+a}J_a + \\ & \bar{\xi}_a C^a + \overline{C}^a\xi_a + X_a^k \mu_k^a + Y_a^i v_i^a)\} \end{aligned} \qquad (3\text{-}12\text{-}16)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{eff}}^p = & \mathscr{L}^p - \partial^\mu \overline{C}^a D_{b\mu}^a C^b + \mu_a^k \Lambda_k^a - \\ & \frac{\alpha_1}{2}(\overline{\Omega}^a)^2 - \frac{\alpha_2}{2}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + v_a^i \theta_i^a \end{aligned} \qquad (3\text{-}12\text{-}17)$$

$\mu_a^k(x)$,$v_i^a(x)$为乘子场;$\bar{\xi}_a$,ξ_a 为鬼场 C^a,$\overline{C}^a$ 的外源;X_a^k 和 Y_a^i 为乘子场 μ_k^a 和 v_a^i 的外源.

由有效正则作用量在相空间中的整体对称性，无须作用生成泛函中对正则动量的路径积分，即可导出系统的量子守恒律. 考虑 BRS 变换

$$\delta A_\mu^a = D_{b\mu}^a C^b \tau,\ \delta \pi_a^\mu = f_{be}^a \pi_e^\mu C^b \tau \tag{3-12-18a}$$

$$\delta C^a = \frac{\tau}{2} f_{be}^a C_b C_e,\ \delta \overline{C}^a = -\frac{\tau}{\alpha_2 g}\partial^\mu A_\mu^a \tag{3-12-18b}$$

式中：τ 为反对易 Grassmann 数. 在式(3-12-18)变换下，式(3-12-17)中三项之和 $\mathscr{L}^p - \partial^\mu \overline{C}^a D_{\mu b}^a C^b - \frac{\alpha_2}{2}(\partial^\mu A_\mu^a)^2$ 是不变的. 在规范变换式(3-12-18a)下，第一类约束的变分仍在约束超曲面内[1]，且 θ_i^a 在式(3-12-18a)变换下不变. 故在式(3-12-18)变换下，沿着约束(包括规范约束)所确定的超曲面上，系统的有效正则 Lagrange 量不变，即 $\delta \mathscr{L}_{\text{eff}}^p \approx 0$. BRS 变换的 Jacobi 行列式为 1. 根据正则量子 Noether 定理，按式(3-8-11)，得此非 Abel CS 模型存在如下 BRS 量子守恒荷[37]

$$Q = \int d^2 x (\pi_a^\mu \delta A_\mu^a + \overline{P}_a \delta C^a + \delta\, \overline{C}^a P_a) \tag{3-12-19}$$

式中：$\overline{P}_a$，P_a 分别为 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的正则动量.

由空间转动不变性，利用量子正则 Noether 定理，可得量子守恒量

$$L = \int d^2 x [\varepsilon^{ij}(x_i \pi_a \partial_j \phi^a + x_i \pi_a^\mu \partial_j A_\mu^a + x_i \overline{P}_a \partial_j C^a + x_i P_a \partial_j \overline{C}^a) + \pi_\mu S_{12}^{\mu\nu} A_\nu] \tag{3-12-20}$$

由于 $\mathscr{L}_{\text{gh}}$ 包含了场的微商项，故必须考虑鬼粒子对角动量的贡献. 将式(3-12-2)代入式(3-12-20)，并利用 $\varepsilon^{jk}\varepsilon_{il} = \delta_i^j \delta_l^k - \delta_l^j \delta_i^k$ 关系，可得[22]

$$L = \int d^2 x\, \varepsilon^{ij} x_i \pi_a \partial_j \phi^a + \int d^2 x\, \varepsilon^{ij}[x_i \overline{P}_a \partial_j C^a + x_i P_a \partial_j C^a] + \frac{\kappa}{4\pi}\int d^2 x [\varepsilon^{ij} x_i A_j^a (\varepsilon^{lk} \partial_l A_k^a)] \tag{3-12-21}$$

场 A_μ^a 的 EL 运动方程为

$$\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\nu\mu\lambda}(2\partial_\mu A_\lambda^a + \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\lambda^c) = J^{a\nu} \tag{3-12-22}$$

在式(3-12-21)中让 $\nu=0$，有

$$\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}(2\partial_i A_j^a + \varepsilon^{abc} A_i^b A_j^c) = J^{a0} \tag{3-12-23}$$

容易验证

$$A_i^a(x) = -\frac{2Q^a}{\kappa}\varepsilon_{ij}\frac{x^j}{x^2} \tag{3-12-24}$$

满足库仑规范 $\partial_i A_i^a = 0$ 和式(3-12-23)，$Q^a = \int d^2 x j_0^a(x)$ 是非 Abel 荷. 式(3-

12-22)中的第三项可以写成[22]

$$\frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2 x[\varepsilon^{ij} x_i A_j^a (\varepsilon^{lk}\partial_l A_k^a)] = \frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2 x \partial_i (x_j A^{ja} A^{ia} - x^i A_j^a A^{ja}) \tag{3-12-25}$$

利用式(3-12-24),得

$$\left.\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^2 x \partial_i (x_j A^{ja} A^{ia}) = 0 \\ &\frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2 x \partial_i (x^i A_j^a A^{ja}) = -\frac{(Q^a)^2}{2\kappa} \end{aligned}\right\} \tag{3-12-26}$$

这样,式(3-12-21)就变成

$$L = \int \mathrm{d}^2 x\, \varepsilon^{ij} x_i \pi_a \partial_j \phi^a + \int \mathrm{d}^2 x\, \varepsilon^{ij}[x_i \overline{P}_a \partial_j C^a + x_i P_a \partial_j \overline{C}^a] - \frac{(Q^a)^2}{2\kappa} \tag{3-12-27}$$

式(3-12-27)等号右边前两项为轨道角动量;最后一项为附加项,仿文献[31]和[32]的分析,该项为分数自旋项. 由于式(3-12-27)中第二项不含κ,鬼场对角动量虽有贡献,但不会改变分数自旋的性质.

(2+1)维时空中含非 Abel CS 项的 O(3)非线性σ-模型在量子水平下也具有分数自旋的性质,自旋角动量取任意值,大小取决于 CS 系数[22].

3-13 规范系统量子水平的变换性质

对称性和守恒律有密切联系,从对称性出发可导出守恒律,在量子 Noether 定理中,系统的作用量在整体变换下是不变的[7]. 如果在整体变换下,考虑到系统作用量的改变,将会导致什么样的结果? 本节基于 Green 函数在位形空间中的生成泛函,导出了规范不变的系统在量子水平下的变换性质方程,从这个方程直接可给出系统存在量子守恒量的充分条件.

3-13-1 量子水平场的变换性质方程

量子系统的性质由 Green 函数的生成泛函导出,相空间中的生成泛函比位形空间生成泛函更基本. 当对正则动量的路径积分为 Gauss 型时,相空间路径积分可化为位形空间的路径积分. 一般来说,要作出对正则动量的路径积分常常是十分困难的(特别是对约束 Hamilton 系统),甚至是不可能的. 对杨-Mills 场,按约束 Hamilton 系统的 FS 路径积分量子化方案,做出对正则动量的路径积分后,恰好可以化为 FP 方法所得的结果. FP 方法虽不严格,但

直观简便，对一些实际规范系统的应用也是可行的.

这里将从较直观和简便的 FP 方法所给出的位形空间中规范理论的 Green 函数的生成泛函出发，从位形空间整体对称变换出发导出量子水平下场的变换性质方程.

设系统由场量 $\varphi^\sigma(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 描述的，场的规范不变 Lagrange 量为 $\mathscr{L}(\varphi^\sigma,\varphi^\sigma_{,\mu})$，其中 $\varphi^\alpha_{,\mu}=\partial_\mu\varphi^\mu=\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi^\mu$. 选取规范条件 $F^a[\varphi^\sigma]=0(a=1,2,\cdots,m)$，按照 FP 方法，则系统的量子性质可用 Green 函数的位形空间生成泛函 Z 来描述，Z 可写为[1]

$$Z[J,\bar{\xi},\xi]=\int\mathscr{D}\varphi^\sigma\mathscr{D}\overline{C}_a\mathscr{D}C_b\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_\alpha\varphi^\alpha+\bar{\xi}^a C_a+\overline{C}_a\xi^a)\}\tag{3-13-1}$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}\tag{3-13-2}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}=-\frac{1}{2\alpha_0}(F^a[\varphi^\sigma])^2\tag{3-13-3}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\overline{C}_aM_F^{ab}C_b\tag{3-13-4}$$

式中：α_0 为规范参数；$C_a,\overline{C}_a$ 为 C-数反对易标量场；$J_\alpha,\bar{\xi}^a,\xi^a$ 分别为 $\varphi^\alpha,C_a,\overline{C}_a$ 的外源；M_F^{ab} 取决于规范变换和规范条件的具体形式. 为简化记号，记 $\varphi=(\varphi^\sigma,\overline{C}_a,C_a)$，$J=(J_\alpha,\bar{\xi}^a,\xi^a)$. 于是式(3-13-1)可写为

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\varphi\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J\varphi)\}\tag{3-13-5}$$

考虑位形空间的无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\varphi_{,\mu})\\\varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\varepsilon_\sigma\xi^\sigma(x,\varphi,\varphi_{,\mu})\end{aligned}\right\}\tag{3-13-6}$$

设系统的有效作用量 I_{eff} 在变换式(3-13-6)下不是不变的，且设有效作用量的改变为

$$\delta I_{\mathrm{eff}}=\int\varepsilon_\sigma[\partial_\mu W^{\mu\sigma}(\varphi,\varphi_{,\mu})+R^\sigma(\varphi,\varphi_{,\mu})]\mathrm{d}^4x\tag{3-13-7}$$

其中 $W^{\mu\sigma},R^\sigma$ 均为场 φ 及其一阶微商 $\varphi_{,\mu}$ 的函数. 将式(3-13-6)整体变换定域化，考虑如下定域变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\varphi_{,\mu})\\\varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\varepsilon_\sigma(x)\xi^\sigma(x,\varphi,\varphi_{,\mu})\end{aligned}\right\}\tag{3-13-8}$$

式中：$\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，其值及其微商在四维时空区域的边界上为 0. 在式(3-13-8)变换下，有效作用量的变更为

$$\Delta I_{\text{eff}}=\int \mathrm{d}^4 x\, \varepsilon_\sigma(x)\left\{\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \varphi}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+\right.$$

$$\left.\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]\right\}+$$

$$\int \mathrm{d}^4 x\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]\partial_\mu \varepsilon_\sigma(x) \tag{3-13-9}$$

式中

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \varphi}=\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu}}\right) \tag{3-13-10}$$

由于有效作用量在整体变换式(3-13-6)下的改变由式(3-13-7)给出，式(3-13-9)中第一个积分为式(3-13-7). 根据 $\varepsilon_\sigma(x)$ 的边界条件，式(3-13-9)又可写为

$$\Delta I_{\text{eff}}=-\int \mathrm{d}^4 x\, \varepsilon_\sigma(x)\left\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]-\right.$$

$$\left.R^\sigma-\partial_\mu W^{\mu\sigma}\right\} \tag{3-13-11}$$

变换式(3-13-8)的 Jacobi 行列式记为 $\bar{J}=1+J_1[\varphi,\varphi_{,\mu},\varepsilon]$，由于生成泛函式(3-13-5)在式(3-13-8)变换下不变，有

$$Z[J]=\int \mathscr{D}\varphi \bar{J}\,(1-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\, \varepsilon_\sigma(x)\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]-$$

$$R^\sigma-\partial_\mu W^{\mu\sigma}-J(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\})\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\mathscr{L}_{\text{eff}}+J\varphi)\}=$$

$$\int \mathscr{D}\varphi(1+J_1-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\, \varepsilon_\sigma(x)\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]-$$

$$R^\sigma-\partial_\mu W^{\mu\sigma}-J(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\})\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\mathscr{L}_{\text{eff}}+J\varphi)\} \tag{3-13-12}$$

将式(3-13-12)关于 $\varepsilon_\sigma(x)$ 求泛函微商

$$\left.\frac{\delta Z}{\delta_{\varepsilon\sigma(x)}}\right|_{\varepsilon_\sigma(x)=0}=0$$

$$\int \mathscr{D}\varphi\{\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\right]-R^\sigma-\partial_\mu W^{\mu\sigma}-$$

$$J(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})-J_0^\sigma\}\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\mathscr{L}_{\text{eff}}+J\varphi)\}=0 \tag{3-13-13}$$

式中

$$J_0^\sigma=-\mathrm{i}\left.\frac{\delta \bar{J}[\varphi,\varphi_{,\mu},\varepsilon]}{\delta \varepsilon_\sigma(x)}\right|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} \tag{3-13-14}$$

将式(3-13-13)关于 $J(x)$ 求 n 次泛函微商，得

$$\int \mathscr{D}\varphi\Big(\{\partial_\mu[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})]-$$
$$R^\sigma-\partial_\mu W^{\mu\sigma}-J(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})-J_0^\sigma\}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)-$$
$$\mathrm{i}\sum_j\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\delta(x-x_j)\Big)\cdot$$
$$\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}+J\varphi)\}=0 \tag{3-13-15}$$

在式(3-13-15)中，让外源为零，$J=0$，有

$$\langle 0\mid T^*\{\partial_\mu[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})]-R^\sigma-\partial_\mu W^{\mu\sigma}-J_0^\sigma\}\cdot$$
$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdot\cdots\cdot\varphi(x_n)\mid 0\rangle=\mathrm{i}\langle 0\mid\sum_j\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{j-1})\cdot$$
$$\varphi(x_{j+1})\cdot\cdots\cdot\varphi(x_n)(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})\mid 0\rangle\delta(x-x_j) \tag{3-13-16}$$

式中：$|0\rangle$ 代表场的真空态；T^* 为一种特定的编时乘积，有

$$\langle 0\mid T^*(\partial_\mu\varphi(x)\partial_\nu\varphi(y)\cdots)\mid 0\rangle=\partial_\mu\partial_\nu\langle 0\mid T(\varphi(x)\varphi(y)\cdots)\mid 0\rangle$$

其中 T 为编时算符. 固定 t，让

$$t_1,t_2,\cdots,t_m\to+\infty;\quad t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_n\to-\infty$$

由式(3-13-16)，得

$$\langle \text{out},m\mid T^*\{\partial_\mu[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})]-$$
$$R^\sigma-\partial_\mu W^{\mu\sigma}-J_0^\sigma\}\mid n-m,\text{in}\rangle=0 \tag{3-13-17}$$

由于 m,n 任意，从而得系统的量子变换性质方程，即

$$\partial_\mu[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+W^{\mu\sigma}]=R^\sigma+J_0^\sigma \tag{3-13-18}$$

在位形空间中的整体变化下，如果系统的有效作用量不变，且对应式(3-13-8)变换的 Jacobi 行列式为 1，即 $R^\sigma=0,J_0^\sigma=0$，根据式(3-13-18)，系统存在量子守恒量

$$Q^\sigma=\int_V \mathrm{d}^3x\Big[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,0}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+W^{\mu\sigma}\Big]=\text{const} \tag{3-13-19}$$

这就是位形空间规范场论系统的量子 Noether 定理. 但当系统的有效作用量在式(3-31-6)变换下不变，而对应变换式(3-13-8)的 Jacobi 行列式与 ε_σ 有关时，即 $R^\sigma=0,J_0^\sigma\neq0$，由式(3-13-18)得

$$\partial_\mu\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+W^{\mu\sigma}\right]=J_0^\sigma\neq 0 \qquad (3\text{-}13\text{-}20)$$

这样对应于整体对称变换相应的经典守恒量在量子水平下就不再保持. 当整体变换下系统的有效作用量改变，且对应变换式(3-13-8)的 Jacobi 行列式与 ε_σ 有关，即$R^\sigma\neq 0$，$J^\sigma\neq 0$，但满足条件 $R^\sigma+J^\sigma=0$，代入式(3-13-18)得

$$Q^\sigma=\int_V d^3x\left[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,0}}(\xi^\sigma-\varphi_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+W^{\mu\sigma}\right]=\text{const} \qquad (3\text{-}13\text{-}21)$$

这说明系统在某种非对称变换下（没有经典守恒量），也可能存在量子守恒量. 这是由于量子理论中路径积分测度在对称变换下的非不变性造成的.

3-13-2 非 Abel CS 理论

(2+1)维时空中非 Abel CS 场的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a+\frac{1}{3}f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c\right) \qquad (3\text{-}13\text{-}22)$$

$$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \qquad (3\text{-}13\text{-}23)$$

式中：A_μ^a 为 CS 规范场，f_{bc}^a 为规范群的结构常数. 采用 FP 量子化方案，对系统进行路径积分量子化. 选取规范条件

$$\partial^\mu A_\mu^a-\lambda^a=0 \qquad (3\text{-}13\text{-}24)$$

λ^a 为与不依赖于场 $A_\mu(x)$ 的任意函数. 利用 FP 量子化方案可写出此系统 Green 函数的生成泛函

$$Z[J]=\int\prod_{x,a,\mu}\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}\delta(\partial_\mu A_\mu^a-\lambda^a)dA_\mu^a\cdot$$
$$\exp\left\{i\int d^3x(\mathscr{L}+J_a^\mu A_\mu^a)\right\} \qquad (3\text{-}13\text{-}25)$$

式中：$\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=[M_{\mathrm{L}}^{\alpha\beta}]$，其中

$$M_{\mathrm{L}}^{\alpha\beta}=(\delta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial_\mu-gf_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\gamma\partial^\mu)\delta^{(3)}(x-y) \qquad (3\text{-}13\text{-}26)$$

根据 Grassmann 变量 $\overline{C}_a(x)$和 $C_b(y)$的积分性质，有

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=\int\mathscr{D}\overline{C}_a(x)\mathscr{D}C_b(y)\cdot$$
$$\exp\left\{i\int d^3x d^3y\,\overline{C}_a(x)M_{\mathrm{L}}^{ab}C_b(y)\right\} \qquad (3\text{-}13\text{-}27)$$

用权重因子为

$$\exp\left\{i\int d^3x\left[\lambda_a B^a+\frac{\alpha_0}{2}(B^a)^2\right]\right\} \qquad (3\text{-}13\text{-}28)$$

乘 $Z[J]$的表达式，B^a 为 C-数辅助标量场，然后对 λ_a，B^a 作路径积分，得

$$Z[J,\bar{\xi},\xi]=\int \mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{C}_a\mathscr{D}C_b\mathscr{D}B^a\cdot$$

$$\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{\text{eff}}+J_a^\mu A_\mu^a+\bar{\xi}^a C_a+\bar{C}_a\xi^a]\}\quad(3\text{-}13\text{-}29)$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}+B^a\partial_\mu A^{\mu a}+\frac{\alpha_0}{2}(B^a)^2-\partial^\mu\bar{C}_a\mathrm{D}_{b\mu}^a C_b\quad(3\text{-}13\text{-}30)$$

式中：$\bar{C}_a(x)$和$C_b(x)$为鬼场，$\mathrm{D}_{b\mu}^a=\delta_b^a\partial_\mu-f_{cb}^a A_\mu^c$. 故量子化后的有效 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a+\frac{1}{3}f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c\right)+$$

$$B^a\partial_\mu A^{\mu a}+\frac{\alpha_0}{2}(B^a)^2-\partial^\mu\bar{C}_a\mathrm{D}_{b\mu}^a C_b\quad(3\text{-}13\text{-}31)$$

有效 Lagrange 量在下列形式的变换下是不变的，即

$$C^a\rightarrow \mathrm{e}^\theta C^a,\bar{C}^a\rightarrow \mathrm{e}^{-\theta}\bar{C}^a\quad(3\text{-}13\text{-}32)$$

式中：θ为参数. 变换的 Jacobi 行列式为 1. 由量子 Noether 定理，有

$$J_c^\mu=\bar{C}^a\mathrm{D}_b^{a\mu}C^b,\quad Q_c=\int \mathrm{d}^2xJ_c^0,\quad \frac{\mathrm{d}Q_c}{\mathrm{d}t}=0\quad(3\text{-}13\text{-}33)$$

Q_c 即为鬼粒子数. 可见，量子水平鬼粒子数守恒. 式(3-13-31)所示有效 Lagrange 量在 BRST(Becchi-Rouet-Stora-Tyutin)变换，即

$$\left.\begin{aligned}\delta A_\mu^a&=\mathrm{D}_{b\mu}^a C^b\tau,\quad &\delta B^a&=0\\ \delta C^a&=\frac{1}{2}f_{bc}^a C^b C^c\tau,\quad &\delta\bar{C}^a&=B^a\tau\end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}13\text{-}34)$$

下的改变为

$$\delta\mathscr{L}_{\text{eff}}=\partial^\mu G_\mu\tau,\quad G_\mu=B^a\mathrm{D}_{b\mu}^a C^b\quad(3\text{-}13\text{-}35)$$

式中：τ为 Grassmann 参数. 由于

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu^b(y)}[A_\mu^a(x)+\delta A_\mu^a(x)]=\delta_\mu^\nu\delta^{(3)}(x-y)(\delta_b^a+\tau f_{bc}^a C^c)\quad(3\text{-}13\text{-}36)$$

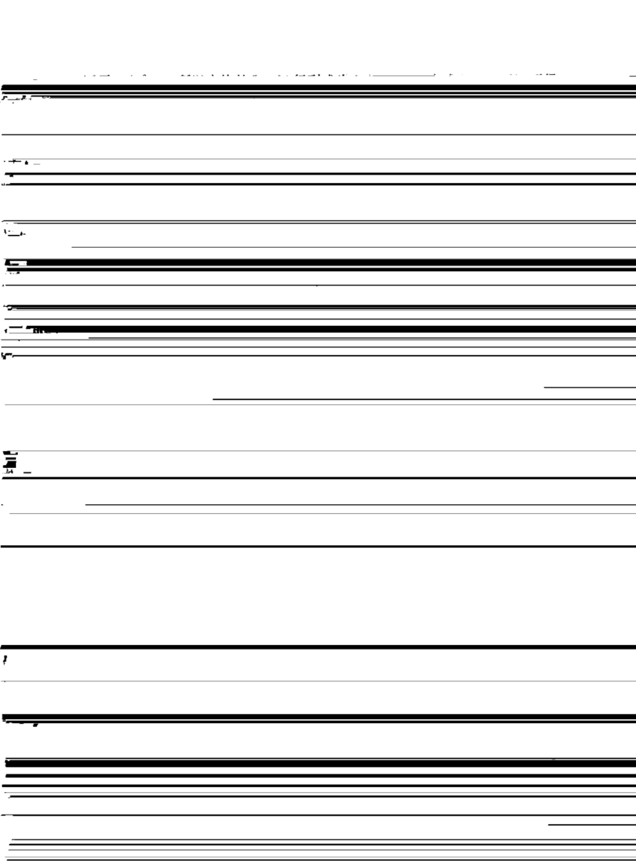
$$\frac{\delta}{\delta C^b(y)}[C^a(x)+\delta C^a(x)]=\delta^{(3)}(x-y)\left(\delta_b^a+\frac{1}{2}\tau f_{bc}^a C^c\right)\quad(3\text{-}13\text{-}37)$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{C}^b(y)}[\bar{C}^a(x)+\delta\bar{C}^a(x)]=\delta^{(3)}(x-y)\delta_b^a\quad(3\text{-}13\text{-}38)$$

$$\frac{\delta}{\delta C^b(y)}[A_\mu^a(x)+\delta A_\mu^a(x)]=\tau\mathrm{D}_{b\mu}^a\delta^{(3)}(x-y)\quad(3\text{-}13\text{-}39)$$

$$\frac{\delta}{\delta B^b(y)}[\bar{C}^a(x)+\delta\bar{C}^a(x)]=\tau\delta^{(3)}(x-y)\delta_b^a\quad(3\text{-}13\text{-}40)$$

因此变换的 Jacobi 矩阵对角线上的元素为 1，非对角线上不为零的元素均含 τ



自由度系统的量子变换性质方程

$$\mathrm{D}\left[L\tau^{\sigma}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\xi^{\sigma}-\dot{q}\tau^{\sigma})\right]=R^{\sigma}+J_{0}^{\sigma} \tag{3-13-48}$$

式中：$J_{0}^{\sigma}=-\left.\frac{\mathrm{i}\delta \overline{J}}{\delta\varepsilon_{\sigma}(t)}\right|_{\varepsilon_{\sigma}=0}$. 不妨设 q 为 Cartesian 坐标 x，考虑空间平移变换

$$\left.\begin{aligned}t'&=t\\q'(t')&=q(t)+\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{3-13-49}$$

式中：ε 为无穷小任意参数. 在式(3-13-49)变换下，由式(3-13-43)确定的作用量的变分为

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left(-\frac{\partial V}{\partial q}\right)\varepsilon\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}F\varepsilon\,\mathrm{d}t \tag{3-13-50}$$

变换式(3-13-49)中 $q(t)$ 变换的 Jacobi 行列式为 1，$J_{0}^{\sigma}=0$，且式(3-13-49)中 $\tau^{\sigma}=0,\xi=1$. 由式(3-13-48)，得

$$\mathrm{D}p=\mathrm{D}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=F \tag{3-13-51}$$

或

$$p_1-p_2=\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t \tag{3-13-52}$$

式(3-13-52)相应于量子力学中的动量定理.

其次，考虑无穷小空间转动变换

$$\left.\begin{aligned}t'&=t\\q_i'(t)&=q_i(t)+\alpha_{ij}q_j(t)\quad(|\alpha_{ij}|\ll 1)\end{aligned}\right\} \tag{3-13-53}$$

式中：α_{ij} 是无穷小参数. 在式(3-13-53)变换下，作用量 I 的变分为

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left(-\frac{\partial V}{\partial q_i}\alpha_{ij}q_j\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\alpha_{ij}F_iq_j\,\mathrm{d}t \tag{3-13-54}$$

在式(3-13-53)所示空间转动变换下，$q_i(t)$ 变换的 Jacobi 行列式为 1. 此时式(3-13-48)中 $J_{0}^{\sigma}=0,\tau^{\sigma}=0,\xi=q$，由式(3-13-48)，得

$$[p_iq_j-p_jq_i]_{t=t_1}^{t=t_2}=\int_{t_1}^{t_2}[q_jF_i-q_iF_j]\mathrm{d}t \tag{3-13-55}$$

式(3-13-55)为量子力学中的动量矩定理.

当式(3-13-43)所示 Lagrange 量中的位势 $V(q)$ 适合

$$V(ag)=a^{-1}V(q) \tag{3-13-56}$$

时，a 为任意参数，此时系统作用量在下列变换

$$\left.\begin{aligned}t'&=t+2\varepsilon t\\q'&=q+\varepsilon q\end{aligned}\right\} \tag{3-13-57}$$

中不是不变的[1]，由经典 Noether 定理，存在如下守恒量[1]

$$mq\dot{q}-2\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2+V(q)\right]t=\text{const} \tag{3-13-58}$$

在量子情形,变换式(3-13-57)相应的 Jacobi 行列式 $\bar{J}=1+3\varepsilon+0(\varepsilon^2)$ 与 ε 有关,$J_0^a\neq0$,由式(3-13-48),在量子水平没有与经典情形相同的守恒量式(3-13-58),经典理论中对称性和守恒律的关系在量子理论中不一定再保持[38].

3-14 位形空间非定域 Ward 恒等式

在规范理论中,Ward(或 Ward-Takahashi)恒等式不但是证明可重整性所不可缺少的,而且在许多具体计算中也起着重要的作用,它可以把高阶固有顶角的计算化为低阶固有顶角的计算,使计算得以简化. 对非 Abel 理论,按 FP 方法,量子化后的有效 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\text{gh}}+\mathscr{L}_{\text{fix}}$,其中 $\mathscr{L}_{\text{gh}}(x)$是鬼场项,$\mathscr{L}_{\text{fix}}(x)$是规范固定项,$\mathscr{L}(x)$是理论中规范不变的原始 Lagrange 量. Becchi-Ronet-Stora 曾提出一种变换(称为 BRS 变换),使得 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$在该变换下不变. 由这个不变性导出了相应的 Ward(或 Ward-Takahashi)恒等式. 在 BRS 变换中,含规范场的变换就是普通的规范变换,鬼场的变换不是线性的. 这样的 Ward 恒等式中,与鬼场有关的各种固有顶角(例如规范场-鬼场-鬼场顶角)之间的关系相当复杂,不便于实际应用. 这往往造成一些工作中的计算不能进行到底.

BRS 变换使鬼场部分变得复杂,其原因在于 BRS 变换要求 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$不变. 但这是不必要的. 从 Abel 理论来看,量子化后须考虑 Lagrange 量 $\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\text{fix}}$,而通常 Ward 恒等式是由 $\mathscr{L}(x)$的规范不变性导出的,规范不变性并不保持整个 $\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\text{fix}}$不变. 类似这种情况,在非 Abel 情况下,只考虑保持 $\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\text{gh}}$不变的变换,由此不变性来推导相应的 Ward 恒等式. 从相空间路径积分形式出发,对此已做了讨论. 对于规范理论,较简单和直观的量子化方法是 FP 方法给出的.

这里从 FP 方法所给出的位形空间中规范理论的 Green 函数的生成泛函出发,从位形空间普遍的非定域变换出发导出系统的 Ward 恒等式[39]. 变换中鬼场的部分可能是线性的,由此可得到便于计算的 Ward 恒等式,用于非 Abel CS 理论,所得结果与相空间中研究结果相同,这表明 FP 路径积分量子化方法对此非 Abel CS 模型适用. 对于规范理论 FP 方法比约束 Hamilton 系统路径积分量子化方法更简便适用.

3-14-1 位形空间非定域 Ward 恒等式

设非 Abel 规范场 $A_\mu^a(x)$和物质场 $\phi(x)$耦合的规范不变 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\phi,A_\mu^a,\partial_\mu\phi,\partial_\nu A_\mu^a)$. 选取规范条件 $F^a[A_\mu^a]=0$,按 FP 方法,得到该系统的 Green 函数的位形空间生成泛函

$$Z[J,J_a^\mu]=\int\mathscr{D}\phi\mathscr{D}A_\mu^a\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J\phi+J_a^\mu A_\mu^a)\right\}\tag{3-14-1}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}&=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}+\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}\\\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}&=C_\alpha M_F^{\alpha\beta}C_\beta\\\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}&=-\frac{1}{2\alpha}(F^\alpha[A_\mu^\alpha])^2\end{aligned}\right\}\tag{3-14-2}$$

其中 $M_F^{\alpha\beta}$ 取决于规范变换和规范条件的具体形式. 为简化记号，记 $\varphi=(\phi,A_\mu^\alpha,C_\alpha,C_\alpha^+)$，且 $I_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}x^4\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$，则式(3-14-1) 化为

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\varphi\cdot\exp\left\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ\varphi\right\}\tag{3-14-3}$$

考虑位形空间中的定域和非定域变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu'}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R_\sigma^\mu\varepsilon^\sigma(x)\\\varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+S_\sigma\varepsilon^\sigma(x)+\\&\int\mathrm{d}^4yE(x,y)A_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\end{aligned}\right\}\tag{3-14-4}$$

式中：$E(x,y)$为给定的光滑函数，$\varepsilon^\sigma(x)$为无穷小任意函数，它们及其各级微商在区域边界上为 0；$R_\sigma^\mu,S_\sigma,A_\sigma$ 为线形微分算符，且

$$\left.\begin{aligned}&R_\sigma^\mu=r_\sigma^{\mu(l)}\partial_{(l)},\quad A_\sigma=a_\sigma^{(m)}\partial_{(m)},\quad S_\sigma=s_\sigma^{(n)}\partial_{(n)}\\&r_\sigma^{\mu(l)}=r_\sigma^{\overbrace{\mu\nu\cdots\lambda}^{l}},\quad(m)=\overbrace{\mu\nu\cdots\rho}^{m},\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3-14-5}$$

式中：$r_\sigma^{\mu(l)},a_\sigma^{(m)},s_\sigma^{(n)}$ 为场量和时空坐标的函数；$Z[J]$在式(3-14-4)变换下不变. 在此变换下，有

$$\Delta I_{\mathrm{eff}}=\int\left\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}\delta\varphi+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}\delta\varphi\right)\right\}\mathrm{d}^4x+\int\partial_\mu(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\Delta x^\mu)\mathrm{d}^4x\tag{3-14-6}$$

式中：$\varphi_{,\mu}=\partial_\mu\varphi$，且

$$\begin{aligned}\delta\varphi&=\Delta\varphi-\varphi_{,\mu}\Delta x^\mu\\\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}&=\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}\right)\end{aligned}\tag{3-14-7}$$

设在式(3-14-4)变换的 Jacobi 行列式为 $1+\delta J^0$，由式(3-14-3)所示生成泛函在式(3-14-4)变换下的不变性，有

$$\begin{aligned}Z[J]=&\int\mathscr{D}\varphi[1+\delta J^0+\mathrm{i}\Delta I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(J\delta\varphi)]\exp\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ\varphi\}=\\&\int\mathscr{D}\varphi\exp\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ\varphi\}[1+\delta J^0+\end{aligned}$$

$$
\mathrm{i}\int\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}\delta\varphi+\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}\delta\varphi\right)+J(S_{\sigma}-\varphi_{,\mu}R_{\sigma}^{\mu})\epsilon^{\sigma}(x)+
$$

$$
J\int\mathrm{d}^{4}y(E(x,y)A_{\sigma}(y)\epsilon^{\sigma}(y))\}\mathrm{d}^{4}x\Big] \tag{3-14-8}
$$

由于在区域边界上 $\epsilon^{\sigma}(x)$ 及其各级微商为零，其中 $\int\partial_{\mu}(J\varphi\Delta x^{\mu})\mathrm{d}^{4}x$ 和 $\int\partial_{\mu}(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\Delta x^{\mu})\mathrm{d}^{4}x$，已省略. 由生成泛函的不变性，有

$$
\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta\epsilon^{\sigma}(x)}\right|_{\epsilon^{\sigma}(x)=0}=0
$$

对式(3-14-8)中有关项分部积分后，对 $\epsilon^{\sigma}(x)$求泛函微商，得

$$
\begin{aligned}
&\int\mathscr{D}\varphi\Big\{J_{\sigma}^{0}+\int\mathrm{d}^{4}x\widetilde{A}_{\sigma}(y)\Big[E(x,y)\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi(x)}+J\Big]+\\
&\widetilde{S}_{\sigma}\Big[\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi(y)}+J\Big]-\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\Big[\varphi_{,\mu}(y)\Big(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi(y)}+J\Big)\Big]+\\
&\int\mathrm{d}^{4}y\widetilde{A}_{\sigma}(y)\partial_{\mu}^{x}\Big[E(x,y)\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}(x)}\Big]\Big\}\cdot\\
&\exp(\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}xJ\varphi)=0
\end{aligned} \tag{3-14-9}
$$

其中 $\widetilde{A}_{\sigma},\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}$ 分别为 $A_{\sigma},R_{\sigma}^{\mu}$ 的伴随算符，满足

$$
\int_{\Omega}g\widetilde{A}_{\sigma}f\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}f\widetilde{A}_{\sigma}g\,\mathrm{d}\Omega+[\cdot]_{\partial\Omega}
$$

且

$$
J_{\sigma}^{0}=-\mathrm{i}\left.\frac{\delta J_{0}}{\delta\,\epsilon^{\sigma}(x)}\right|_{\epsilon^{\sigma}(x)=0}
$$

与式(3-14-9)相应的 Green 函数适合

$$
\begin{aligned}
&\langle 0\mid T^{*}\Big[J_{\sigma}^{0}+\int\mathrm{d}^{4}y\Big\{\widetilde{A}_{\sigma}\Big[E\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}+\partial_{\mu}\Big(E\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}\Big)\Big]\Big\}+\\
&\widetilde{S}_{\sigma}\Big(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}\Big)-\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\Big(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}\Big)\Big]\mid 0\rangle=0
\end{aligned} \tag{3-14-10}
$$

式中：T^{*} 是一种特定的编时乘积. 如果变换式(3-14-4)的 Jacobi 行列式不依赖于 $\epsilon^{\sigma}(x)$，由式(3-14-8)得

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int\mathrm{d}^{4}y\Big\{\widetilde{A}_{\sigma}\Big[\Big(E\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}+J\Big)+\partial_{\mu}\Big(E\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}\Big)\Big]\Big\}+\widetilde{S}_{\sigma}\Big(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}+J\Big)-\\
&\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\Big[\varphi_{,\mu}\Big(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}+J\Big)\Big]\Big)\Big|_{\varphi\to\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J}}Z[J]=0
\end{aligned} \tag{3-14-11}
$$

式(3-14-11)为位形空间中一般非定域变换下的 Ward 恒等式. 将式(3-14-

11)式关于外源 J 求多次泛函微商，并让外源 $J=0$，即可进一步得到 Green 函数之间的关系式. 前面已讨论了非定域正则 Ward 恒等式，并用于杨-Mills 理论，得到了正规顶角间的一些关系式. 在非 Abel CS 理论中的非定域变换下，仅要求 $\int d^3x(\mathscr{L}+\mathscr{L}_{gh})$ 不变，也可导出正规顶角间的一些关系式，这些讨论是在相空间进行的. 以下将从 FP 方法所给出的位形空间中规范理论的 Green 函数的生成泛函出发，从位形空间非定域变换导出相应的 Ward 恒等式(3-14-11)给出在非 Abel CS 理论中的应用.

3-14-2 非 Abel CS 项与旋量场耦合

大量的工作研究了(2+1)维 Abel CS 规范理论中出现的分数自旋和分数统计性质，这对解释量子分数 Hall 效应乃至高温超导现象有重要意义，同时还研究了非 Abel CS 项与物质场耦合，是否影响系统的自旋统计性质.

这里讨论(2+1)维带 Maxwell 项的非 Abel CS 项与物质场耦合，给出非定域 Ward 恒等式的应用，系统的 Lagrange 量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a+\frac{1}{3}f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c\right)+\\&\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi\end{aligned}\tag{3-14-12}$$

式中：D_μ 为协变微商，$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$，用 FP 方法量子化，并选协变的 Lorentz 规范，可得

$$I_{eff}=\int d^3x\{\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{fix}+\mathscr{L}_{gh}\}\tag{3-14-13}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L}_{fix}&=-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2\\\mathscr{L}_{gh}&=-\partial^\mu\bar{C}_a D_{b\mu}^a C_b\\D_{b\mu}^a&=\delta_b^a\partial_\mu+f_{bc}^a A_\mu^c\end{aligned}\right\}\tag{3-14-14}$$

考虑选取保持 $\mathscr{L}+\mathscr{L}_{gh}$ 部分使其在量子理论中具有不变性的变换[25]

$$\left.\begin{aligned}\delta A_\mu^a(x)&=D_{\sigma\mu}^a\varepsilon^\sigma(x)\\\delta C_\alpha&=\mathrm{i}(T^\sigma)_{\alpha\beta}\varepsilon^\sigma(x)C^\beta(x)\\\delta\bar{C}_\alpha(x)&=-\mathrm{i}\bar{C}^\beta(x)(T^\sigma)_{\alpha\beta}\varepsilon^\sigma(x)+\\&\quad\mathrm{i}\int d^3y\Delta_0(x,y)\partial_\mu[\bar{C}^\beta(y)(T^\sigma)_{\beta\alpha}\partial_\mu\varepsilon^\sigma(y)]\\\delta\psi(x)&=-\mathrm{i}\varepsilon^\sigma(x)T^\sigma\psi(x)\\\delta\bar{\psi}(x)&=-\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\varepsilon^\sigma(x)T^\sigma\end{aligned}\right\}\tag{3-14-15}$$

式中：T^σ 为规范群的生成元. 设 $\mathscr{D}_{\rm fix}$在此变换下的变化为

$$\delta \mathscr{L}_{\rm fix} = Q_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \tag{3-14-16}$$

式中

$$Q_\sigma = Q_\sigma(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, C, \overline{C}) \tag{3-14-17}$$

按 FP 方法写出生成泛函

$$Z[J] = \int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\overline{\psi} \mathscr{D}C \mathscr{D}\overline{C} \exp\{ i \int d^3 x (\mathscr{L}_{\rm eff} + J^\mu_\alpha A^\alpha_\mu + \overline{\eta}^\alpha \psi^\alpha + \overline{\psi}^\alpha \eta^\alpha + \overline{\zeta}^\alpha C_\alpha + \overline{C}^\alpha \zeta^\alpha)\} \tag{3-14-18}$$

式(3-14-18)在式(3-14-15)变换下不变，将式(3-14-15)代入式(3-14-18)，并关于 $\varepsilon_\sigma(x)$求泛函微商，得 Ward 恒等式，即

$$\left. \begin{aligned} & J^0_\sigma + iQ_\sigma + f^\alpha_{\sigma\gamma} J^\mu_\alpha \frac{\delta}{\delta J^\mu_\gamma} - \partial_\mu J^\mu_\sigma + i\overline{\eta}^\alpha (T^\sigma)_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta \overline{\eta}^\beta} - \\ & i\eta^\beta (T^\sigma)_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta \eta^\alpha} + \overline{\zeta}^\alpha (T^\sigma)_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta \overline{\zeta}^\beta} - i\zeta^\alpha (T^\sigma)_{\beta\alpha} \frac{\delta}{\delta \zeta^\beta} - \\ & i\int d^3 x \partial_\mu \left[\partial^\mu \Delta_0 \zeta^\alpha (T^\sigma)_{\beta\alpha} \frac{\delta}{\delta \zeta^\beta} \right] \Big\} Z[J] = 0 \end{aligned} \right\} \tag{3-14-19}$$

其中 $\Delta_0(x,y)$适合$\Box \Delta_0(x,y) = i\delta^{(3)}(x-y)$. 令 $Z[J] = \exp iW[J]$，引进正规顶角生成泛函 $\Gamma[\varphi]$，有

$$\left. \begin{aligned} & \Gamma[\varphi] = W - \int d^3 x J \psi \\ & \frac{\delta W}{\delta J} = \phi, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} = -J \end{aligned} \right\} \tag{3-14-20}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} & J = (J^\mu_\alpha, \overline{\eta}^\alpha, \eta^\alpha, \overline{\zeta}^\alpha, \zeta^\alpha) \\ & \phi = (\psi, \overline{\psi}, A^\alpha_\mu, C^\alpha, \overline{C}^\alpha) \end{aligned} \right\} \tag{3-14-21}$$

于是式(3-14-19)化为

$$\begin{aligned} & J^0_\sigma + iQ_\sigma - f^\alpha_{\sigma\gamma} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\alpha_\mu} A^\gamma_\mu + \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\sigma_\mu} + \\ & \quad i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^\alpha} (T^\sigma)_{\alpha\beta} \psi^\beta + i \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}^\beta} (T^\sigma)_{\alpha\beta} \overline{\psi}^\alpha - \frac{\delta \Gamma}{\delta C^\alpha} (T^\sigma)_{\alpha\beta} C^\beta + \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{C}^\alpha} (T^\sigma)_{\alpha\beta} \overline{C}^\beta + \\ & \quad i \int d^3 x \partial_\mu \left[\partial^\mu \Delta_0 \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{C}^\alpha} (T^\sigma)_{\alpha\beta} \overline{C}^\beta \right] = 0 \end{aligned} \tag{3-14-22}$$

关于 $C^r(x_c)$与 $\overline{C}^s(x_3)$求泛函微商，让场(包括乘子场)为 0，于是得

$$\begin{aligned} & \partial^{x_1}_\mu \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \overline{C}^s(x_3) \delta C^r(x_2) \delta A^\sigma_\mu(x_1)} + \\ & \quad \int d^3 z \partial^\mu_{x1} [\partial^{x_1}_\mu \Delta_0(x,z) (T^\sigma)_{\alpha s} \delta(x_1 - x_3) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta C^r(x_2) \delta \overline{C}^\alpha(x_1)}] + \end{aligned}$$

$$
\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^s(x_3)\delta C^\beta(x_1)}(T^\sigma)_{r\beta}\delta(x_1 - x_2) -
$$
$$
\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta C^r(x_2)\delta \bar{C}^\beta(x_1)}(T^\sigma)_{s\beta}\delta(x_1 - x_3) = 0 \qquad (3\text{-}14\text{-}23)
$$

此结果与 3-6-2 中结果相同，对规范理论描述的系统为约束 Hamilton 系统，该系统的路径积分量子化应按约束理论在相空间中来实现，相空间路径积分比位形空间路径积分更基本. 作出对动量的路径积分后，方可化为位形空间的路径积分，一般作出该积分是很困难的，甚至是不可能的. 但对规范不变系统，在位形空间中用 FP 方法可方便地实现系统的路径积分量子化. 此时，在位形空间中来研究比相空间中用约束 Hamilton 系统理论研究就更为简便，同时表明 FP 方法对此模型适用.

将式(3-14-22)关于场量多次求泛函微商，然后让场量为 0，可得多种形式的 Ward 恒等式. 式(3-14-23)给出了 CS 规范场-鬼场正规顶角的 Ward 恒等式. 由于只要求理论中 $\mathscr{L}+\mathscr{L}_{gh}$ 在非定域变换下不变，这与通常的 BRS 不变性不同.

3-15 量子水平的 Noether 恒等式

在经典理论中，系统作用量在有限连续群下的不变性(整体对称性)所联系的守恒律由 Noether 第一定理给出. 作用量在无限连续群下的不变性(定域对称性)涉及 Noether 第二定理，该定域不变性导致系统作用量的泛函微商满足某些微分恒等式(称 Noether 恒等式). Noether 恒等式在场论等诸多物理领域有重要应用[1]. 经典 Noether 恒等式是在位形空间中给出的，近来的工作已将它推广到非不变系统和非定域变换[1]；导出了相空间中的正则 Noether 恒等式[1,27]，用于杨-Mills 场论；求出了有别于 BRST 守恒荷的 PBRST 守恒荷[1]. 在导出这些守恒荷时，依据的是经典 Noether 恒等式，并结合了规范不变系统量子化的有效 Lagrange 量，这是不彻底的量子理论. 前面的论述已给出了量子水平的正则 Noether 第一定理. 这里将建立量子水平的 Noether 恒等式并给出初步应用. 相空间路径积分比位形空间路径积分更普遍. 这里首先从系统 Green 函数的相空间生成泛函出发，导出系统量子水平的正则 Noether 恒等式，对奇异 Lagrange 量系统. 与经典情形不同的是，出现在量子正则 Noether 恒等式中的作用量为量子化后的有效正则作用量，而不是经典正则作用量. 其次对规范不变系统利用 FP 方法写出了系统 Green 函数的位形空间生成泛函，从该生成泛函出发，导出了位形空间中的量子 Noether 恒等

式，与经典结果的差别是用有效作用量代替了原始经典作用量. 本节还讨论了在某些情形下，由量子 Noether 恒等式可导出量子守恒荷的问题，这与由量子 Noether 第一定理导出守恒荷的程式完全不同，这里实际上给出了一种求系统量子守恒荷的新方法；最后讨论了理论结果在非 Abel CS 理论中的应用，并求出了 BRS 和 PBRS 守恒荷，这两个守恒荷完全不同[40].

3-15-1 相空间形式

设场 $\varphi^\alpha(x)$ 的 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})$ 是正规的，场 φ^α 的正规动量 $\pi_\alpha=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^\alpha}$. 在相空间中 φ^α 和 π_α 为独立变量. 系统的量子性质由 Green 函数的相空间中的生成泛函 Z 来描述，Z 可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^\alpha\mathscr{D}\pi_\alpha\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J_\alpha\varphi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha)\right\}\qquad(3\text{-}15\text{-}1)$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi_\alpha\dot{\varphi}^\alpha-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}\qquad(3\text{-}15\text{-}2)$$

$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为正则 Hamilton 量密度，J_α 和 K^α 分别为 φ^α 和 π_α 的外源. 这里对动量也引入了外源，不影响对 Green 函数的计算. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本，后者是前者的特殊情形. 为简化记号，令 $\varphi=\varphi^\alpha,\pi=\pi^\alpha,J=J_\alpha$，$K=K^\alpha$，则式(3-15-1)可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J\varphi+K\pi)\right\}\qquad(3\text{-}15\text{-}3)$$

研究相空间生成泛函在整体对称变换的性质，导出了量子水平的正则 Noether 第一定理，从而得到相应的量子守恒荷. 下面研究系统在相空间中定域变换下的量子性质，考虑无穷小定域变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\ \varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+S_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\ \pi'(x')&=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+T_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}15\text{-}4)$$

式中：R^μ_σ，S_σ 和 T_σ 为线性微分算符，且

$$R^\mu_\sigma=a^{\mu\nu(k)}_\sigma\partial_{\nu(k)},\quad S_\sigma=b^{\nu(l)}_\sigma\partial_{\nu(l)},\quad T_\sigma=c^{\nu(m)}_\sigma\partial_{\nu(m)}$$

式中：$\nu(n)=\underbrace{\nu\,\lambda\cdots\rho\,\sigma}_{n}$，$\partial_{\nu(n)}=\partial_\nu\partial_\lambda\cdots\partial_\rho\partial_\sigma$，$a^{\mu\nu(k)}$，$b^{\nu(l)}$，$c^{\nu(m)}$ 均为 x，$\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的函数；$\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们的值及其微商在 4 维时空区域的边界上为零. 在式(3-15-4)变换下，φ 和 π 变换的 Jacobi 行列式记为 $\bar{J}=1+J_1[\varphi,\pi,\varepsilon]$. 正则作用量 $I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 在式(3-15-4)变换下的变更设为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x U_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \tag{3-15-5}$$

式中：$U_\sigma = f_\sigma^{\nu(n)} \partial_{\nu(n)}$，$f^{\nu(n)}$ 为 $x,\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的函数. 在式(3-15-4)变换下，相空间生成泛函可写为

$$\begin{aligned} J[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi \Big(& 1 + J_1 + \mathrm{i}\Delta I^{\mathrm{p}} + \\ & \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \{ J\delta\varphi + K\delta\pi + \partial_\mu [(J\varphi + K\pi)\Delta x^\mu] \} \cdot \\ & \exp\Big\{ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}^{\mathrm{p}} + J\varphi + K\pi) \Big\} \Big) \end{aligned} \tag{3-15-6}$$

式中[1]

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \left\{ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\delta\pi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi\delta\varphi) + \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^\mu] \right\} \tag{3-15-7}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} = -\pi - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi}, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi} = \dot{\varphi} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi} \tag{3-15-8}$$

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - \varphi_{,\mu}\Delta x^\mu, \quad \delta\pi = \Delta\pi - \pi_{,\mu}\Delta x^\mu \tag{3-15-9}$$

H_{c} 为正则 Hamilton 量. 注意到 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件，由式(3-15-5)～式(3-15-7)，有

$$\begin{aligned} \int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\delta\pi - U_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \right] \cdot \\ \exp\Big\{ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}^{\mathrm{p}} + J\varphi + K\pi) \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{3-15-10}$$

将式(3-15-4)、式(3-15-9)代入式(3-15-10)，对与 $R_\sigma^\mu, S_\sigma, T_\sigma$ 和 U_σ 相关的项作分部积分，利用 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件，并对其结果关于 $\varepsilon^\sigma(x)$ 求泛函微商，得

$$\begin{aligned} \int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi \left[\widetilde{S}_\sigma\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}\Big) + \widetilde{T}_\sigma\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\Big) - \widetilde{R}_\sigma^\mu\Big(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} + \pi_{,\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\Big) - \widetilde{U}_\sigma(1) \right] \cdot \\ \exp\Big\{ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}^{\mathrm{p}} + J\varphi + K\pi) \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{3-15-11}$$

式中：$\widetilde{S}_\sigma, \widetilde{T}_\sigma, \widetilde{R}_\sigma^\mu$ 和 $\widetilde{U}_\sigma$ 分别为 $S_\sigma, T_\sigma, R_\sigma^\mu$ 和 U_σ 的伴随算符. 将式(3-15-11)关于 $J(x)$ 求 n 次泛函微商，得

$$\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi \left[\widetilde{S}_\sigma\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}\Big) + \widetilde{T}_\sigma\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\Big) - \widetilde{R}_\sigma^\mu\Big(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi} + \pi_{,\mu}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\Big) - \widetilde{U}_\sigma(1) \right] \cdot$$

$$\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}^p+J\varphi+K\pi)\right\}=0 \quad (3\text{-}15\text{-}12)$$

在式(3-15-12)中，让外源为零，即 $J=K=0$，有

$$\langle 0 \mid T^*\left[\widetilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}\right)+\widetilde{T}_\sigma\left(\frac{\delta I^p}{\delta\pi}\right)-\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}+\pi_{,\mu}\frac{\delta I^p}{\delta\pi}\right)-\widetilde{U}_\sigma(1)\right]\cdot$$

$$\varphi(x_1)\cdot\cdots\cdot\varphi(x_n)\mid 0\rangle=0 \quad (3\text{-}15\text{-}13)$$

其中$|0\rangle$代表场的真空态，T^* 为一种特定的编时积[5]，让 $t_1,t_2,\cdots,t_m\to+\infty$，$t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_n\to-\infty$，由式(3-15-13)，得

$$\langle \text{out},m\left|\left[\widetilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}\right)+\widetilde{T}_\sigma\left(\frac{\delta I^p}{\delta\pi}\right)-\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}+\pi_{,\mu}\frac{\delta I^p}{\delta\pi}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\widetilde{U}_\sigma(1)\right]\right|n-m,\text{in}\rangle=0 \quad (3\text{-}15\text{-}14)$$

由于 m,n 任意，从而得

$$\widetilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}\right)+\widetilde{T}_\sigma\left(\frac{\delta I^p}{\delta\pi}\right)-\widetilde{R}^\mu_\sigma\left(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}+\pi_{,\mu}\frac{\delta I^p}{\delta\pi}\right)-\widetilde{U}_\sigma(1)=0 \quad (3\text{-}15\text{-}15)$$

式 (3-15-15)为正规 Lagrange 量系统量子情形的正则 Noether 恒等式. 无论变换式(3-15-4)的 Jacobi 行列式是否为 1，此结果均与经典情形的结果形式上相同[1].

设 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})$是奇异的，此时正则变量 $\varphi^\alpha,\pi_\alpha$ 在相空间中存在固有约束，为约束正则系统. 设 $\Lambda_k(\varphi^\alpha,\pi_\alpha)\approx0(k=1,2,\cdots,K_1)$为第一类约束，$\theta_i(\varphi^\alpha,\pi_\alpha)\approx0(i=1,2,\cdots,I_1)$为第二类约束，与第一类约束相应的规范条件记为 $\Omega_k(\varphi,\pi_\alpha)\approx0(k=1,2,\cdots,K_1)$. 此约束正则系统 Green 函数的相空间生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^\alpha\mathscr{D}\pi_\alpha\mathscr{D}\lambda_m\mathscr{D}\overline{C}\mathscr{D}C\cdot$$

$$\exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}^p_{\text{eff}}+J_\alpha\varphi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha)\right\} \quad (3\text{-}15\text{-}16)$$

式中

$$\mathscr{L}^p_{\text{eff}}=\mathscr{L}^p+\mathscr{L}_m+\mathscr{L}_{gh} \quad (3\text{-}15\text{-}17)$$

$$\mathscr{L}_m=\lambda_i\theta_i+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l \quad (3\text{-}15\text{-}18)$$

$$\mathscr{L}_{gh}=\int d^4y\left[\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x),\Omega_l(y)\}C_l(y)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}C_j(y)\right] \quad (3\text{-}15\text{-}19)$$

$\lambda_m=(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_l)$，$\overline{C}(x)$和 $C(x)$为 Grassmann 变量，$\{\cdot,\cdot\}$代表场的 Poisson 括号. 为简化记号，令 $\varphi=(\varphi^a,\lambda,\overline{C},C)$，$\pi=\pi_a$，$J=J_a$，$K=K^a$，这样式(3-15-16)可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J\varphi+K\pi)\right\}\tag{3-15-20}$$

上述对正规 Lagrange 量系统的讨论，同样适用于奇异 Lagrange 量系统，只要将相应的 I^{p} 换为 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$就是了. 在经典理论中，无论是正规 Lagrange 量系统还是奇异 Lagrange 量系统，经典正则 Noether 恒等式是一样的[1]. 在量子水平下，奇异 Lagrange 量系统的正则 Noether 恒等式虽然也具有式(3-15-15)的形式，但其中的 I^{p} 应改为 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$[40].

量子定域正则 Noether 恒等式在某些情形下，可导致系统的量子守恒律. 为了讨论在杨-Mills 场和 CS 理论中的应用，考虑如下无穷小定域变换

$$\left.\begin{aligned}\Delta x^\mu&=0\\ \delta\varphi(x)&=b_\sigma\varepsilon^\sigma(x)+b_\sigma^\mu\partial_\mu\varepsilon^\sigma(x)\\ \delta\pi(x)&=c_\sigma\varepsilon^\sigma(x)+c_\sigma^\mu\partial_\mu\varepsilon^\sigma(x)\end{aligned}\right\}\tag{3-15-21}$$

式中：b_σ，b_σ^μ，c_σ 和 c_σ^μ 均为 x，φ 和 π 的函数；$\varepsilon^\sigma(x)$为无穷小任意函数. 假设在式(3-15-21)变换下，有效正则 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$变更为

$$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=U_\sigma\varepsilon^\sigma(x)=(u_\sigma+u_\sigma^\mu\partial_\mu+u_\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)\varepsilon^\sigma(x)\tag{3-15-22}$$

式中：u_σ，u_σ^μ 和 $u_\sigma^{\mu\nu}$ 为正则变量的函数，例如，某些有质量的杨-Mills 场论模型就属于这种情况，此时量子正则 Noether 恒等式成为

$$b_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}-\partial_\mu\left(b_\sigma^\mu\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}\right)+c_\sigma\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}-\partial_\mu\left(c_\sigma^\mu\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}\right)=\\ u_\sigma-\partial_\mu u_\sigma^\mu+\partial_\mu\partial_\nu u_\sigma^{\mu\nu}\tag{3-15-23}$$

由有效正则作用量的变分，有基本恒等式

$$\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}(b_\sigma+b_\sigma^\mu\partial_\mu)\varepsilon^\sigma(x)+\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}(c_\sigma+c_\sigma^\mu\partial_\mu)\varepsilon^\sigma(x)+\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi(b_\sigma+b_\sigma^\mu\partial_\mu)\varepsilon^\sigma(x)]=\\ (u_\sigma+u_\sigma^\mu\partial_\mu+u_\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)\varepsilon^\sigma(x)\tag{3-15-24}$$

用 $\varepsilon^\sigma(x)$乘式(3-15-23)后与式(3-15-24)相减，当 $u_\sigma^{\mu\nu}$ 关于 μ，ν 对称时，得

$$\partial_\mu\left[\left(b_\sigma^\mu\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}+c_\sigma^\mu\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}-u_\sigma^\mu+\partial_\nu u_\sigma^{\mu\nu}-u_\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\right)\varepsilon^\sigma(x)\right]+\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi(b_\sigma+b_\sigma^\mu\partial_\mu)\varepsilon^\sigma(x)]=0\tag{3-15-25}$$

将式(3-15-25)在 $t=\mathrm{const}$ 的类空超曲面 V 上积分，得强守恒律

$$Q = \int_V j_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \mathrm{d}^3 x = \text{const} \tag{3-15-26}$$

式中

$$j_\sigma = b_\sigma^0 \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \varphi} + c_\sigma^0 \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \pi} - u_\sigma^0 + \partial_\nu u_\sigma^{0\nu} - u_\sigma^{0\nu} \partial_\nu + \pi(b_\sigma + b_\sigma^\mu \partial_\mu) \tag{3-15-27}$$

当变换群有子群，且 $\varepsilon^\sigma(x) = \varepsilon_0^\rho \xi_\rho^\sigma(x)$，其中 ε_0^ρ 为连续群的参数，$\xi_\rho^\sigma(x)$ 为给定函数，例如 BRS 变换，以及规范不变的能量-动量、张量所涉及的变换等均属于这类情况，此时强守恒律为

$$Q_\rho = \int_V j_\sigma \xi_\rho^\sigma \mathrm{d}^3 x = \text{const} \tag{3-15-28}$$

导出式(3-15-26)和式(3-15-28)未利用系统动力学方程. 利用系统的量子运动方程，$\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \varphi} = 0$，$\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \pi} = 0$，由式(3-15-26)或式(3-15-28)可得系统的量子(弱)守恒律. 当系统的有效正则作用量在式(3-15-21)变换下不变时，式(3-15-28)恰好给出有限李群(整体变换)对称下的量子守恒律. 这里导出的量子守恒荷的程式与量子正则 Noether(第一)定理完全不同.

3-15-2 位形空间形式

规范不变系统为约束 Hamilton(正则)系统，该系统的量子化也可用 FP 方法来实现. 设系统规范不变的 Lagrange 量为 $\mathscr{L}(\varphi, \varphi_{,\mu})$，选取适当的规范条件，用 FP 方法得到系统位形空间的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\varphi \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}_{\text{eff}} + J\varphi) \right\} \tag{3-15-29}$$

式中：J 为 φ 的外源. 有效 Lagrange 量可写为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\text{fix}} + \mathscr{L}_{\text{gh}} \tag{3-15-30}$$

式中：$\mathscr{L}_{\text{fix}}$ 为规范固定项，它与规范条件有关；$\mathscr{L}_{\text{gh}}$ 为鬼粒子项. 对某些场论模型，式(3-15-29)也可由约束正则系统的相空间生成泛函，作出对正则动量的路径积分来得到(如杨-Mills 场[1]).

考虑无穷小定域变换

$$\left.\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma(x) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + S_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \end{aligned}\right\} \tag{3-15-31}$$

式中：R_σ^μ 和 S_σ 为线性微分算符，$\varepsilon^\sigma(x)$ 为无穷小任意函数，它们的值及其微商在 4 维时空区域的边界上为零. 在式(3-15-31)变换下，设有效作用量的变更为

$$\Delta I_{\text{eff}} = \Delta\int d^4x \mathscr{L}_{\text{eff}} = \int d^4x V_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \tag{3-15-32}$$

式中：V_σ 为线性微分算符. 设在式(3-15-31)变换下，场量变换的 Jacobi 行列式为$\bar{J}=1+J_1[\varphi]$. 式(3-15-29)所示生成泛函在式(3-15-31)变换下为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\varphi \left\{ 1 + J_1 + \text{i}\Delta I_{\text{eff}} + \text{i}\int d^4x[J\delta\varphi + \partial_\mu(J\varphi\Delta x^\mu)] \right\} \cdot \exp\left\{ \text{i}\int d^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}} + J\varphi) \right\} \tag{3-15-33}$$

式中[1]

$$\Delta I_{\text{eff}} = \int d^4x \left[\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}\delta\varphi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}}\delta\varphi\right) + \partial_\mu(\mathscr{L}_{\text{eff}}\Delta x^\mu) \right] \tag{3-15-34}$$

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi} = \frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,\mu}} \tag{3-15-35}$$

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - \varphi_{,\mu}\Delta x^\mu \tag{3-15-36}$$

注意到 $\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，由式(3-15-32)～式(3-15-36)，得

$$\int \mathscr{D}\varphi \left[\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}(S_\sigma - \varphi_{,\mu}R_\sigma^\mu)\varepsilon^\sigma(x) - V_\sigma\varepsilon^\sigma(x) \right] \cdot \exp\left\{ \text{i}\int d^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}} + J\varphi) \right\} = 0 \tag{3-15-37}$$

将式(3-15-37)中与微分算符 S_σ，R_σ^μ 和 V_σ 有关的项作分部积分，利用 $\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，然后对 $\varepsilon^\sigma(x)$求泛函微商，得

$$\int \mathscr{D}\varphi \left[\tilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}\right) - \tilde{R}_\sigma^\mu\left(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}\right) - \tilde{V}_\sigma \right] \cdot \exp\left\{ \text{i}\int d^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}} + J\varphi) \right\} = 0 \tag{3-15-38}$$

将式(3-15-38)关于 $J(x)$求 n 次泛函微商后，令 $J=0$，并让 t 固定，$t_1, t_2, \cdots, t_m \to +\infty$；$t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \to -\infty$. 类似于式(3-15-11)～式(3-15-15)的推导可得

$$\tilde{S}_\sigma\left(\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}\right) - \tilde{R}_\sigma^\mu\left(\varphi_{,\mu}\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}\right) - \tilde{V}_\sigma(1) = 0 \tag{3-15-39}$$

式(3-15-39)为规范不变系统在位形空间中定域变换下的量子 Noether 恒等式. 与经典结果不同的是，出现在式(3-15-39)中的是有效作用量 I_{eff}，而不是经典作用量 I[40].

考虑下列无穷小定域变换

$$\left.\begin{aligned}\Delta x^{\mu}&=0\\ \Delta\varphi(x)&=(b_{\sigma}+b_{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu})\varepsilon^{\sigma}(x)\end{aligned}\right\}\tag{3-15-40}$$

式中：$\varepsilon^{\sigma}(x)$为无穷小任意函数. 假设在式(3-15-40)变换下，有效 Lagrange 量的变更为

$$\delta\mathscr{L}_{\text{eff}}=V_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x)=(v_{\sigma}+v_{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}+v_{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu})\varepsilon^{\sigma}(x)\tag{3-15-41}$$

式中：v_{σ}，v_{σ}^{μ}，$v_{\sigma}^{\mu\nu}$ 均为 x，φ，$\varphi_{,\mu}$的函数. 与 3-15-1 小节的讨论相似，由量子 Noether 恒等式和有效作用量 I_{eff}变分的基本恒等式可得系统的强守恒律. 当 $\varepsilon^{\sigma}(x)=\varepsilon_{\rho}^{0}\zeta_{\sigma}^{\rho}$ 时，ε_{ρ}^{0} 为参数，ζ_{σ}^{ρ} 为场量的函数，此时强守恒荷为

$$Q_{\sigma}=\int\mathrm{d}^{3}x\Big[\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial\varphi_{,0}}(b_{\rho}+b_{\rho}^{\nu}\partial_{\nu})\zeta_{\sigma}^{\rho}+b_{\rho}^{0}\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}\zeta_{\sigma}^{\rho}-$$

$$v_{\rho}^{0}\zeta_{\sigma}^{\rho}+(\partial_{\nu}v_{\rho}^{0\nu}-v_{\rho}^{0\nu}\partial_{\nu})\zeta_{\sigma}^{\rho}\Big]\tag{3-15-42}$$

利用系统的量子运动方程，$\dfrac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi}=0$，由式(3-15-42)可得量子弱守恒荷. 当系统的有效作用量 I_{eff}在式(3-15-40)变换下不变时，此时的弱守恒荷恰好是系统整体对称下的量子守恒荷[40].

3-15-3 非 Abel CS 物质场

现在研究带 Maxwell 项的非 Abel CS 项与标量场耦合的定域变换下的性质，其 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu}+(\mathrm{D}^{\mu}\varphi)^{+}(\mathrm{D}^{\mu}\varphi)+$$

$$\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}A_{\rho}^{a}+\frac{1}{3}f_{bc}^{a}A_{\mu}^{a}A_{\nu}^{b}A_{\rho}^{c}\Big)\tag{3-15-43}$$

$$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}+f_{bc}^{a}A_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c}\tag{3-15-44}$$

式中：D_{μ} 为协变微商. 场 A_{ν}^{a}，φ 和 φ^{+}的正则动量记为 π_{a}^{μ}，π 和 π^{+}. 系统在相空间有约束

$$\Lambda_{1}^{a}=\pi_{a}^{0}\approx 0\tag{3-15-45}$$

$$\Lambda_{2}^{a}=\mathrm{D}_{i}\pi_{a}^{i}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_{i}A_{j}^{a}\approx 0\tag{3-15-46}$$

$\Lambda_{1}^{a}\approx 0$，$\Lambda_{2}^{a}\approx 0$ 为第一类约束. 选取 Coulomb 规范

$$\Omega_{2}^{a}=\partial^{i}A_{i}^{a}\approx 0\tag{3-15-47}$$

由 Ω_{2}^{a} 的自洽性要求，$\dot{\Omega}_{2}^{a}\approx 0$，可确定另一规范条件，即

$$\Omega_1^a = \partial^i \pi_i^a + \nabla^2 A_0^a - f^a_{bc} A_i^b \partial^i A_0^c \approx 0 \qquad (3\text{-}15\text{-}48)$$

不难求出，$\det\{\Lambda^a, \Omega^b\} = \det M_C^{ab}$，其中

$$M_C^{ab} = (\delta^{ab} \nabla^2 - f^a_{bc} A_i^c \partial^i) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad (3\text{-}15\text{-}49)$$

根据理论的规范无关性，生成泛函中的因子 $\delta(\partial^i A_i^a) \det M_C^{ab}$ 可用因子 $\delta(\partial^\mu A_\mu^a) \det M_L^{ab}$ 来代替，且

$$M_L^{ab} = (\delta^{ab} \partial^2 - f^a_{bc} A_\mu^c \partial^\mu) \delta(x - y) \qquad (3\text{-}15\text{-}50)$$

按 FS 路径积分量子化方案，相空间生成泛函可写为

$$Z[J] = \int \mathscr{D} A_\mu^a \mathscr{D} \pi_a^\mu \mathscr{D} \varphi \mathscr{D} \pi \mathscr{D} \varphi^+ \mathscr{D} \pi^+ \mathscr{D} \lambda \mathscr{D} \overline{C}^a \mathscr{D} C^a \cdot$$
$$\exp\left\{ i \int d^3 x (\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_a^\mu A_\mu^a + J^+ \varphi + \varphi^+ J + \overline{J}_a C^a + \overline{C}^a J_a) \right\} \qquad (3\text{-}15\text{-}51)$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_{\text{gh}} + \mathscr{L}_{\text{m}} \qquad (3\text{-}15\text{-}52)$$

$$\mathscr{L}_f = -\frac{1}{2\alpha_2} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \qquad (3\text{-}15\text{-}53)$$

$$\mathscr{L}_{\text{gh}} = -\partial^\mu \overline{C}^a D_{b\mu}^a C^b \quad (D_{b\mu}^a = \delta_b^a \partial_\mu - f^a_{bc} A_\mu^c) \qquad (3\text{-}15\text{-}54)$$

$$\mathscr{L}_{\text{m}} = \lambda_1^a \Lambda_1^a + \lambda_2^a \Lambda_2^a - \frac{1}{2\alpha_1} (\Omega_1^a)^2 \qquad (3\text{-}15\text{-}55)$$

而 $\mathscr{L}^{\text{p}}$ 为正则 Lagrange 量. 考虑 BRS 变换

$$\left.\begin{aligned} &\delta\varphi = -i\tau T^a C^a \varphi, \quad \delta\varphi^+ = i\tau\varphi^+ T^a C^a \\ &\delta C^a = \frac{1}{2} \tau f^a_{bc} C^b C^c, \quad \delta \overline{C}^a = -\frac{1}{\alpha_2} \tau \partial^\mu A_\mu^a \\ &\delta A_\mu^a = -\tau D_{b\mu}^a C^b \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}15\text{-}56)$$

其中 τ 为 Grassmann 参数($\varepsilon^a(x) = \tau C^a(x)$)，$T^a$ 为规范群的生成元. 在 BRS 变换下，$\mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_{\text{gh}}$ 不变，A_μ^a 的规范变换不离开第一类约束确定的超曲面[1]，$\delta\mathscr{L}_{\text{m}} \approx 0$. 因此，在约束超曲面内 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 在 BRS 变换下不变，由式(3-15-28)可得量子水平的 BRS(弱)守恒荷，即

$$Q_B = \int d^2 x (\pi_a^\mu \delta A_\mu^a + \pi \delta\varphi + \delta\varphi^+ \pi^+ + \overline{R}_a \delta C^a + \delta \overline{C}^a R_a) \qquad (3\text{-}15\text{-}57)$$

式中：$\overline{R}_a$，R_a 分别为 C^a，$\overline{C}^a$ 的正则动量. 如果仅考虑规范场 A_μ^a 和标量场 φ，φ^+ 变换，而鬼场保持不变，则

$$\left.\begin{aligned} &\delta\varphi = -i\tau T^a C^a \varphi, \quad \delta\varphi^+ = i\tau\varphi^+ T^a C^a \\ &\delta A_\mu^a = -\tau D_{b\mu}^a C^b, \quad \delta C^a = \delta\overline{C}^a = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}15\text{-}58)$$

在约束确定的超曲面内，$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$在式(3-15-58)变换下的变更为

$$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = V_a\varepsilon^a(x) = F_a\varepsilon^a(x) + f_{bc}^a\,\partial^\mu\overline{C}^aC^b\,\partial_\mu\varepsilon^c(x) \qquad (3\text{-}15\text{-}59)$$

式中：F_a 为不依赖于$\varepsilon^a(x)$的微商．按式(3-15-28)得(弱)守恒荷

$$Q = \int \mathrm{d}^2x(\pi_a^\mu \mathrm{D}_{b\mu}^a C^b + \pi\delta\varphi + \delta\varphi^+\pi^+ - f_{bc}^a\,\dot{\overline{C}}^aC^bC^c) \qquad (3\text{-}15\text{-}60)$$

此守恒荷 Q 与 BRS 守恒荷 Q_B 不同，不妨称 Q 为 PBRS 守恒荷．在杨-Mills 场论中，也得到类似的结果[1]，但导出该结果时，未完全用量子理论．上述守恒荷 Q_B 和 Q 也可 3-15-2 所述的位形空间的结果导出．

3-16 量子 Poincaré-Cartan(PC)积分不变量

PC(Poincaré-Cartan)积分不变量在经典力学和场论中占重要地位，可视为动力学的一个基本原理[1]．在经典水平下，对于正规 Lagrange 描述的系统，该不变量与系统的正则方程等价，且该不变量已经推广到非完整系统[1]；对于奇异 Lagrange 量描述的系统也开展了研究，并在相空间建立了一阶微商显含时间的奇异 Lagrange 量系统的 PC 积分不变量，且推广到了高阶微商系统，讨论了该不变量的正则方程的等价性。但这些讨论均是经典水平的[27]，经典理论的这些结果在量子水平下是否仍旧保持，值得进一步讨论[40]．

本节基于相空间 Green 函数的生成泛函，导出了场论中一阶微商的正规/奇异 Lagrange 量系统的量子 PC 积分不变量，指出了在量子水平下该不变量与量子正则方程等价，并讨论了量子 PC 积分不变量与正则变换之间的联系[41]．

3-16-1 量子 PC 积分不变量

考虑由场量 $\psi^\alpha(x)(\alpha=1, 2, \cdots, n)$，$x=(x_0, x_i)(x_0=t, i=1, 2, 3)$ 描述的正规 Lagrange 系统，场的运动由 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}(\psi^\alpha, \psi^\alpha_{,\mu})$描述，分别对 $\psi^\alpha(x)$和其正则动量 $\pi_\alpha(x)$引人外源 $J_\alpha(x)$和 $K^\alpha(x)$．该系统在相空间 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\psi^\alpha\mathscr{D}\pi_\alpha\exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}^4x(J_\alpha\psi^\alpha + K^\alpha\pi_\alpha)]\} \quad (3\text{-}16\text{-}1)$$

式中：$I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4x(\pi_\alpha\dot{\psi}^\alpha - \mathscr{H}_c)$．将空间变量 x_i 视为固定参量，此时相空间的曲线可表示为

$$\psi^\alpha = \psi^\alpha(t,\theta), \quad \pi_\alpha = \pi_\alpha(t,\theta) \qquad (3\text{-}16\text{-}2)$$

其中：θ 为参量. 考虑由于参量 θ 变化而形成的增广相空间中的变换（x_i 固定）

$$\left.\begin{aligned} t \to t' &= t + \Delta t(\theta) \\ \psi^{\alpha}(t,x_i) \to \psi^{\alpha\prime}(t',x_i) &= \psi^{\alpha}(t,x_i) + \Delta\psi^{\alpha}(t,x_i,\theta) \\ \pi_{\alpha}(t,x_i) \to \pi'_{\alpha}(t',x_i) &= \pi_{\alpha}(t,x_i) + \Delta\pi_{\alpha}(t,x_i,\theta) \end{aligned}\right\} \tag{3-16-3}$$

式中 θ 适合

$$\psi^{\alpha\prime}(t,x_i,0) = \psi^{\alpha}(t,x_i), \quad \pi'_{\alpha}(t,x_i,0) = \pi_{\alpha}(t,x_i) \tag{3-16-4}$$

在式(3-16-3)变换下，正则作用量的变分为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\alpha}}\delta\psi^{\alpha} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}}\delta\pi^{\alpha} \right) + \int \mathrm{d}^4x \left\{ \partial_{\mu}\left[(\pi_{\alpha}\dot{\psi}^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^{\mu}\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_{\alpha}\delta\psi^{\alpha}) \right\} \tag{3-16-5}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\alpha}} = -\dot{\pi}_{\alpha} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\psi^{\alpha}}, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}} = \dot{\psi}_{\alpha} - \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi_{\alpha}} \tag{3-16-6a}$$

$$H_{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}x^3 \mathscr{H}_{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}x^3 (\pi^{\alpha}\dot{\psi}_{\alpha} - \mathscr{L}^{\mathrm{p}}) \tag{3-16-6b}$$

H_{c} 为正则 Hamilton 量 .

$$\delta\psi^{\alpha} = \Delta\psi^{\alpha} - \psi^{\alpha}_{,\mu}\Delta x^{\mu} = \Delta\psi^{\alpha} - \psi^{\alpha}_{,0}\Delta x^{0} \tag{3-16-7a}$$

$$\delta\pi_{\alpha} = \Delta\pi_{\alpha} - \pi_{\alpha,\mu}\Delta x^{\mu} = \Delta\pi_{\alpha} - \pi_{\alpha,0}\Delta x^{0} \tag{3-16-7b}$$

设在式(3-16-3)变换下的 Jacobi 行列式 $\bar{J}(\theta)$ 不为 1，并记 $\bar{J}(\theta) = 1 + J_1(\theta)$ （$\bar{J}(0) = 1$），光滑函数 $J_1(\theta)$ 总可表示为一函数 $Q(\theta)$ 的全微商形式，即 $J_1(\theta) = \frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$. 根据生成泛函式在式(3-16-3)变换下的不变性，有

$$\begin{aligned} Z[J,K] = \int \mathscr{D}\psi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha} \Big\{ 1 + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}x^4 \Big[\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\alpha}} + J_{\alpha} \Big)\delta\psi^{\alpha} + \\ \Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}} + K^{\alpha} \Big)\delta\pi_{\alpha} \Big] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}x^4 \Big\{ \partial_{\mu}[(\pi_{\alpha}\dot{\psi}^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^{\mu}] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_{\alpha}\delta\psi^{\alpha}) \Big\} \Big\} \cdot \\ \exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}x^4 (J_{\alpha}\psi^{\alpha} + K^{\alpha}\pi_{\alpha})]\} \end{aligned} \tag{3-16-8}$$

即

$$\begin{aligned} \int \mathscr{D}\psi^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha} \Big\{ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}x^4 \Big[\Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\alpha}} + J_{\alpha} \Big)\delta\psi^{\alpha} + \Big(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}} + K^{\alpha} \Big)\delta\pi_{\alpha} \Big] + \\ \mathrm{i}\int \mathrm{d}x^4 \Big\{ \partial_{\mu}\Big[\Big(\pi_{\alpha}\dot{\psi}^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Big)\Delta x^{\mu} \Big] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_{\alpha}\delta\psi^{\alpha}) \Big\} \Big\} \cdot \\ \exp\Big\{ \mathrm{i}\Big[I^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}x^4 (J_{\alpha}\psi^{\alpha} + K^{\alpha}\pi_{\alpha}) \Big] \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{3-16-9}$$

将式(3-16-9)关于 J_a 求 n 次泛函微商，得[41]

$$\int \mathscr{D}\psi^a \mathscr{D}\pi_a \Big(\Big\{ \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} - \int \mathrm{d}x^4 \Big[\Big(\frac{\delta I^p}{\delta \psi^a} + J_a \Big) \delta\psi^a + \Big(\frac{\delta I^p}{\delta \pi_a} + K^a \Big) \delta\pi_a \Big] -$$

$$\int \mathrm{d}x^4 \Big\{ \partial_\mu \Big[\Big(\pi_a \psi^a - \mathscr{H}_c \Big) \Delta x^\mu \Big] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a \delta\psi^a) \Big\} \Big\} \cdot$$

$$\psi^a(x_1)\psi^a(x_2)\cdots\psi^a(x_n) +$$

$$\mathrm{i}\sum_j \psi^a(x_1)\cdots\psi^a(x_{j-1})\psi^a(x_{j+1})\cdots\psi^a(x_n) N^{a\sigma} \Big) \cdot$$

$$\exp\Big\{ \mathrm{i}\Big[I^p + \int \mathrm{d}x^4 (J_a \psi^a + K^a \pi_a) \Big] \Big\} = 0 \qquad (3\text{-}16\text{-}10)$$

式中

$$N^a_{(x,\theta)} = \delta\psi^a = \Delta\psi^a - \psi^a_{,0}\Delta x^0 \qquad (3\text{-}16\text{-}11)$$

让式(3-16-10)中的 $J=K=0$，得

$$\langle 0 |\, T^* \Big[-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} + \int \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\delta I^p}{\delta \psi^a}\delta\psi^a + \frac{\delta I^p}{\delta \pi_a}\delta\pi_a \Big) +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{D}\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_a \Delta\psi^a - \mathscr{H}_c \Delta t) \Big] \psi^a(x_1)\psi^a(x_2)\cdots\psi^a(x_n) \,|\, 0\rangle -$$

$$\mathrm{i}\langle 0 \,|\, \Big[\sum_j \psi^a(x_1)\cdots\psi^a(x_{j-1})\psi^a(x_{j+1})\cdots\psi^a(x_n) \cdot N^a_{(x,\theta)} \Big] \,|\, 0\rangle = 0$$

$$(3\text{-}16\text{-}12)$$

式中：T^* 为一种特定形式的编时乘积，有

$$\langle 0 \,|\, T^*(\partial_\mu \varphi(x)\, \partial_\nu \varphi(y)\cdots) \,|\, 0\rangle = \partial_\mu\, \partial_\nu \langle 0 \,|\, T(\varphi(x)\varphi(y)\cdots) \,|\, 0\rangle$$

其中 T 代表编时算符.

固定 t，并让 t_1，t_2，…，$t_m \to +\infty$；t_{m+1}，t_{m+2}，…，$t_n \to -\infty$. 由式(3-16-11)，θ 的光滑函数可表为全微商形式，式(3-16-12)可写为

$$\langle \mathrm{out}, m |\, T^* \Big[\int_V \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\delta I^p}{\delta \psi^a}\delta\psi^a + \frac{\delta I^p}{\delta \pi_a}\delta\pi_a \Big) \Big] | n-m, \mathrm{in}\rangle +$$

$$\langle \mathrm{out}, m \,|\, T^* \Big[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_a \Delta\psi^a - \mathscr{H}_c \Delta t) \Big] \,|\, n-m, \mathrm{in}\rangle \,|_{t_1} -$$

$$\langle \mathrm{out}, m \,|\, T^* \Big[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_a \Delta\psi^a - \mathscr{H}_c \Delta t) \Big] \,|\, n-m, \mathrm{in}\rangle \,|_{t_2} =$$

$$\frac{\mathrm{d}Ⓗ}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta} \qquad (3\text{-}16\text{-}13)$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}Ⓗ}{\mathrm{d}\theta} = i\langle \mathrm{out}, m |\, T^* \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} | n-m, \mathrm{in}\rangle \qquad (3\text{-}16\text{-}14a)$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta} = \langle \text{out}, m \mid T^* \sum_j N(j) \mid n-m, \text{in} \rangle \tag{3-16-14b}$$

下面先导出系统的量子正则方程. 由于对任意态 $|\psi^{\alpha\prime}, t'\rangle$ 和 $|\psi^{\alpha}, t\rangle$，有

$$\langle \psi^{\alpha\prime}, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^{\alpha}} \right| \psi^{\alpha}, t \rangle = \int \mathscr{D}\psi^{\alpha} \mathscr{D}\pi_{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^{\alpha}} \exp\{\mathrm{i} I^{\mathrm{p}}\} \tag{3-16-15a}$$

$$\langle \psi^{\alpha\prime}, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}} \right| \psi^{\alpha}, t \rangle = \int \mathscr{D}\psi^{\alpha} \mathscr{D}\pi_{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}} \exp\{\mathrm{i} I^{\mathrm{p}}\} \tag{3-16-15b}$$

从经典正则方程$\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^{\alpha}}=0,\ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}}=0\right)$，式(3-16-15)右端为 0，从而可得

$$\langle \psi^{\alpha\prime}, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^{\alpha}} \right| \psi^{\alpha}, t \rangle = \langle \psi^{\alpha\prime}, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}} \right| \psi^{\alpha}, t \rangle = 0 \tag{3-16-16}$$

由于 $|\psi^{\alpha\prime}, t'\rangle$，$|\psi^{\alpha}, t\rangle$的任意性，系统的量子正则方程应为

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^{\alpha}} = 0, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}} = 0 \tag{3-16-17}$$

在 t，ψ^{α}，π_{α} 张成的增广相空间中任取一条闭曲线 C_1，该曲线以 θ 为参数来描述，$\theta=0$ 和 $\theta=l$ 代表闭曲线 C_1 上同一点，过 C_1 上的每一点量子动力学“轨线”构成“轨线管”. 在此“轨线管”上取另一条闭曲线 C_2 使它包围此“轨线管”并与“轨线管”的母线仅相交一次. 将式(3-16-14)对 θ 沿 C_1 和 C_2，由 $\theta=0$ 到 $\theta=l$ 积分，并利用量子正则方程式(3-16-17)，得

$$\oint_{C_1} \langle \text{out}, m \mid T^* \left[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_{\alpha} \Delta \psi^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}} \Delta t)\right] \mid n-m, \text{in} \rangle \big|_{t_1} -$$

$$\oint_{C_2} \langle \text{out}, m \mid T^* \left[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_{\alpha} \Delta \psi^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}} \Delta t)\right] \mid n-m, \text{in} \rangle \big|_{t} =$$

$$\oint_{C_k} \left\{\frac{\mathrm{d}\textcircled{H}}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}\right\} \tag{3-16-18}$$

因 $\theta=0$ 和 $\theta=l$ 代表闭曲线上同一点，故对$\frac{\mathrm{d}\textcircled{H}}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}$沿闭曲线积分后，其值必为 0. 又由于 m 和 n 任意，故有

$$\oint_{C_1} T^* \left[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_{\alpha} \Delta \psi^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}} \Delta t)\right] -$$

$$\oint_{C_2} T^* \left[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_{\alpha} \Delta \psi^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}} \Delta t)\right] = 0 \tag{3-16-19}$$

由式(3-16-19)，可得

$$W = T^* \oint_C \int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_{\alpha} \Delta \psi^{\alpha} - \mathscr{H}_{\mathrm{c}} \Delta t) = \text{inv} \tag{3-16-20}$$

这就得到对增广相空间中任一封闭曲线 C，C 沿系统的"轨线管"移动和变形时，沿 C 的积分是一不变量 W，并称式(3-16-20)为场论中正规Lagrange量系统的广义量子 PC 积分不变量.

对场论中的奇异 Lagrange 系统，设 $\Lambda_k(\psi^\alpha,\ \pi_\alpha)\approx 0(k=1,\ 2,\ \cdots,\ K_1)$ 为第一类约束，$\theta_i(\psi^\alpha,\ \pi_\alpha)\approx 0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ I_1)$ 为第二类约束. 对每一个第一类约束选取规范条件 $\Omega_l(\psi^\alpha,\ \pi_\alpha)\approx 0(l=1,\ 2,\ \cdots,\ K_1)$. 按照 FS 量子化方法，奇异 Lagrange 量系统在相空间 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\psi^\alpha \mathscr{D}\pi_\alpha \prod_{i,k,l}\delta(\theta_i)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\cdot$$
$$\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\cdot$$
$$\exp\{\mathrm{i}[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J_\alpha\psi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha)]\} \tag{3-16-21}$$

利用 δ-函数和 Grassmann 变量 $C_\alpha(x)$ 和 $\bar{C}_\alpha(x)$ 的积分性质，式(3-16-21)可写成

$$Z[J^\alpha,K_\alpha,\eta^m,\bar{j},j,\bar{k},k]=\int \mathscr{D}\varphi_\alpha \mathscr{D}\pi^\alpha \mathscr{D}\lambda_m \mathscr{D}\bar{C}_\alpha \mathscr{D}\pi^\alpha \mathscr{D}C_\alpha \mathscr{D}\bar{\pi}^\alpha\cdot$$
$$\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J^\alpha\varphi_\alpha+K_\alpha\pi^\alpha+\eta^m\lambda_m+$$
$$\bar{j}^\alpha C_\alpha+\bar{C}_\alpha j^\alpha+\bar{k}_\alpha\pi^\alpha+\bar{\pi}^\alpha k_\alpha)\} \tag{3-16-22}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{3-16-23}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi_\alpha\dot{\psi}^\alpha-\mathscr{H}_{\mathrm{c}} \tag{3-16-24}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{m}}=\lambda_i\theta_i+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l \tag{3-16-25}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\int \mathrm{d}^3y\Big[\bar{C}_k(x)\{\Lambda_k(x),\Omega_l(y)\}C_l(y)+$$
$$\frac{1}{2}\bar{C}_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}C_j(y)\Big] \tag{3-16-26}$$

$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$为正则 Hamilton 量密度，$\lambda_m=(\lambda_k,\ \lambda_l,\ \lambda_i)$. λ_k，λ_i 和 λ_l 分别为与约束 Λ_k，θ_i，和 Ω_l 相联系的乘子场，$\bar{\pi}^\alpha(x)$和 $\pi^\alpha(x)$分别为 $C_\alpha(x)$和 $\bar{C}_\alpha(x)$的共轭动量，对 λ_m，C_α，π^α，$\bar{C}_\alpha$ 和$\bar{\pi}^\alpha$ 分别引入了外源 η^m，$\bar{j}^\alpha$，$\bar{k}_\alpha$，j^α 和k_α. 可见，对于奇异 Lagrange 量系统，其量子正则方程由 $\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}=\pi_\alpha\dot{\psi}^\alpha-\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$决定. 类似地可得到在式(3-16-3)变换下，当变换的 Jacobi 行列式不为 1 时，奇异 Lagrange量系统的量子 PC 积分不变量

$$W'=T^*\oint\!\!\int_{CV}\mathrm{d}^3x(\pi_\alpha\Delta\psi^\alpha-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\Delta t)=\mathrm{inv} \tag{3-16-27}$$

闭曲线 C 应适合所有约束条件. 可以看出，当 I^{P} 代替有效作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}$ 时，就可得到场论中奇异 Lagrange 系统的量子 PC 积分不变量[41].

可见，对于场论中的奇异 Lagrange 量系统的量子 PC 积分不变量应由有效 Hamilton 量 $\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}$(而不是正则 Hamilton 量 $\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$)决定，$\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}$ 不仅包含了所有的约束条件而且还包含了规范条件. 这与经典理论是完全不同的. 而在经典水平下正规 Lagrange 量系统和奇异 Lagrange 量的 PC 积分不变量的形式是完全相同的. 不同点仅在于，正规 Lagrange 量系统正则变量的变分是任意的，奇异 Lagrange 量系统正则变量的变分要受到约束条件的限制(约束条件在正则变量的实质变分下不变)[1]. 出现在 PC 积分不变量中的量都是正则 Hamilton 量 $\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$，这也与量子情况不同. 当 $\Delta t=0$ 时，在量子水平，正规 Lagrange 量系统和奇异 Lagrange 量系统的 PC 积分不变量形式相同.

在量子 Noether 定理中，除要求 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}$ 在整体变换下不变外，还必须保持路径积分测度在相应的变换下不变($\bar{J}=1$)，才能有量子守恒律. 而量子 PC 积分不变量却不出现这种情况，即使场量变换的 Jacobi 行列式不为 1，同样可导出 PC 积分不变量. 这是量子 PC 积分不变量与量子正则 Noether 定理不同的地方，原因在于量子 PC 积分不变量与量子正则方程等价.

3-16-2 量子 PC 积分不变量和量子正则方程

在经典理论中，已经证明了 PC 积分不变量和经典运动方程等价[1]. 下面证明这种等价性关系在量子水平下仍然成立. 这里先讨论离散系统. 把整个空间区域 V 分成许多小格子，第 i 个格子体积元记为 ΔV_i，场量 $\psi^{\alpha}(x)$ 在 ΔV_i 中的平均值为 ψ_i^{α}，对应 ψ_i^{α} 的正则共轭动量记为 $p_{\alpha}^{i}(t)$，$p_{\alpha}^{i}(t)=\pi_{\alpha}^{i}\Delta V_i$ (对 i 不求和)，这样离散后，式(3-16-20)可表示为

$$W=T^{*}\oint_{C}(p_{\alpha}^{i}\Delta\psi_i^{\alpha}-H_{\mathrm{c}}\Delta t)=\mathrm{inv} \tag{3-16-28}$$

在 $\Delta V_i\to 0$ 时，$\psi_i^{\alpha}(t)\to\psi^{\alpha}(t,\ \boldsymbol{x})$，$\pi_{\alpha}^{i}(t)\to\pi_{\alpha}(t,\ \boldsymbol{x})$时，式(3-16-28)就过渡到式(3-16-20). 这样就不难将离散系统的结果推广到场论中来.

由上面讨论，从相空间生成泛函导出了量子 PC 积分不变量. 现在反过来研究其逆命题，即从正规/奇异 Lagrange 量系统的量子 PC 积分不变量出发导出该系统的量子正则方程. 设在相空间中量子系统的运动适合方程[仿式(3-16-15)～式(3-16-17)的分析可从算符形式过渡到经典的数]

$$\dot{\psi}_i^{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\psi_i^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=Q_i^{\alpha}(\psi_i^{\alpha},p_{\alpha}^{i}),\quad \dot{p}_{\alpha}^{i}=\frac{\mathrm{d}p_{\alpha}^{i}}{\mathrm{d}t}=P_{\alpha}^{i}(\psi_i^{\alpha},p_{\alpha}^{i}) \tag{3-16-29}$$

由式(3-16-28)，可得[41]

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W=\oint_C\left(\frac{\mathrm{d}p_\alpha^i}{\mathrm{d}t}\Delta\psi_i^\alpha+p_\alpha^i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\psi_i^\alpha-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\Delta t-H_c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t\right)=$$

$$\oint_C\left[\frac{\mathrm{d}p_\alpha^i}{\mathrm{d}t}(\delta\psi_\alpha^i+\dot{\psi}_i^\alpha\Delta x^0)+p_\alpha^i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi_\alpha^i+\dot{\psi}_i^\alpha\Delta x^0)-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\Delta t\right]\quad(3\text{-}16\text{-}30)$$

对式(3-16-30)有关项作分部积分，得

$$0=\oint_C\left[\frac{\mathrm{d}p_\alpha^i}{\mathrm{d}t}\delta\psi_i^\alpha+p_\alpha^i\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_i^\alpha-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\Delta t\right]=$$

$$\oint_C\left[\frac{\mathrm{d}p_\alpha^i}{\mathrm{d}t}\delta\psi_i^\alpha-\frac{\mathrm{d}\psi_i^\alpha}{\mathrm{d}t}\delta p_\alpha^i-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\Delta t\right]=0\quad(3\text{-}16\text{-}31)$$

根据方程式(3-16-29)，得

$$\oint_C\left[P_\alpha^i\delta\psi_i^\alpha-Q_i^\alpha\delta p_\alpha^i-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\Delta t\right]=0\quad(3\text{-}16\text{-}32)$$

由于积分轮廓是任意的，那么被积量乃是某个量$=H_c(t,\ \psi_i^\alpha,\ p_\alpha^i)$的变化

$$P_\alpha^i\delta\psi_i^\alpha-Q_i^\alpha\delta p_\alpha^i-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\Delta t=-\delta H_c(t,\psi_i^\alpha,p_\alpha^i)\quad(3\text{-}16\text{-}33)$$

从而

$$P_\alpha^i=-\frac{\partial H_c}{\partial\psi_i^\alpha},\quad Q_i^\alpha=\frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha^i}\quad(3\text{-}16\text{-}34)$$

类似的，可证明奇异 Lagrange 量系统的量子正则方程与其量子 PC 积分不变量等价．但这里 ψ_i^α 和 p_α^i 应被(ψ_i^α，C_α^i，$\bar{C}_\alpha^i$，η_i^m)和(p_α^i，p_i^α，$\bar{p}_i^\alpha$)代替，而 H_{eff}应代替 H_c.

当 $\Delta V_i\to0$，式(3-16-34)就过渡到式(3-16-17)，这样离散系统的量子 PC 积分不变量和量子正则方程的等价性就被过渡到场论中．这就证明了场论中正规/奇异系统的量子正则方程和广义量子 PC 积分不变量之间的等价性[41].

3-16-3 量子 PC 积分不变量和正则变换

下面讨论量子水平下场论中的正则变换．设系统的运动方程为式(3-16-17)，正则变换可由以下变量 ψ^α，π_α 的变换来确定，即

$$\psi^{\alpha*}=Q'^\alpha(\psi^\alpha,\pi_\alpha),\quad\psi_\alpha^*=P'_\alpha(\psi^\alpha,\pi_\alpha)\quad(3\text{-}16\text{-}35)$$

它使系统的正则方程式(3-16-17)的形式不变，如果在变换式(3-16-35)下，存在两个量 $H_c^*=\int\mathrm{d}^3x\mathscr{H}_c^*$（对奇异 Lagrange 量系统，$H_{\mathrm{eff}}$应代替 H_c）和 G 使得

$$\int_V d^3x(\pi_a\Delta\psi^a - \mathscr{H}_c\Delta t) = \int_V d^3x(\pi_a^*\Delta\psi^{a*} - \mathscr{H}_c^*\Delta t) + \Delta G \tag{3-16-36}$$

那么变换式(3-16-35)是正则的. 事实上，取增广相空间中的任意封闭曲线，由式(3-16-36)有

$$\oint_C\left[\int_V d^3x(\pi_a\Delta\psi^a - \mathscr{H}_c\Delta t) - \int_V d^3x(\pi_a^*\Delta\psi^{a*} - \mathscr{H}_c^*\Delta t)\right] = 0 \tag{3-16-37}$$

设 C^* 为 C 经过变换式(3-16-35)而得到的封闭曲线，由式(3-16-37)有

$$\oint_C\int_V d^3x(\pi_a\Delta\psi^a - \mathscr{H}_c\Delta t) = \oint_{C^*}\left[\int_V d^3x(\pi_a^*\Delta\psi^{a*} - \mathscr{H}_c^*\Delta t)\right] \tag{3-16-38}$$

由于 ψ^a 和 π_a 适合正则方程式(3-16-17)，式(3-16-38)左端在封闭曲线 C 沿式(3-16-17)的解所确定的动力学“轨线管”上移动(和变形)时不变，左端恰为 PC 积分不变量. 相应的，式(3-16-38)的右端也在 C^* 沿变换式(3-16-35)所得的“轨线管”上移动时不变，也就是说，式(3-16-38)的右端对变换后的新变量而言仍为 PC 积分不变量. 变换后的“轨线”必适合系统的量子运动方程，即变换式(3-16-35)为正则变换.

参 考 文 献

[1] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1993.

[2] Li Ziping. Symmetry in a constrained Hamiltonian system with a singular higer-order Lagrangian. J Phys，1991，A24：4261-4274.

[3] Castellan L. Symmetries in constrained Hamiltonian systems. Ann Phys(N Y)，1982，143：357-371.

[4] Galvão C A P，Boechat J B T. Gauge transformations in Dirac theory of constrained system. J Math Phys，1990，31：448-451.

[5] Young B L. Introduction to quantum field theories. Beijing：Science Press，1987.

[6] 李子平. 奇异拉氏量系统的正则对称性和 Ward 恒等式. 高能物理与核物理，1994，18(8)：694-704.

[7] Li Ziping. Global canonical symmetry in a quantum system. Sci in China：Series A，1996，39(7)：739-747.

[8] Li Ziping. Canonical global symmetry in the functional integral formalism of the sys-

tem and conservation laws. Z Phys，1997，C76：181-189.

[9] 李瑞洁，李子平．含 Chern-Simons 项的旋量电动力学的量子正则对称性．高能物理与核物理，2002，26(4)：325-330.

[10] Li Ziping. Canonical symmetry in a system with singular Lagrangian and Ward identities. High Ener Phys & Nucl Phys (USA)，1994，18(3)：265-273.

[11] 李子平．广义 QCD 中正则形式的 Ward 恒等式．高能物理与核物理，1995，19(5)：405-412.

[12] 李子平．非定域变换的广义 Ward 恒等式．高能物理与核物理，2002，26(2)：122-128.

[13] Li Ziping. Canonical symmetry of a constrained Hamiltonian system and canonical Ward identity. Int J Theor Phys，1995，34(4)：523-543.

[14] 隆正文，李子平．正则 Ward 恒等式和 Abel 规范理论中动力学质量的产生．高能物理与核物理，2004，28(2)：134-139.

[15] Li Ziping. Phase space Ward identities and their applications. Acta Phys Sinica (Oversea Edition)，1994，3(7)：481-492.

[16] Sakita B. Quantam theory of many variables system and fields. Singapore：World Scientific，1985.

[17] 李子平．相空间路径积分的 Feynman 规则和广义 Ward 恒等式．高能物理与核物理，1996，20(8)：698-702.

[18] Henneaux M，Teitlboim C. Quantization of gange system. Princeton：Princeton University Press，1992.

[19] He Bin，Li Ziping. A note on the quantization of constrained generalized dynamics. Commun Theor Phys，1995，23(3)：371-374.

[20] 李子平，唐太明，黄永畅．非定域正则 Ward 恒等式．数学物理学报，1999，19(1)：23-29.

[21] Lerda A. Anyons. Berlin：Springer-Verlag，1992.

[22] 张莹，李子平．非 Abel Chern-Simons 理论中量子水平的分数自旋性质．物理学报，2005，54(6)：2611-2613.

[23] Banerjee R，Chakraborty B. Hamiltonian formulation of the theory with a non-Abelian-Chern-Simons term coupled to Fermions. Ann Phys (N Y)，1996，247：188-209.

[24] Deser S，Jackiw R，Templeton S. Topologically massive gauge theories. Ann Phys (N Y)，1982，140：372-411.

[25] Li Ziping，Jiang Jinhuan. Symmetries in constrained canonical systems. Beijing：Science Press，2002.

[26] Li Ziping，Yang Chi. Quantal canonical symmetry for a constrained Hamiltonian system. J Phys，1995，A28(20)：5931-5941.

[27] 李子平. 约束哈密顿系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1999.

[28] 李子平. 奇异拉氏量系统的整体量子正则对称性质. 物理学报，1996，45(10)：1601-1608.

[29] Li Ziping. Global canonical symmetry in the phase space path integral for a system with a singular Lagrangian. Euro Phys Lett，1996，34(5)：325-329.

[30] Gitman D M，Tyutin I V. Quantization of fields with constraints. Berlin：Springer-Verlag，1990.

[31] Banerjee R，Chakraborty B. Fractional spin and Galilean symmetry in a Chern-Simons matter system. Phys Rev，1994，D49(10)：5431-5437.

[32] Kim J K，Kim W T，Shin H. Gauge-invariant anyon operators and spin-statistic relation in Chern-Simons matter field theory. J Phys，1994，A27：6067-6076.

[33] Jiang Jinhuan，Liu Yun，Li Ziping. Quantum symmetries in the Maxwell-Chern-Simons theory coupled to scalar fields. Int J Theor Phys，2004，43(2)：89-97.

[34] Wang Yonglong，Li Ziping. The quantal symmetries in the non-linear sigma model with Maxwell-Chern-Simons term. Int J Theor Phys，2004，43(5)：1335-1342.

[35] Li Ziping. Quantum field theory for a system of interacting photons，electrons，and phonons. Int J Theor Phys，1996，35(7)：1353-1368.

[36] Zhang Ying，Li Ziping. Fractional spin of the system with Chern-Simons term coupled to polaron. Int J Theor Phys，2004，43(5)：1231-1240.

[37] Li Ziping. Quantal conserved charge in non-Abelian Chern-Simons theories. Chinese Sci Bull，1999，44：207-209.

[38] Jiang Jinhuan，Li Ziping. Transformation properties of dynamical system at the quantum level. Int J Theor Phys，2007(6)：1738-1746.

[39] 刘赟，李瑞洁，李子平. 位形空间非定域 Ward 恒等式. 数学物理学报，2004，24A：58-62.

[40] 李子平. 量子水平的 Noether 恒等式. 高能物理与核物理，2002，26：230-238.

[41] Zhang Ying，Li Ziping. The quantal Poincaré-Cartan integral invariant for field theory. Int J Theor Phys，2004，43(12)：1412-1417.

第 4 章

高阶微商约束系统的量子对称性质

对系统的 Lagrange 量中场量含高阶微商（高阶微商系统）情形的研究，一直受到人们的关注. 基于约束系统的 Dirac 理论和 Ostrogradsky 变换，这里首先给出有限自由度高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式，并推广到场论情形，利用路径积分量子化，研究高阶微商系统的量子对称性质. 基于高阶微商奇异 Lagrange 量系统相空间 Green 函数的生成泛函的变换性质，本章研究了该系统一系列量子正则对称性，建立了相空间中定域/非定域变换以及整体变换下的广义正则 Ward 恒等式，导出了整体对称变换下的量子守恒律，导出高阶微商奇异系统的量子正则 Noether 恒等式以及量子 PC 积分不变量等，并分别给出了它们在高阶微商杨-Mills 场和非 Abel CS 理论等方面的应用. 对规范不变的高阶微商系统，在位形空间中讨论了该系统的量子对称性质.

4-1　高阶微商系统

描述动力学系统的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商（简称高阶微商系统）的情形，Ostrogradsky 最早开始了对此类系统的研究，Bopp 和 Podolsky 研究了二阶微商情形的广义电动力学. Borneas，Kostler 和 Smith 等人给出了高阶微商系统的正则形式. Rodrigues 讨论了该系统的正则变换，Thielheim，Souza 和 Rodrigues 以及 Mušicki 将其推广到经典场论[1]. 文献［2］用现代数学观点论述了高阶微商的有限自由度系统（广义力学）和场论.

对高阶微商奇异 Lagrange 量系统的研究，是从讨论所谓等价 Lagrange 量开始的. Kimura 分析了奇异 Lagrange 量的广义力学 Hamilton 形式中出现的约束. Dirac 约束理论对二阶微商系统的推广开展了多方面研究. Saito 等人讨论了任意高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式. 高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式在 Bopp-Podolsky 电磁学和相对论弦模型中的应用也已开始讨论. 高阶微商理论与粒子的相对论性动力学、引力理论、广义 KDV 方程、超对称、弦模型等问题有关[1]. 高阶微商理论可改善相应的 Feynmann 图的收敛性，但幺正性问题有待进一步研究.

本节在位形空间中讨论 Lagrange 量含高阶微商的有限自由度系统（广义力学）的运动方程和对称性质. 有限自由度系统的高阶微商理论是研究高阶微商场论的先导. 现讨论自由度为 n 的广义力学系统. 该系统用 Lagrange 量 $L(t_i;q^i_{(0)}(t),q^i_{(1)}(t),\cdots,q^i_{(N_i)}(t))$ 来描述，其中

$$q^i_{(r)}(t)=\mathrm{D}^r q^i(t)=\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r}q^i(t)$$

这里假设 Lagrange 量可显含时间并且不同 $q^i(t)$ 关于时间的最高阶微商 N_i 是不同的. 系统的作用量

$$I[q]=\int_{t_1}^{t_2}L(t;q^i_{(0)}(t),q^i_{(1)}(t),q^i_{(2)}(t),\cdots,q^i_{(N_i)}(t))\mathrm{d}t \tag{4-1-1}$$

系统真实运动是 q^i 的变分使作用量取极值（固定边界条件），即

$$\delta I=0 \tag{4-1-2a}$$

$$\delta t=0,\quad \delta q^i_{(s)}(t_1)=\delta q^i_{(s)}(t_2)=0$$

$$(i=1,2,\cdots,n;s=0,1,\cdots,N_i-1) \tag{4-1-2b}$$

下面导出系统的运动方程[1]. 设由真实路径过渡到相邻路径时，$q^i_{(s)}$ 的任意微小增量为 $\delta q^i_{(s)}$，等时变分适合

$$\delta q^i_{(s)}=\mathrm{D}^s(\delta q^i) \tag{4-1-3}$$

作用量的变分

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{N_i}\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\,\delta(\mathrm{D}^k q^i)\mathrm{d}t \tag{4-1-4}$$

利用恒等关系

$$v\mathrm{D}^k u=\mathrm{D}[Q_k(u,v)]+u\overline{\mathrm{D}}^k v \tag{4-1-5}$$

式中：u，v 为任意函数，而

$$Q_{k+1}(u,v)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-1}\mathrm{D}^l u\mathrm{D}^{k-1}v \tag{4-1-6}$$

$$\overline{\mathrm{D}}^k=(-1)^k\mathrm{D}^k \tag{4-1-7}$$

可得

$$\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\delta(\mathrm{D}^k q^i)=\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\mathrm{D}^k(\delta q^i)=$$

$$\delta q^i(-\mathrm{D})^k\left[\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\right]+\mathrm{D}\left[Q_k\left(\delta q^i,\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\right)\right] \tag{4-1-8}$$

引入记号

$$Q(q^i,L)=\sum_{k=1}^{N_i}Q_k\left(\delta q^i,\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\right) \tag{4-1-9}$$

由式（4-1-8）可得（重复指标代表求和，$i=1$，2，$\cdots$，n；$s=0$，1，$\cdots$，N_i）

$$\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\delta(\mathrm{D}^k q^i) = \left\{\frac{\delta I}{\delta q^i}\delta q^i + \mathrm{D}[Q(q^i, L)]\right\} \tag{4-1-10}$$

式中

$$\frac{\delta I}{\delta q^i} = (-\mathrm{D})^k \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)} \tag{4-1-11}$$

式（4-1-9）又可写为

$$Q(q^i, L) = \sum_{k=1}^{N_i} Q_k\left(\delta q^i, \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{N_i}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l-1}\mathrm{D}^l(\delta q^i)\mathrm{D}^{k-l-1}\left[\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}\right] \tag{4-1-12}$$

令 $k-l-1=m$，$l+1=j$，改变求和指标，得[1]

$$Q(q^i, L) = \sum_{m=0}^{N_i}\sum_{m=0}^{N_i-j}(-\mathrm{D})^m\left[\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^{j+m} q^i)}\right]\mathrm{D}^{j-1}(\delta q^i) \tag{4-1-13}$$

引入广义正则动量

$$p_i^{(s-1)} \equiv p_{i/s} = \sum_{k=0}^{N_i-s}(-\mathrm{D})^k \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^{k+s} q^i)} \tag{4-1-14a}$$

即按 Ostrogradsky 变换引入广义正则动量，由式（4-1-14a）有下列递推关系，即

$$p_i^{(N_i-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(N_i)}} \tag{4-1-14b}$$

$$p_i^{(s-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}} - \dot{p}_i^{(s)} \quad (s = 1, 2, \cdots, N_i - 1) \tag{4-1-14c}$$

于是有

$$Q(q^i, L) = \sum_{j=1}^{N_i} p_i^{(j-1)}\mathrm{D}^{j-1}(\delta q^i) \tag{4-1-15}$$

将式（4-1-10）、式（4-1-15）代入式（4-1-4）得

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta I}{\delta q^i}\delta q^i\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i} p_i^{(j-1)}\delta(\mathrm{D}^{j-1}q^i)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{4-1-16}$$

由于边界条件，式（4-1-16）右边最后一项为 0，真实运动使作用量取极值，有

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta I}{\delta q^i}\delta q^i\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{4-1-17}$$

式中 δq^i 是彼此独立的. 从而，由式（4-1-17）得到的高阶微商系统的 EL 方程为

$$\frac{\delta I}{\delta q^i} = \sum_{k=0}^{N_i}(-\mathrm{D})^k \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)} = 0 \tag{4-1-18}$$

从 Lagrange 量含高阶微商系统的对称性质出发，可导出该系统的运动守恒量[3]. 设系统的作用量式（4-1-1），在下列无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} & t \to t' = t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t;q^i) \\ & q^i_{(k)}(t) \to q'^i_{(k)}(t') = q^i_{(k)}(t) + \Delta q^i_{(k)}(t) = \\ & \quad q^i_{(k)}(t) + \varepsilon_\sigma \xi^{i\sigma}_{(k)}(t;q^i(t),\dot{q}^i(t),\cdots,q^i_{(N_i)}(t)) \\ & \quad (s = 0,1,\cdots,N_i;\sigma = 1,2,\cdots,r) \end{aligned}\right\} \tag{4-1-19}$$

下不变（ε_σ 为任意无穷小参量），即 $I[q'(t')]=I[q(t)]$，则

$$\begin{aligned} & \int_{t'_1}^{t'_2} L'(t';q^{i\prime}(t'),\dot{q}^{i\prime}(t'),\cdots,q^i_{(N_i)}(t'))\mathrm{d}t' = \\ & \int_{t_1}^{t_2} L(t;q^i(t),\dot{q}^i(t),\cdots,q^i_{(N_i)}(t))\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4-1-20}$$

引入等时变分 $\delta q^i_{(k)}(t)$，它与全变分 $\Delta q^i_{(k)}(t)$ 的关系为

$$\delta q^i_{(k)}(t) = \Delta q^i_{(k)}(t) - \dot{q}^i_{(k)}\Delta t \tag{4-1-21}$$

等时变分适合交换关系式（4-1-3）. 经过与一阶微商理论中类似的计算，可得

$$\begin{aligned} 0 = \Delta I = & I[q'(t')] - I[q(t)] = \\ & \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\Delta t)\right]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4-1-22}$$

式（4-1-22）中第一项积分，由式（4-1-16）给出，于是有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta I}{\delta q^i}\delta q^i \mathrm{d}t + \left[L\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i} p_i^{(j-1)}\delta(\mathrm{D}^{(j-1)}q^i)\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{4-1-23}$$

沿着系统运动的轨线，按运动方程式（4-1-18），由式（4-1-23）可得系统的运动守恒量，即

$$L\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i} p_i^{(j-1)}\delta(\mathrm{D}^{j-1}q^i) = \text{const} \tag{4-1-24}$$

或

$$L\tau^\sigma + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i} p_i^{(j-1)}\mathrm{D}^{j-1}(\xi^{i\sigma} - \dot{q}^i\tau^\sigma) = \text{const}$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{4-1-25}$$

这样就得到了 Lagrange 量含高阶微商系统的 Noether 第一定理：如果系统的作用量式（4-1-1）在含 r 个参数的无穷小变换式（4-1-19）下不变，那么系统存在 r 个运动守恒量式（4-1-25）. 如果 L 至多仅含 $q^i(t)$ 的一阶微商，则

$$p_i^{(j-1)} = \begin{cases} 0 & (j = 2,3,\cdots,N_i) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} & (j = 1) \end{cases} \tag{4-1-26}$$

那么式（4-1-25）可化为

$$L\tau^\sigma + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\xi^\sigma - \dot{q}^i\tau^\sigma) = \text{const} \tag{4-1-27}$$

这恰好是寻常一阶微商理论 Noether 第一定理的结果.

将上述一般结果应用于时间平移不变性和空间平移不变性，可分别导出相应的守恒量.

（1）当 L 不显含时间 t 时，作用量在时间平移变换下不变. 时间平移变换为

$$t' = t + \epsilon, \quad q^{i\prime}(t') = q^i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-1-28}$$

此时，$\tau=1$，$\xi^i=0$（$i=1, 2, \cdots, n$），代入式（4-1-25）中得到系统的守恒量

$$L - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i} p_i^{(j-1)} \mathrm{D}^j q^i = \text{const} \tag{4-1-29}$$

如果 L 至多仅含 $q^i(t)$ 的一阶微商，那么式（4-1-29）可化为

$$L - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = L - p_i\dot{q}^i = \text{const} \tag{4-1-30}$$

式（4-1-30）为系统的 Hamilton 量守恒，式（4-1-29）为系统的广义 Hamilton量守恒.

（2）当 L 不显含 q^i 时，作用量在空间坐标平移变换下不变

$$t' = t, \quad q^{i\prime}(t) = q^i(t) = \epsilon\delta_{ij} \tag{4-1-31}$$

式中：δ_{ij} 为 Kronecker 记号（i，$j=1$，2，$\cdots$，n）. 此时 $\tau=0$，由式（4-1-25）可得系统的守恒量（以下 s 求和由 0 至 N_i-1）

$$p_i^{(0)} \equiv p_{i/1} = \sum_{k=0}^{N_i-1}(-\mathrm{D}^k)\frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^{k+1}q^i)} = \text{const} \tag{4-1-32}$$

下面讨论高阶微商系统的正则形式．系统的（正则）Hamilton 量 H_c 简记为

$$H(t;q_{(s)}^i,p_i^{(s)})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}p_i^{(s)}q_{(s+1)}^i-L(t;q^i,\cdots,q_{(N_i)}^i) \tag{4-1-33}$$

其中最高阶微商 $q_{(N_i)}^i$ 由正则动量定义式（4-1-14b）消去（s 求和由 0 至 N_i-1）．在正则变量 $q_{(s)}^i$，$p_i^{(s)}$ 的任意变分下，系统 Hamilton 量的改变为

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\left[(q_{(s+1)}^i)\delta p_i^{(s)}+p_i^{(s)}\delta q_{(s+1)}^i-\frac{\partial L}{\partial q_{(s)}^i}\delta q_{(s)}^i\right] \tag{4-1-34}$$

由式（4-1-14b）、式（4-1-14c）得

$$\delta H=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_{(0)}^i}\delta q_{(0)}^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\left(p_i^{(s)}-\frac{\partial L}{\partial q_{(s+1)}^i}\right)\delta q_{(s+1)}^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}q_{(s+1)}^i\delta p_i^{(s)}=$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_{(0)}^i}\delta q_{(0)}^i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\dot{p}_i^{(s+1)}\delta q_{(s+1)}^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}q_{(s+1)}^i\delta p_i^{(s)} \tag{4-1-35}$$

利用系统的 EL 方程式（4-1-8），有

$$\sum_{i=1}^{N_i}(-1)^s\mathrm{D}^s\left(\frac{\partial L}{\partial q_{(s)}^i}\right)=0 \tag{4-1-36a}$$

和

$$\frac{\partial L}{\partial q_{(0)}^i}=\dot{p}_i^{(0)}=\dot{p}_{i/1} \tag{4-1-36b}$$

可将式（4-1-35）化为

$$\delta H=-\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i^{(0)}\delta q_{(0)}^i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\dot{p}_i^{(s+1)}\delta q_{(s+1)}^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-2}\dot{q}_{(s)}^i\delta p_i^{(s)}=$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\dot{p}_i^{(s)}\delta q_{(s)}^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\dot{q}_{(s)}^i\delta p_i^{(s)} \tag{4-1-37}$$

可见，δH 仅依赖于正则变量及其变分．另一方面，又有

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i}\delta q_{(s)}^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)} \tag{4-1-38}$$

比较式（4-1-37）、式（4-1-38），得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i}\delta q_{(s)}^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N_i-1}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)}=0 \tag{4-1-39}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q_{(s)}^i}=-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i} \tag{4-1-40a}$$

$$\frac{\delta I^{p}}{\delta p_i^{(s)}} = \dot{q}_{(s)}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \tag{4-1-40b}$$

由于正则变量的变分 $\delta q_{(s)}^i$ 和 $\delta q_i^{(s)}$ 彼此独立，由式(4-1-39) 可得

$$\dot{q}_{(s)}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \tag{4-1-41a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)} = -\frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i} \tag{4-1-41b}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n; s = 0,1,2,\cdots,N_i - 1)$$

式（4-1-41）为广义力学系统的广义正则方程．它们是正则变量 $q_{(0)}^i(=q^i)$，$q_{(1)}^i(=\dot{q}^i),\cdots,q_{(N_i-1)}^i$ 和 $p_i^{(0)},p_i^{(1)},\cdots,p_i^{(N_i-1)}$ 的一阶微分方程，共计 $2\sum_{i=1}^{n}N_i$ 个方程．对所谓广义正规 Lagrange 量系统，正则方程式（4-1-41）和 Lagrange方程式（4-1-18）是等价的.

从位形空间描述过渡到相空间描述，正则 Hamilton 量式（4-1-33）是利用正则动量的定义式（4-1-14b）消去其中最高阶微商 $q_{(N_i)}^i$ 而得的．由式（4-1-14b）如能解出所有的 $q_{(N_i)}^i$，并将其代入式（4-1-33）即可得到用正则变量给出的 Hamilton 量．根据隐函数存在定理，由式（4-1-14b）可解出所有 $q_{(N_i)}^i$ 的条件是相应的行列式满足

$$\det\left|\frac{\partial p_i^{(N_i-1)}}{\partial q_{(N_j)}^j}\right| = \det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial q_{(N_i)}^i \partial q_{(N_j)}^j}\right| \neq 0 \tag{4-1-42}$$

适合式（4-1-42）的 Lagrange 量称为广义正规 Lagrange 量．如果式（4-1-42）为 0，那么由式（4-1-14b）就不能解出所有的 $q_{(N_i)}^i$．从而，由 Lagrange 体制描述过渡到 Hamilton 体制描述，就不能按上述广义正规 Lagrange 量系统那样来实现，这种情形将在本节以后详细阐述.

4-2 高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式

当广义力学系统的 Lagrange 量 $L(t;\ q_{(0)}^i,\ q_{(1)}^i,\ \cdots,\ q_{(N_i)}^i)$的广义 Hess 矩阵

$$[H_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_{(N_i)}^i \partial q_{(N_j)}^j}\right] = \left[\frac{\partial p_i^{(N_i-1)}}{\partial q_{(N_j)}^j}\right] \tag{4-2-1}$$

的行列式为 0 时（即广义 Hess 矩阵是奇异的或退化的），则该Lagrange量称为广义奇异 Lagrange 量．此时，由正则动量的定义式（4-1-14b）不能完全解出所有广义坐标的最高阶导数，因而也就不能按 4-1 节中的方式过渡到 Hamilton 形式.

4-2-1 正则约束 广义正则方程

由式(4-1-14b)，有

$$p^{(N_i-1)} = p_{i/N_i} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(N_i)}} = f_i(t;q^k,q^k_{(1)},\cdots,q^k_{(N_k)})$$

$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{4-2-2}$$

设广义 Hess 矩阵的秩为 $R(R<n)$，由式(4-2-2)可以解出 R 个广义坐标的最高阶微商，即

$$q^r_{(N_r)} = \varphi^r(t;p^{(N_r-1)}_r,q^k_{(s)},q^\rho_{(N_\rho)})$$

$$(r = 1,2,\cdots,R;\rho = R+1,R+2,\cdots,n) \tag{4-2-3}$$

将式(4-2-3)代入 Hamilton 量

$$H = p^{(s)}_i q^i_{(s+1)} - L(t;q^i_{(s)},\cdots,q^i_{(N_i)}) \tag{4-2-4}$$

中(为简化记号，重复指标代表求和)，则它应有如下形式

$$H = H(t;q^i_{(s)},q^\rho_{(N_\rho)},p^{(s)}_i) \tag{4-2-5}$$

式中：$q^\rho_{(N_\rho)}$为未解出的那 $n-R$ 个最高阶微商. 由于式(4-2-4)中直接依赖于 $q^\rho_{(N_\rho)}$，并且经由 φ^r 间接依赖于$q^\rho_{(N_\rho)}$，按广义正则动量的定义，有

$$\frac{\partial H}{\partial q^\rho_{(N_\rho)}} = \left(p^{(N_\rho-1)}_\rho - \frac{\partial L}{\partial q^\rho_{(N_\rho)}}\right) + \frac{\partial \varphi^r}{\partial q^\rho_{(N_\rho)}}\left(p^{(N_r-1)}_r - \frac{\partial L}{\partial q^r_{(N_r)}}\right) = 0 \tag{4-2-6}$$

即利用广义正则动量的定义，系统的 Hamilton 量与最高阶微商 $q^\rho_{(N_\rho)}$无关.

$$p^{(N_i-1)}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(N_i)}} \to H = H(t;q^i_{(s)},p^{(s)}_i) \tag{4-2-7}$$

设广义 Hess 矩阵的秩为 R，由式(4-2-2)可解出 R 个 $q^r_{(N_r)}$ $(r=1, 2, \cdots, R)$,即式(4-2-3). 将式(4-2-3)代入式(4-2-2)，由剩下的 $n-R$ 方程可得

$$p^{(N_\rho-1)}_\rho = \Psi_\rho(t;q^i_{(s)},p^{(N_r-1)}_r) \quad (\rho = R+1,\cdots,n) \tag{4-2-8}$$

式(4-2-8)中不再含广义坐标的最高阶微商 $q^\rho_{(N_\rho)}$，因为不然的话，从式(4-2-2)还可解出更多 $q^{r'}_{(N_{r'})}$ $(r'=1, 2, \cdots, R'>R)$，这与假设广义 Hess 矩阵的秩为 R 矛盾. 将式(4-2-8)写为

$$\Phi^0_a(t;q^i_{(s)},p^{(N_i-1)}_i) = p^{(N_a-1)}_a - \Psi_a(t;q^i_{(s)},p^{(N_r-1)}) = 0$$

$$(a = R+1,R+2,\cdots,n) \tag{4-2-9}$$

式(4-2-9)为广义奇异 Lagrange 量(广义力学)系统的初级约束，此约束来源于 Lagrange 量的奇异性和系统正则动量的定义. 得出此初级约束，没有利用系统的动力学方程. 初级约束和 Hamilton 量中均不含广义坐标的最高阶

微商 $q^i_{(N_i)}$. 可见，高阶微商奇异Lagrange量系统，在相空间描述时为广义约束 Hamilton 系统. 此外，从广义动量的定义式(4-1-14c)也可能导致正则变量间存在约束，但 Saito 等人指出这些约束为次级约束[1].

下面讨论此约束 Hamilton 系统的正则方程. 将式(4-2-3)代入式(4-2-4)，并由式(4-2-9)，让 $p_a^{(N_a-1)}=\Psi_a+\Phi_a^0$，得

$$H(t;q^i_{(s)},p_i^{(s)}) = H_c(t;q^i_{(s)},p_i^{(s)}) + q^a_{(N_a)}\Phi_a^0$$

$$(a = 1,2,\cdots,n-R) \tag{4-2-10}$$

式中

$$\begin{aligned}H_c(t;q^i_{(s)},p_i^{(s)}) =& p_r^{(N_r-1)}\varphi^r(t;\ p_r^{(N_r-1)},q^i_{(s)},q^\rho_{(N_\rho)}) + \\ &\Psi_\rho(t;q^i_{(s)},p_r^{(N_r-1)})q^\rho_{(N_\rho)} + p_i^{(s-1)}q^i_{(s)} - \\ &L(t;q^r_{(s)},q^r_{(N_r)},q^\rho_{(N_\rho)})\end{aligned} \tag{4-2-11}$$

式(4-2-11)中第三项对 s 求和由 $1\sim N_i-1$，并将该式关于正则变量 $q^i_{(s)}$ 和 $p_i^{(s)}$ 求微商，注意 H_c 通过 φ^r 和 Ψ_ρ 隐函 $q^i_{(s)}$ 和 $p_i^{(s)}$，于是得

$$\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}} = p_i^{(s-1)} + q^\rho_{(N_\rho)}\frac{\partial \Psi_\rho}{\partial q^i_{(s)}} - \frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}} \tag{4-2-12a}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}} = q^i_{(s+1)} + q^\rho_{(N_\rho)}\frac{\partial \Psi_\rho}{\partial p_i^{(s)}} \tag{4-2-12b}$$

对 $s=0$，由式(4-1-36b)用 $\dot{p}_i^{(0)}$ 代替 $\dfrac{\partial L}{\partial q^i_{(0)}}$；对$s>0$，用式(4-1-14c)，并用约束关系式(4-2-9)代替 Ψ_ρ，于是得

$$\dot{q}^i_{(s)} \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}} + \lambda_a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}} \tag{4-2-13a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)} \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}} - \lambda_a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q^i_{(s)}} \tag{4-2-13b}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n;s = 0,1,\cdots,N_i-1;a = 1,2,\cdots,n-R)$$

式中：$\lambda^a=-q^a_{(N_a)}$. 方程式(4-2-13a)和(4-2-13b)又可写为

$$\dot{q}^i_{(s)} \approx \frac{\partial H_T}{\partial p_i^{(s)}} \tag{4-2-14a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)} \approx -\frac{\partial H_T}{\partial q^i_{(s)}} \tag{4-2-14b}$$

式中：$H_T=H_c+\lambda^a\Phi_a^0$ 为总 Hamilton 量. 式(4-2-14a)为高阶微商奇异Lagrange量系统的广义正则方程. 这组方程和 EL 方程等价. 方程式(4-2-14a)和式(4-2-14b)是二阶微商奇异 Lagrange 量系统正则方程的推广[4].

在上节中对于广义正规 Lagrange 量的广义力学系统，已得到式(4-1-37)．从推导过程可以看出，无论是广义正规 Lagrange 量系统或广义奇异 Lagrange 量系统，式(4-1-37)总是成立的，也就是说，Hamilton 量的变分仅依赖于正则变量 $q_{(s)}^i$ 和 $p_i^{(s)}$ 的变分 $\delta q_{(s)}^i$ 和 $\delta p_i^{(s)}$．于是对广义奇异 Lagrange 量系统，仍可导出式(4-1-39)，即

$$-\left(\dot{p}_i^{(s)}+\frac{\partial H_c}{\partial q_{(s)}^i}\right)\delta q_{(s)}^i+\left(\dot{q}_{(s)}^i-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}\right)\delta p_i^{(s)}=0 \tag{4-2-15}$$

但对于奇异 Lagrange 量系统，正则变量 $q_{(s)}^i$ 和 $p_i^{(s)}$ 彼此间不是独立的，它们之间存在约束条件的限制，即正则变量应满足约束条件式(4-2-9)，正则变量的变分适合

$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\delta q_{(s)}^i+\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)}=0 \tag{4-2-16}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)(a=1,\ 2,\ \cdots,\ n-R)$，结合式(4-2-15)、式(4-2-16)，得

$$\begin{gathered}-\left(\dot{p}_i^{(s)}+\frac{\partial H_c}{\partial q_{(s)}^i}+\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\right)\delta q_{(s)}^i+\\\left(\dot{q}_{(s)}^i-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}-\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\right)\delta p_i^{(s)}=0\end{gathered} \tag{4-2-17}$$

选取 Lagrange 乘子 $\lambda^a(t)(a=1,\ 2,\ \cdots,\ n-R)$，使其适合方程

$$\dot{q}_{(s)}^i=\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}+\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}} \tag{4-2-18a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)}=-\frac{\partial H_c}{\partial q_{(s)}^i}-\lambda^a\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i} \tag{4-2-18b}$$

这样式(4-2-17)中剩下的方程中的 $\delta q_{(s)}^i$ 和 $\delta p_i^{(s)}$ 彼此是独立的，从而式(4-2-17)中 $\delta q_{(s)}^i$ 和 $\delta p_i^{(s)}$ 前面的系数应为 0，即这些系数仍适合式(4-2-18)，即是说，所有的 $q_{(s)}^i$、$p_i^{(s)}$、$\lambda^a(t)$满足方程

$$\begin{gathered}\dot{q}_{(s)}^i\approx\frac{\partial H_T}{\partial p_i^{(s)}},\quad \dot{p}_i^{(s)}\approx-\frac{\partial H_T}{\partial q_{(s)}^i},\quad \Phi_a^0(t;q_{(s)}^i,p_i^{(s)})\approx 0\\(i=1,2,\cdots,n;s=0,1,2,\cdots,N_i-1;a=1,2,\cdots,n-R)\end{gathered} \tag{4-2-19}$$

式中：$H_T=H_c+\lambda^a\Phi_a^0$ 为总 Hamilton 量．式(4-2-19)为高阶微商奇异 Lagrange量系统的广义正则方程．与式(4-2-14)对比，可见Lagrange乘子 $\lambda^a(t)$相应于未解出的广义坐标最高阶微商 $q_{(N_a)}^a$．

正则变量 $q_{(s)}^i$，$p_i^{(s)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N_i-1)$和时间 t 的任意函数 $F(t;q_{(s)}^i,p_i^{(s)})$ 的时间全微商为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q_{(s)}^{i}}\dot{q}_{(s)}^{i}+\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_{i}^{(s)}}\dot{p}_{i}^{(s)} \tag{4-2-20}$$

将式(4-2-19)代入式(4-2-20)，得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H_{\mathrm{c}}\}+\lambda^{a}\{F,\Phi_{a}^{0}\} \tag{4-2-21}$$

其中广义 Poisson 括号定义为

$$\{F,G\}=\frac{\partial F}{\partial q_{(s)}^{i}}\frac{\partial G}{\partial p_{i}^{(s)}}-\frac{\partial F}{\partial p_{i}^{(s)}}\frac{\partial G}{\partial q_{(s)}^{i}} \tag{4-2-22}$$

基本广义 Poisson 括号为

$$\{q_{(r)}^{i},p_{j}^{(s)}\}=\delta_{j}^{i}\delta_{r}^{s},\quad \{q_{(r)}^{i},q_{(s)}^{j}\}=0,\quad \{p_{i}^{(r)},p_{j}^{(s)}\}=0$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n;r,s=0,1,2,\cdots,N_{i}-1) \tag{4-2-23}$$

初级约束的自洽性条件要求约束随时间演化是稳定的．由式(4-2-21)有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{a'}^{0}}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\partial \Phi_{a'}^{0}}{\partial t}+\{\Phi_{a'}^{0},H_{\mathrm{c}}\}+\lambda^{a}\{\Phi_{a'}^{0},\Phi_{a}^{0}\}\approx 0$$

$$(a=1,2,\cdots,n-R) \tag{4-2-24}$$

式(4-2-24)可能为一恒等式，或者可能确定 Lagrange 乘子 $\lambda^{a}(t)$，或者导致有别于初级约束的正则变量间的新关系式．将这些正则变量间的新关系记为

$$\Phi_{a}^{1}(t;q_{(s)}^{i},p_{i}^{(s)})\approx 0 \tag{4-2-25}$$

式(4-2-25)称为次级约束．由次级约束的自洽性条件可导出其他次级约束，即

$$\Phi_{a}^{k}=\frac{\partial \Phi_{a}^{k-1}}{\partial t}+\{\Phi_{a}^{k-1},H_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{4-2-26}$$

这样，从每一个初级约束 Φ_{a}^{0} 出发，均可导出相应的次级约束，这个程序直至

$$\Phi_{a}^{m+1}=\frac{\partial \Phi_{a}^{m}}{\partial t}+\{\Phi_{a}^{m},H_{\mathrm{T}}\}=C_{ak}^{b}\Phi_{b}^{k}\qquad(k\leqslant m) \tag{4-2-27}$$

为止．

所有约束(初级和次级)可分为两类：一个约束 Φ_{a} 如果和所有其他约束 Φ_{b} 均适合 $\{\Phi_{a},\Phi_{b}\}\approx 0\ (\mathrm{mod}\ \Phi_{c})$，则称 Φ_{a} 为第一类约束(记号 $A\approx 0(\mathrm{mod}\ \Phi_{c})$ 代表在约束 $\Phi_{c}\approx 0$ 的超曲面上，等式 $A=0$ 成立)；否则，称第二类约束．全部约束可以通过线性组合用其等价的约束代替，这种组合使尽可能多的约束变为第一类约束．对第二类约束 $\theta_{i}\approx 0$，可引入 Dirac 括号，即

$$\{F,G\}_{\mathrm{D}}=\{F,G\}-\{F,\theta_{i}\}C_{ij}^{-1}\{\theta_{j},G\} \tag{4-2-28}$$

式中：C_{ij}^{-1} 满足$\{\theta_i, \theta_j\} C_{jk}^{-1}=\delta_i^k$. 在 Dirac 括号下，由于对任意动力学变量 F，均有$\{\theta_i, F\}_D=0$. 因此，第二类约束可视为强等于 0，即$\theta_i\simeq 0$.

4-2-2 规范生成元 Dirac 猜想

考虑有限自由度系统的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商，即 $L=L(t_i; q_{(0)}^i(t), q_{(1)}^i(t), \cdots, q_{(N)}^i(t))$，其中 $q_{(s)}^i=\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}q_i=\mathrm{D}^s q_i$. 由 Ostrograndsky变换，广义正则动量

$$p_i^{(N-1)}=\frac{\partial L}{\partial q_{(N)}^i} \tag{4-2-29a}$$

$$p_i^{(s-1)}=\frac{\partial L}{\partial q_{(s)}^i}-\dot{p}_i^{(s)} \quad (s=1,2,\cdots,N-1) \tag{4-2-29b}$$

系统的广义正则 Hanilton 量为

$$H_c=\sum_{s=p}^{N-1}p_i^{(s)}q_{(s+1)}^i-L \tag{4-2-30}$$

其中重复指标代表求和，H_c 由式(4-2-29a)消去最高阶微商 $q_{(N)}^i$ 得到. 对高阶微商奇异 Lagrange 量系统，广义 Hess 矩阵

$$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_{(N_i)}^i\ \partial q_{(N_j)}^j}\right]$$

退化，由式(4-2-29a)不能解出所有 $q_{(N)}^i$，这表明该系统在相空间存在约束. 设所含初级第一类约束为 $\phi_a^0\approx 0(a=1, 2, \cdots, K_1)$，第二类约束 $\theta_i\approx 0(i=1, 2, \cdots, I_1)$. 式中"≈"为 Dirac 意义下的弱等记号. 类似于一阶 Lagrange 量系统可知，任意力学量 $F(t;q_s^i,p_i^{(s)})$ 随时间的演化适合方程[1]

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H_c\}+\lambda^a\{F,\phi_a^0\}-$$
$$\{F,\theta_{b'}\}C_{b'b}^{-1}\left(\{\theta_b,H_c\}+\frac{\partial\theta_b}{\partial t}\right) \tag{4-2-31}$$

式中：与初级第一类约束相联系的约束乘子 $\lambda^a(t)$ 为任意函数；$C_{b'b}^{-1}$ 满足 $C_{b'b}^{-1}\{\theta_b,\theta_{b''}\}=\delta_{b'b''}$. 而 $\{\cdot,\cdot\}$代表广义 Poisson 括号. 设 δt 为无穷小参数，由式(4-2-31)可计算出 $F(\delta t)$的值. 选取另一约束乘子 $\bar{\lambda}^a(t)$时，可求出 $\bar{F}(\delta t)$值，两者之差为

$$\delta F=\varepsilon^a\{F,\phi_a^0\}, \quad \varepsilon^a=\delta t[\lambda^a(0)-\bar{\lambda}^a(0)] \tag{4-2-32}$$

式(4-2-32)表明，初级第一类约束为规范变换的生成元，取参数分别为 ε^a，η'，$-\varepsilon^a$ 和$-\eta'$，相继进行那样的变换，利用广义 Poisson 括号的Jacobi恒等式，得

$$\delta F = \varepsilon^{a}\eta^{a'}\{F,\{\phi_{a}^{0},\phi_{a'}^{0}\}\} \tag{4-2-33}$$

式(4-2-33)表明，任意两个初级第一类约束的广义 Poisson 括号也是规范变换的生成元. $\{\phi_{a}^{0},\ \phi_{a'}^{0}\}$仍为第一类约束，它们可能是初级第一类约束，也可能是次级第一类约束. 这样就可将 Dirac 猜想推广到高阶微商系统，即认为所有第一类约束均是规范变换的生成元. 提出此猜想的依据是约束乘子 $\lambda^{a}(t)$ 是任意的. 如果高阶微商系统 Dirac 猜想成立，那么，不仅初级第一类约束应计入 Hamilton 量中，次级第一类约束也应计入其中. 对于仅含第一类约束的系统，设所含的初级第一类约束为 $\phi_{a}^{0}\approx 0(a=1,2,\cdots,K_{1})$，次级第一类约束为 $\chi_{l}\approx 0(l=1,2,\cdots,I')$，类似一阶微商情况系统的广义正则方程可由扩展 Hamilton 量 H_{E} 导出，即

$$H_{\mathrm{E}} = H_{\mathrm{c}} + \lambda^{a}\phi_{a}^{0} + \mu^{l}\chi_{l} = H'_{\mathrm{c}} + \lambda^{a}\Lambda_{a} \tag{4-2-34}$$

其中 Lagrange(约束)乘子 λ^{a}，μ^{l} 是时间的任意函数，Λ_{a} 代表所有第一类约束，λ^{a} 为相应的约束乘子，它们是任意的，由约束的自洽性要求不能确定它们. 下面考察与第一类约束相应的约束乘子的任意性问题.

假设系统的正则作用量在下列定域变换

$$\left.\begin{aligned} t' &= t + R^{\sigma}\varepsilon_{\sigma} = t + a_{k}^{\sigma}\mathrm{D}^{k}\varepsilon_{\sigma}(t) \\ q^{i\,\prime}_{(s)}(t') &= q^{i}_{(s)}(t) + S^{i\sigma}_{\sigma}\varepsilon_{\sigma}(t) \\ p_{i}^{(s)\prime}(t') &= p_{i}^{(s)}(t) + T_{i}^{(s)\sigma}\varepsilon_{\sigma}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4-2-35}$$

下(其中 $\varepsilon_{\sigma}(t)(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$为任意函数)是不变的，$S^{i\sigma}_{(s)}$，$T_{i}^{(s)\sigma}$与$R^{\sigma}$ 为线性微分算符，且系统的广义正则方程是由扩展 Hamilton 量 H_{E} 导出的，由正则 Noether 恒等式，并利用广义正则方程式，沿着系统运动的轨线，有[1]

$$\begin{aligned} &\widetilde{T}_{i}^{(s)\sigma}\left(\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial p_{i}^{(s)}}\right) - \widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{p}_{i}^{(s)}\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial p_{i}^{(s)}}\right) + \\ &\widetilde{S}^{i\sigma}_{(s)}\left(\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial q^{i}_{(s)}}\right) - \widetilde{R}^{\sigma}\left(\dot{q}^{i}_{(s)}\lambda^{a}\frac{\partial\Lambda_{a}}{\partial q^{i}_{(s)}}\right) \approx 0 \end{aligned} \tag{4-2-36}$$

式中：$\widetilde{S}^{i\sigma}_{(s)}$，$\widetilde{T}_{i}^{(s)\sigma}$，$\widetilde{R}^{\sigma}$ 是相应于 $S^{i\sigma}_{(s)}$，$T_{i}^{(s)\sigma}$，R^{σ} 的伴随算符. 对允许 Lagrange 量，如果式(4-2-36)确定出与第一类约束相联系的约束乘子间的某些关系，则此时该约束乘子并非是任意的. 这就对 Dirac 猜想的提出产生疑问，Dirac 猜想就可能失效.

由高阶微商系统作用量的变分原理导出其 EL 方程时，曾要求等时变分和微商可交换，即 $\delta\dot{q}^{i}_{(s)} = \mathrm{D}^{s}(\delta q^{i})$，在 Hamilton 中，将其视为一个基本要求，仿一阶微商情形，同样可证明由扩展Hamilton量 H_{E} 决定的正则作用量

$$I_{\mathrm{E}}(q_{(s)}^{i}, p_{i}^{(s)}, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t(p_i^{(s)} q_{(s)}^{i} - H_{\mathrm{E}}) \tag{4-2-37}$$

在下列变换(参见 1.5 节)

$$\left.\begin{aligned} \delta q_{(s)}^{i} &= \varepsilon^{a}(t)\{q_{(s)}^{i}, \Lambda_{a}\} = S_{b(s)}^{i} \varepsilon^{b}(t) \\ \delta p_{i}^{(s)} &= \varepsilon^{a}(t)\{p_{i}^{(s)}, \Lambda_{a}\} = T_{ib}^{(s)} \varepsilon^{b}(t) \\ \delta \lambda^{a} &= \delta_{b}^{a} \dot{\varepsilon}^{b}(t) - C_{b}^{a} \varepsilon^{b}(t) + \lambda^{c} C_{bc}^{a} \varepsilon^{b}(t) = U_{b}^{a} \varepsilon^{b}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4-2-38}$$

下不变[1]，其中 $S_{b(s)}^{i}$，$T_{ib}^{(s)}$ 和 U_{b}^{a} 均为线性微分算符. 由 $\delta I_{E}=0$，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta I_{\mathrm{E}}}{\delta p_i^{(s)}} \delta p_i^{(s)} + \frac{\delta I_{\mathrm{E}}}{\delta q_{(s)}^{i}} \delta q_{(s)}^{i} + \frac{\delta I_{\mathrm{E}}}{\delta \lambda^{a}} \delta \lambda^{a} \right) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [p_i^{(s)} S_{b(s)}^{i} \varepsilon^{b}(t)] \mathrm{d}t = 0 \tag{4-2-39}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta I_{\mathrm{E}}}{\delta q_{(s)}^{i}} &= -\dot{p}_i^{(s)} - \frac{\partial H_{\mathrm{E}}}{\partial q_{(s)}^{i}} \\ \frac{\delta I_{\mathrm{E}}}{\delta p_i^{(s)}} &= -\dot{q}_{(s)}^{i} - \frac{\partial H_{\mathrm{E}}}{\partial p_i^{(s)}} \\ \frac{\delta I_{\mathrm{E}}}{\delta \lambda^{a}} &= \frac{\partial H_{\mathrm{E}}}{\partial \lambda^{a}} \end{aligned}\right\} \tag{4-2-40}$$

由于 $\varepsilon^{b}(t)$的任意性，可选取它们及其微商在区间端点为零，式(4-2-39)左端最后一个积分为零，将左端第一个积分各项作分部积分，根据变分学基本引理和 $\varepsilon^{b}(t)$的任意性，可得扩展正则 Noether 恒等式，即

$$-\widetilde{T}_{ib}^{(s)} \left(\dot{q}_{(s)}^{i} + \frac{\partial H_{\mathrm{E}}}{\partial p_i^{(s)}} \right) + \widetilde{S}_{b(s)}^{i} \left(\dot{p}_i^{(s)} - \frac{\partial H_{\mathrm{E}}}{\partial q_{(s)}^{i}} \right) + \widetilde{U}_{b}^{a} \left(\frac{\partial H_{\mathrm{E}}}{\partial \lambda^{a}} \right) = 0 \tag{4-2-41}$$

式中：$\widetilde{S}_{b(s)}^{i}$，$\widetilde{T}_{ib}^{(s)}$，$\widetilde{U}_{b}^{a}$ 是相应于 $S_{b(s)}^{i}$，$T_{ib}^{(s)}$，U_{b}^{a} 的伴随算符. 利用由 H_{T} 确定的运动方程，由表达式(4-2-41)也许可确定出与第一类约束相联系的约束乘子间的某些关系. 式(4-2-41)说明，该约束乘子有可能不是任意的. 这违背了 Dirac 猜想中与第一类约束相联系的约束乘子的任意性，该猜想在高阶微商系统中是否成立值得进一步研究. 下面讨论一个反例[5].

考虑一个二阶微商 Lagrange 量

$$L = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2u(y)} \ddot{x}^{2} + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-2v(-y)} \ddot{z}^{2} \tag{4-2-42}$$

函数 $u(y)$，$v(-y)$满足的条件下面给出. 其 EL 运动方程表明其在 x，y，z 方向的运动是允许的. 过渡到 Hamilton 量描述，由 Ostrogradsky 变换，相应的广义正则动量为

$$p_x^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = e^{2u(y)}\ddot{x}, \quad p_y^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} = 0, \quad p_z^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{z}} = e^{2v(-y)}\ddot{z} \tag{4-2-43a}$$

$$p_x^{(0)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\dot{p}_x^{(1)}, \quad p_y^{(0)} = -\dot{p}_y^{(1)}, \quad p_z^{(0)} = \dot{p}_z^{(1)} \tag{4-2-43b}$$

由式(4-2-30)，正则 Hamilton 量为

$$H_c = \frac{1}{2}\left[e^{-2u(y)} p_x^{(1)^2} + \frac{1}{2}e^{2v(-y)} p_z^{(1)^2}\right] + p_x^{(0)}\dot{x} + p_y^{(0)}\dot{y} + p_z^{(0)}\dot{z} \tag{4-2-44}$$

初级约束为 $\phi^0 = p_y^{(1)} \approx 0$，总 Hamilton 量 $H_T = H_c + \lambda\phi^0$，其中 $\lambda(t)$ 为约束乘子. 由初级约束的自洽性条件可得出次级约束，即

$$\phi^1 = \{\phi^0, H_T\} = -p_y^{(0)} \approx 0 \tag{4-2-45}$$

$$\phi^2 = \{\phi^1, H_T\} = e^{-2u(y)}u'(y)p_x^{(1)^2} + e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^{(1)} \approx 0 \tag{4-2-46}$$

$$\phi^3 = \{\phi^2, H_T\} = 2e^{-2u(y)}u'(y)p_x^{(1)}p_x^{(0)} + 2e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^{(1)}p_z^{(0)} \approx 0 \tag{4-2-47}$$

$$\phi^4 = \{\phi^3, H_T\} = e^{-2u(y)}u'(y)p_x^{(0)^2} + e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^{(0)^2} \approx 0 \tag{4-2-48}$$

当函数 $u(y)$，$v(-y)$ 满足

$$\left.\begin{aligned} u''(y) - 2[u'(y)]^2 &= 0 \\ -v''(-y) - 2[v'(-y)]^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-2-49}$$

时，ϕ^4 的自洽性条件自动满足，不再产生新的次级约束. 由式(4-2-49)可解出 $u(y)$，$v(-y)$. 全部约束 ϕ^0，ϕ^1，ϕ^2，ϕ^3，ϕ^4 均为第一类约束.

正则 Lagrange 量为

$$L^p = p_x^{(1)}\ddot{x} + p_y^{(1)}\ddot{y} + p_z^{(1)}\ddot{z} + p_x^{(0)}\dot{x} + p_y^{(0)}\dot{y} + p_z^{(0)}\dot{z} - H_c = \frac{1}{2}e^{-2u(y)}p_x^{(1)^2} + \frac{1}{2}e^{2v(-y)}p_z^{(1)^2} \tag{4-2-50}$$

在相应的相空间的整体变换

$$x' = x - \alpha e^{-w}z, \quad z' = z + \alpha e^{w}x \qquad (|\alpha \ll 1|) \tag{4-2-51}$$

$$p_x^{(1)'} = p_x^{(1)} - \alpha e^{w}p_z^{(1)}, \quad p_z^{(1)'} = p_z^{(1)} + \alpha e^{-w}p_x^{(1)} \quad (|\alpha \ll 1|) \tag{4-2-52}$$

下(其中 $w(y) = u(y) + v(-y)$)，L^p，ϕ^0 不变，应用相空间的正则 Noether 定理，由 H_T 确定的运动方程，可得守恒量[5]，即

$$e^{-w}p_z^{(s)}x_{(s)}^1 - e^{w}p_x^{(s)}x_{(s)}^3 = \text{const} \tag{4-2-53}$$

此守恒量与由位形空间 Noether 定理导出的结果相同. 如果 Dirac 猜想成

立，其运动方程应该由扩展 Hamilton 量 H_E 导出，即

$$H_E = H_c + \lambda\phi^0 + \mu_a\phi^a = H_c + H_1,\ H_1 = \lambda\phi^0 + \mu_a\phi^a \quad (a = 1,2,3,4) \tag{4-2-54}$$

式中：$\mu_a(t)$为次级约束所联系的乘子. 因为次级约束式(4-2-45)～式(4-2-48)在式(4-2-51)和式(4-2-52)的换变下不具有变换不变性，所以不能按正则 Noether 定理，由 H_E 出发得到守恒量式(4-2-53)，说明 Dirac 猜想失效.

下面从相空间的正则 Noether 恒等式来考察这个问题. 系统 Lagrange 量 L_p 在定域变换

$$p_x^{(1)'} = p_x^{(1)} - \alpha(t)e^w p_z^{(1)},\quad p_z^{(1)'} = p_z^{(1)} + \alpha(t)e^{-w} p_x^{(1)} \quad (|\alpha \ll 1|) \tag{4-2-55}$$

下不变，从式(4-2-36)得

$$\theta(y)(2\mu_2 p_x^{(1)} p_z^{(1)} + \mu_3 p_x^{(1)} p_z^{(0)} + 2\mu_4 p_x^{(0)} p_z^{(0)}) + p_z^{(0)} p_z^{(1)}(\mu_3 v'(-y) + \mu_4 u'(y)) = 0 \tag{4-2-56}$$

式中：$\theta(y)=u(y)-v(y)$. 从式(4-2-55)可以看出约束乘子 μ_2，μ_3，μ_4 不是任意的. 约束乘子受到限制说明，与第一类约束相联系的约束乘子可能受到限制，Dirac 猜想在这个例子中失效.

利用扩展正则 Noether 恒等式(4-2-41)讨论这个例子可得到结论：约束乘子不是任意的，表明与第一类约束相联系的约束乘子可能受到限制，Dirac 猜想在这个例子中不成立.

以上从正则 Noether 定理、正则 Noether 恒等式与扩展正则 Noether 恒等式三个方面讨论了 Dirac 猜想在此反例中失效. 而在所有的讨论中均未对约束线性化. 从前面讨论的例子知道，与第一类约束相联系的约束乘子不再具有任意性，该猜想在新的反例中失效也就很自然了.

尽管 Dirac 猜想尚未得到普遍情形下的严格证明，但是对一些重要的物理系统，如电磁场、杨-Mills 场、广义电动力学以及高阶微商杨-Mills 场等，按 Dirac 猜想没有导致不合理的结果，所以通常还是采纳该猜想.

4-3 高阶微商系统 Green 函数的生成泛函

现在开始讨论高阶微商系统的量子理论，通过路径积分量子化，写出高阶微商系统 Green 函数的生成泛函，该系统的量子对称性质，可由生成泛函导出.

下面给出高阶微商系统 Green 函数的生成泛函. 对正规 Lagrange 量 $L(q^i, q^i_{(1)},\cdots)$ 描述的系统，在相空间描述时，其正则形式不含约束. 有限自由度高

阶微商正规 Lagrange 量系统在相空间中 Green 函数的生成泛函[6]为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}q_{(s)}^{i}\ \mathscr{D}p_{i}^{(s)}\ \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t(p_{i}^{(s)}\dot{q}_{(s)}^{i}-H_{\mathrm{c}}+J_{i}^{(s)}q_{(s)}^{i}+K_{(s)}^{i}p_{i}^{(s)})\right\} \tag{4-3-1}$$

式中：H_{c} 为正则 Hamilton 量；$J_{i}^{(s)}$ 和 $K_{(s)}^{i}$ 分别为对应于 $q_{(s)}^{i}$ 和 $p_{i}^{(s)}$ 的外源.

对于高阶微商奇异 Lagrange 量系统，在相空间描述时其正则变量间存在约束. 与通常一阶微商系统情形类似，按 Dirac -Bergmann 求约束的算法可以得到系统所含的所有约束. 全部约束可分为第一类约束和第二类约束. 在路径积分量子化中，对含第一类约束的系统，相应于每一个第一类约束，需选取一规范条件，使所有约束(包括规范条件)均变为第二类约束. 有限自由度高阶微商奇异 Lagrange 量系统在相空间中 Green 函数的生成泛函[6]为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}q_{(s)}^{i}\ \mathscr{D}p_{i}^{(s)}[\det|\{\Phi,\Phi\}|]^{1/2}\delta(\Phi)\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}t(J_{i}^{(s)}q_{(s)}^{i}+K_{(s)}^{i}p_{i}^{(s)})\right]\right\} \tag{4-3-2}$$

式中

$$I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}t(p_{i}^{(s)}q_{(s+1)}^{i}-H_{\mathrm{c}}) \tag{4-3-3}$$

式中：H_{c} 为正则 Hamilton 量；Φ 为所有约束的总体(对第二类约束系统)或所有约束和规范条件的总体(对第一类约束系统)；$\{\ \cdot\ ,\ \cdot\ \}$代表广义 Poisson 括号.

一般情形，很难作出相空间路径积分式(4-3-1)或式(4-3-2)对动量 $p_{i}^{(s)}$ 的积分，或者根本无法作出该积分，即是说不能将其化为位形空间中的路径积分形式，此时就不能简单地用位形空间中的 Lagrange 量(或有效 Lagrange量)表示 Green 函数的生成泛函，也不能导致位形空间的 Ward 恒等式. Ward 恒等式在量子场论中占重要地位，它是理论可重整化的根据，并且在实际计算中，可将高阶顶角的计算化为低阶顶角的计算. 前面对一阶微商Lagrange量系统，讨论了相空间中的定域对称性，建立了正则形式的 Ward 恒等式. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本. 下面将首先研究高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统的定域对称性质，建立系统的正则形式的 Ward 恒等式[7-9]，并给出它的应用，然后再研究系统的整体对称性，给出量子守恒律等.

设 $\phi^{\alpha}(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 为场变量，场的运动由含高阶微商的 Lagrange 量

$$L[\phi_{(0)}^{\alpha},\phi_{(1)}^{\alpha},\cdots,\phi_{(N)}^{\alpha}]=\int \mathrm{d}^{3}x\mathscr{L}(\phi^{\alpha},\phi_{,\mu}^{\alpha},\cdots,\phi_{,\mu(N)}^{\alpha}) \tag{4-3-4}$$

来描述．用奇异 Lagrange 量描述的系统，其广义 Hess 矩阵$[H_{\alpha\beta}]$退化为

$$\det|H_{\alpha\beta}|=\det\left|\frac{\delta^2 L}{\delta\phi^\alpha_{(N)}\delta\phi^\beta_{(N)}}\right|=0$$

此时正则变量 $\phi^\alpha_{(s)}$ 和 $\pi^{(s)}_\alpha$ 之间存在约束．高阶微商奇异 Lagrange 量系统在相空间中 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^\alpha_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha\,\delta(\Phi_k)\sqrt{\det|\{\Phi_l,\Phi_m\}|}\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J^{(s)}_\alpha\phi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_{(s)}\pi^{(s)}_\alpha)\right\}\tag{4-3-5}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi^{(s)}_\alpha\varphi^{\ \alpha}_{(s+1)}-\mathscr{H}_c\tag{4-3-6}$$

$\mathscr{H}_c$ 为系统的正则 Hamilton 量．对含第二类约束的系统，$\{\Phi_k\}$为所有第二类约束；对含第一类约束的系统，$\{\Phi_k\}$包括所有第一类约束和规范条件；$\{\ \cdot\ ,\cdot\ \}$代表场的广义 Poisson 括号；$J^{(s)}_\alpha$ 和 $K^\alpha_{(s)}$ 分别为 $\phi^\alpha_{(s)}$ 和 $\pi^{(s)}_\alpha$ 的外源．

利用 Grassmann 变量 $C(x)$ 和 $\overline{C}(x)$ 的积分性质，有

$$\det|\{\Phi_l(x),\Phi_m(y)\}|=\int\mathscr{D}C_m(y)\,\mathscr{D}\overline{C}_l(x)\cdot \exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\overline{C}_l(x)\{\Phi_l(x),\Phi_m(y)\}C_m(y)\right]\tag{4-3-7}$$

由式(4-3-7)和 δ-函数的性质，可将式(4-3-5)写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^\alpha_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\overline{C}\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J^{(s)}_\alpha\phi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_{(s)}\pi^{(s)}_\alpha)\right\}\tag{4-3-8a}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\lambda_k\Phi_k+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4y\overline{C}_l(x)\{\Phi_l(x),\Phi_m(y)\}C_m(y)\tag{4-3-8b}$$

$\lambda_k(x)$ 为 Lagrange 乘子．对 λ，C，$\overline{C}$ 也引入外源，并记 $\varphi^\alpha_{(s)}=(\phi^\alpha_{(s)},\lambda_m,\overline{C}_l,C_m)$，$J^{(s)}_\alpha=(J^{(s)}_\alpha,\zeta_k,\overline{\xi}_l,\xi_m)$，$\zeta_k$，$\overline{\xi}_l$，$\xi_m$ 分别为 λ_k，$\overline{C}_l$，C_m 对应的外源．于是式(4-3-8a)又可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^\alpha_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J^{(s)}_\alpha\varphi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_{(s)}\pi^{(s)}_\alpha)\right\}\tag{4-3-9}$$

高阶微商奇异 Lagrange 量系统的量子性质可由生成泛函式(4-3-9)导出．下面将分别论述该系统的定域和非定域量子对称性质，建立定域和非定域变换下的量子正则 Ward 恒等式；导出定域和非定域变换下的量子正则 Noether 恒等式；给出系统的整体对称性质；建立系统的量子守恒律，导出系统的量子正则 Noether 定理；建立高阶微奇异 Lagrange 量系统的量子 PC

积分不变量等，并给出若干应用.

4-4 高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统的定域量子正则对称性质

高阶微商场论与引力理论、规范场论、超对称、弦理论等问题直接有关，近年来的研究日益活跃. 规范不变的系统均是用奇异 Lagrange 量描述的. 文献[10-12]中讨论了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的经典正则对称性，这里进一步研究该系统的量子正则对称性.

场论中采用路径积分量子化有其突出的优点(特别是对非 Abel 规范场). Ward 恒等式在量子场论中占十分重要的地位，是理论可重整化的依据. 在实际计算中(如 QCD 中)，利用该恒等式可将高阶顶角的计算化为低阶顶角的计算. 当相空间的路径积分关于动量的积分属于 Gauss 型时，该积分可化为位形空间中的路径积分. 传统的 Ward 恒等式是在位形空间中给出的. 当“质量”依赖于坐标或“质量”依赖于坐标和动量[9]时，即使对动量的路径积分可以作出，其有效 Lagrange 量含 δ 函数的奇异性. 这种奇异性寄希望于重整化过程去消除. 一般来说，相空间中 Green 函数的生成泛函对动量的路径积分是不能积出的. 对约束 Hamilton 系统和高阶微商系统要作出对动量的路径积分，当约束结构复杂时是难以完成的，甚至是不可能的. 因此，研究量子系统在相空间中的正则对称性质，就具有更普遍的意义.

本节首先给出高阶微商奇异 Lagrange 量系统规范生成元的构成. 其次基于约束 Hamilton 系统相空间中 Green 函数的生成泛函在正则变量变换下的不变性；导出正则形式的 Ward 恒等式，它与传统的表述形式是完全不同. 指出约束 Hamilton 系统的量子正则方程与由 Dirac 猜想得到的经典正则方程是不同的. 对于一个给定的奇异 Lagrange 系统，一旦找出了系统的第一类约束，就可构造出系统规范变换的生成元，从而就有相应的正则形式的 Ward 恒等式. 作为理论的初步应用，讨论了一个广义动力系统的量子化，在广义 Coulomb 规范下，理论中不出现 FP 鬼粒子场，将规范生成元的构造和正则 Ward 恒等式用于该系统，无须作出对动量的路径积分，导出了场的传播子与正规顶角间的某些关系.

4-4-1 高阶微商奇异 Lagrange 量系统规范生成元的构成

设 $\varphi^{\alpha}(x)(\alpha=1, 2, \cdots, n)$ 为描述系统运动的场量，α 为不同场或场的不同分量的指标，$x=(x^0, x^i)(x^0=t, i=1, 2, 3)$. 设场的运动由含高阶

微商的 Lagrange 量来描述，其泛函形式为

$$L[\varphi_{(0)}^{a},\varphi_{(1)}^{a},\cdots,\varphi_{(N)}^{a}]=\int \mathrm{d}^{3}x\mathscr{L}(\varphi^{a},\varphi_{,\mu}^{a},\cdots,\varphi_{,\mu(N)}^{a}) \tag{4-4-1}$$

式中：$\mathscr{L}$为场的 Lagrange 量密度；$\varphi_{(0)}^{a}=\varphi^{a},\varphi_{(1)}^{a}=\dot{\varphi}^{a},\varphi_{(2)}^{a}=\ddot{\varphi}^{a},\cdots,\varphi_{,\mu}^{a}=\partial_{\mu}\varphi^{a}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\varphi^{a}$，$\varphi_{,\mu(m)}^{a}=\underbrace{\partial_{\mu}\partial_{\nu}\cdots\partial_{\rho}\partial_{\sigma}}_{m}\varphi^{a}$. 系统 EL 方程为

$$\sum_{r=0}^{N}(-1)^{r}\partial_{0}^{r}\frac{\delta L}{\delta\varphi_{(r)}^{a}}=0 \tag{4-4-2}$$

利用 Ostrogradsky 变换，引入正则动量

$$\pi_{a}^{(N-1)}=\frac{\delta L}{\delta\varphi_{(N)}^{a}} \tag{4-4-3a}$$

$$\pi_{a}^{(s-1)}=\frac{\delta L}{\delta\varphi_{(s)}^{a}}-\dot{\pi}_{a}^{(s)}\quad(s=1,2,\cdots,N-1) \tag{4-4-3b}$$

于是，可将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述. 系统的正则 Hamilton 量为

$$H_{\mathrm{c}}[\varphi_{(s)}^{a},\pi_{a}^{(s)}]=\int \mathrm{d}^{3}x\mathscr{H}_{\mathrm{c}}=\int \mathrm{d}^{3}x\Big[\sum_{a=1}^{n}\sum_{s=0}^{N-1}(\pi_{a}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{a}-\mathscr{L})\Big]=$$

$$\int \mathrm{d}^{3}x(\pi_{a}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{a}-\mathscr{L}) \tag{4-4-4}$$

它由式(4-4-3a)消去其中最高阶导数 $\varphi_{(N)}^{a}$ 而得(重复指标代表求和，下同). 对于正规系统，其 Hess 矩阵$[H_{\alpha\beta}]$非退化，

$$\det|H_{\alpha\beta}|=\det\left|\frac{\delta^{2}L}{\delta\varphi_{(N)}^{\alpha}\delta\varphi_{(N)}^{\beta}}\right|=\det\left|\frac{\partial^{2}\mathscr{L}}{\partial\varphi_{,\mu(N)}^{\alpha}\partial\varphi_{,\mu(N)}^{\beta}}\right|\neq 0$$

此时由式(4-4-3a)可解出所有的 $\varphi_{(N)}^{a}$ 作为 $\varphi_{(s)}^{a}$ 和 $\pi_{a}^{(s)}$ 的函数，正则 Hamilton 量是独立正则变量 $\varphi_{(s)}^{a}$ 和 $\pi_{a}^{(s)}$ 的泛函. 对于用奇异 Lagrange 量描述的系统(简称奇异系统)，其 Hess 矩阵是退化的，$\det|H_{\alpha\beta}|=0$，因而由式(4-4-3a)不能解出所有的 $\varphi_{(N)}^{a}$ 作为正则变量 $\varphi_{(s)}^{a}$ 和 $\pi_{a}^{(s)}$ 的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 R，此时正则变量 $\varphi_{(s)}^{a}$ 与 $\pi_{a}^{(s)}$ 之间存在 $n-R$ 个初级约束，即

$$\Phi_{a}^{0}(\varphi_{(s)}^{a},\pi_{a}^{(s)})\approx 0\quad(a=1,2,\cdots,n-R) \tag{4-4-5}$$

记号"≈"代表弱等，表示等式在约束超曲面上成立. 奇异 Lagrange 量描述的系统为约束 Hamilton 系统. 它的运动方程为

$$\dot{\varphi}_{(s)}^{a}=\{\varphi_{(s)}^{a},H_{\mathrm{T}}\},\quad \dot{\pi}_{a}^{(s)}=\{\pi_{a}^{(s)},H_{\mathrm{T}}\} \tag{4-4-6}$$

式中

$$H_{\mathrm{T}}=\int \mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda^{a}\Phi_{a}^{0}) \tag{4-4-7}$$

$\lambda^a(x)$为 Lagrange 乘子，$\{\cdot,\cdot\}$代表场的广义 Poisson 括号. 按约束的自洽性条件，由初级约束可逐次求出次级约束，即

$$\Phi_a^k = \{\Phi_a^{k-1}, H_\mathrm{T}\} \approx 0 \tag{4-4-8}$$

直至 Φ_a^m 适合

$$\Phi_a^{m+1} = \{\Phi_a^m, H_\mathrm{T}\} = C_{ak}^b \Phi_b^k \tag{4-4-9}$$

为止. 将全部初级约束和次级约束记为$\{\Psi_n\}$. 一个约束 Ψ_a 如果与其他约束 Ψ_b 均适合 $\{\Psi_a, \Psi_b\} = 0(\mathrm{mod}\ \Psi_c)$，则称 Ψ_a 为第一类约束；否则，称为第二类约束.

从分析系统的约束结构，可以构造规范变换的生成元. 考虑系统仅含第一类约束的情况. 规范变换保持系统的动力学方程不变，系统的轨线($\varphi_{(s)}^a$，$\pi_a^{(s)}$，λ^a)和无穷小规范变换后的轨线($\varphi_{(s)}^a + \xi_{(s)}^a$，$\pi_a^{(s)} + \eta_a^{(s)}$，$\lambda^a + \zeta^a$)均适合方程式(4-4-5)和式(4-4-6). 将规范变换后的轨线方程式(4-4-5)和式(4-4-6)关于 $\xi_{(s)}^a$，$\eta_a^{(s)}$ 和λ^a 等小量展开，利用原有的轨线方程式(4-4-5)和式(4-4-6)，得

$$\frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \varphi_{(s)}^a} \xi_{(s)}^a + \frac{\partial \Phi_a^0}{\partial \pi_a^{(s)}} \eta_a^{(s)} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{4-4-10}$$

$$\dot{\xi}_{(s)}^a = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{\delta^2 H_\mathrm{T}}{\delta \varphi_{(r)}^\beta \delta \pi_a^{(s)}} \xi_{(r)}^\beta + \frac{\delta^2 H_\mathrm{T}}{\delta \pi_\beta^{(r)} \delta \pi_a^{(s)}} \eta_\beta^{(r)} \right] \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{4-4-11}$$

$$\dot{\eta}_a^{(s)} = -\int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{\delta^2 H_\mathrm{T}}{\delta \varphi_{(r)}^\beta \delta \varphi_{(s)}^a} \xi_{(r)}^\beta + \frac{\delta^2 H_\mathrm{T}}{\delta \pi_\beta^{(r)} \delta \varphi_{(s)}^a} \eta_\beta^{(r)} \right] \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{4-4-12}$$

在规范理论中，规范变换含时空的任意函数及其微商. 一般可将规范生成元写为

$$G = \int \mathrm{d}^3 x\, \epsilon_j^{(k)} G_k^j (\varphi_{(s)}^a, \pi_a^{(s)}) \tag{4-4-13}$$

其中 $\epsilon_j^{(k)} = \partial_0^k \epsilon_j(x)$，$\epsilon_j(x)$ 为时空的任意函数. 此规范生成元产生正则变量的变更为

$$\xi_{(s)}^a = \delta \varphi_{(s)}^a = \{\varphi_{(s)}^a, G\} = \frac{\delta G}{\delta \pi_a^{(s)}} \tag{4-4-14a}$$

$$\eta_a^{(s)} = \delta \pi_a^{(s)} = \{\pi_a^{(s)}, G\} = -\frac{\delta G}{\delta \varphi_{(s)}^a} \tag{4-4-14b}$$

将式(4-4-14)代入式(4-4-10)～式(4-4-12)，由于$\epsilon_j(x)$的任意性，得

$$\{G_k^j, \Phi_a^0\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0), \tag{4-4-15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_{(s)}^a} [G_{k-1}^j + \{G_k^j, H_\mathrm{T}\}] = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0) \tag{4-4-16}$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi_{\alpha}^{(s)}}[G_{k-1}^{j}+\{G_{k}^{j},H_{\mathrm{T}}\}]=0 \quad (\bmod\ \Phi_{\alpha}^{0}) \tag{4-4-17}$$

因为变更后的正则变量仍在约束超曲面上，对次级约束 Ψ_n 亦应有$\{G_k^j,\Psi_n\}\approx0$. 这样，如果 G_k^j 取为约束，那么 G_k^j 必为第一类约束；又因系统仅含第一类约束，式(4-4-16)和式(4-4-17)中的 H_{T} 可用 H_c 来代替，由此得如下的递推关系[9]，即

$$G_{m}^{j}=0 \quad (\bmod\ \Phi_{\alpha}^{0}) \tag{4-4-18}$$

$$G_{k-1}^{j}+\{G_{k}^{j},H_{c}\}=0 \quad (\bmod\ \Phi_{\alpha}^{0}) \tag{4-4-19}$$

$$\{G_{0}^{j},H_{c}\}=0 \quad (\bmod\ \Phi_{\alpha}^{0}) \tag{4-4-20}$$

从式(4-4-19)可知，G_{k-1}^j 可由 G_k^j 导出，从每一个初级约束 G_m^j 出发，由式(4-4-19)可逐次求出 G_{m-1}^j，直到 G_0^j 适合式(4-4-20)为止. 这样求出 G_k^j 后，代入式(4-4-13)就构造出了规范变换的生成元.

当系统同时含第一类约束和第二类约束时，只要由初级第一类约束导出的次级第一类约束系统与第二类约束是完全分开的，上述构造规范生成元的方法对这类系统仍适用. 这里的讨论假定了不存在约束线性化问题以及约束乘子不进入 Poisson 括号的情况.

4-4-2 高阶微商奇异 Lagrange 量系统正则形式的 Ward 恒等式

在约束 Hamilton 系统的路径积分量子化中，对含第一类约束的系统，必须选取适当的规范条件，以限制理论中的规范自由度. 规范条件必须为系统动力学演化所保持，高阶微商奇异系统 Green 函数的生成泛函可写为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\varphi_{(s)}^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}^{(s)}\delta(\Phi_{l})\sqrt{\det|\{\Phi_{l},\Phi_{m}\}|}\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{(s)}^{\alpha}\pi_{\alpha}^{(s)})\right\} \tag{4-4-21}$$

其中 $J_\alpha^{(s)}$ 和 $K_{(s)}^\alpha$ 分别为 $\varphi_{(s)}^\alpha$ 和 $\pi_\alpha^{(s)}$ 的外源. 对第二类约束系统，$\{\Phi_l\}$代表所有第二类约束；对第一类约束系统，$\{\Phi_l\}$代表所有第一类约束和规范条件的总体，

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi_{\alpha}^{(s)}\dot{\varphi}_{(s)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{c} \tag{4-4-22}$$

根据 Grassmann 变量 $C(x)$和 $\overline{C}(x)$的积分性质，有

$$\det|\{\Phi_{l}(x),\Phi_{m}(y)\}|=\int \mathscr{D}C_{m}(y)\mathscr{D}\overline{C}_{l}(x)\cdot$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{4}x\mathrm{d}^{4}y\,\overline{C}_{l}(x)\{\Phi_{l}(x),\ \Phi_{m}(y)\}C_{m}(y)\right] \tag{4-4-23}$$

利用 δ-函数的性质和式(4-4-23)，可将式(4-4-21)写为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\varphi_{(s)}^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}^{(s)}\mathscr{D}\lambda\mathscr{D}C\mathscr{D}\overline{C}\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{(s)}^{\alpha}\pi_{\alpha}^{(s)})\right\} \qquad (4\text{-}4\text{-}24)$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{f}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \qquad (4\text{-}4\text{-}25)$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{f}}=\lambda_l\Phi_l,\ \mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4y\overline{C}_l(x)\{\Phi_l(x),\ \Phi_m(y)\}C_m(y)$$

考虑生成泛函式(4-4-24)在增广相空间中的定域变换下的性质，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+R_{\sigma}^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(x)\\ \varphi^{\alpha\prime}{}_{(s)}(x')&=\varphi_{(s)}^{\alpha}(x)+\Delta\varphi_{(s)}^{\alpha}(x)=\varphi_{(s)}^{\alpha}(x)+S_{(s)\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}(x)\\ \pi^{(s)\prime}{}_{\alpha}(x')&=\pi_{\alpha}^{(s)}(x)+\Delta\pi_{\alpha}^{(s)}(x)=\pi_{\alpha}^{(s)}(x)+T_{\alpha\sigma}^{(s)}\varepsilon^{\sigma}(x)\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}4\text{-}26)$$

其中 $\varepsilon^{\sigma}(x)(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$为无穷小任意函数，它们及其微商在 4 维时空区域的边界上为零，而

$$\left.\begin{aligned}&R_{\sigma}^{\mu}=A_{\sigma}^{\mu\nu(k)}\ \partial_{\nu(k)},\ S_{(s)\sigma}^{\alpha}=B_{\sigma}^{\alpha\nu(l)}\ \partial_{\nu(l)},\ T_{\alpha\sigma}^{(s)}=C_{\alpha\sigma}^{(s)\nu(m)}\ \partial_{\nu(m)}\\ &\nu(n)=\underbrace{\nu\lambda\cdots\rho\sigma}_{n},\ \partial_{\nu(n)}=\partial_{\nu}\partial_{\lambda}\cdots\partial_{\rho}\partial_{\sigma}\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}4\text{-}27)$$

系数 A，B，C 等均为 $x,\varphi_{(s)}^{\alpha}$ 和 $\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数，在(4-4-26)式变换下，有[1]

$$\Delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}+\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\delta\pi_{\alpha}^{(s)}+\partial_{\mu}\left[(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^{\mu}\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_{\alpha}^{(s)}\delta\varphi_{(s)}^{\alpha})\right\} \qquad (4\text{-}4\text{-}28)$$

其中

$$\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}=\Delta\varphi_{(s)}^{\alpha}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\Delta x^{\mu},\quad \delta\pi_{\alpha}^{(s)}=\Delta\pi_{\alpha}^{(s)}-\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\Delta x^{\mu} \qquad (4\text{-}4\text{-}29)$$

$$\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}=-\dot{\pi}_{\alpha}^{(s)}-\frac{\delta H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{c}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}},\quad \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}=\dot{\varphi}_{(s)}^{\alpha}-\frac{\delta H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{c}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}} \qquad (4\text{-}4\text{-}30)$$

$H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{c}}$为 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$相应的正则 Hamilton 量．设变换式(4-4-26)的 Jacobi 行列式为 $J[\varphi,\ \pi,\ \varepsilon]$，在式(4-4-26)变换下，生成泛函式(4-4-24)是不变的，这表明 $\left.\frac{\delta Z}{\delta\varepsilon_{(x)}^{\sigma}}\right|_{\varepsilon^{\sigma}(x)=0}=0$．由式(4-4-24)和式(4-4-28)得正则形式的 Ward 恒等式，即

$$[J_{\sigma}^{0}+\widetilde{S}_{(s)\sigma}^{\alpha}\left(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right)-\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left(\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right)+\widetilde{S}_{(s)\sigma}^{\alpha}J_{\alpha}^{(s)}-$$

$$\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}(\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}J_{\alpha}^{(s)})+\widetilde{T}_{\alpha\sigma}^{(s)}\left[\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}-\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left(\frac{\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)\right]+$$

$$\widetilde{T}^{(s)}_{\alpha\sigma}K^{\alpha}_{(s)} - \widetilde{R}^{\mu}_{\sigma}(\pi^{(s)}_{\alpha,\mu}K^{\alpha}_{(s)})]_{\substack{\varphi^{\alpha}_{(s)} \to \frac{i\delta}{\delta J^{(s)}_{\alpha}} \\ \pi^{(s)}_{\alpha} \to \frac{i\delta}{\delta K^{\alpha}_{(s)}}}} Z[J,K] = 0 \tag{4-4-31}$$

其中 $J^0_\sigma = \left.\dfrac{-i\delta \overline{J}[\varphi,\pi,\epsilon]}{\delta\epsilon^\sigma}\right|_{\epsilon^\sigma=0}$, $\widetilde{R}^{\mu}_{\sigma}$, $\widetilde{S}^{\alpha}_{(s)\sigma}$ 和 $\widetilde{T}^{(s)}_{\alpha\sigma}$ 分别为R^{μ}_{σ},$S^{\alpha}_{(s)\sigma}$ 和 $T^{(s)}_{\alpha\sigma}$ 的伴随算符. 在得到式(4-4-31)时，用了 $\overline{J}[\varphi, \pi, 0]=1$. 将式(4-4-31)对外源求多次泛函微商，然后让外源为零，可进一步得到多种正则形式的 Ward 恒等式.

例如，考虑相空间中的无穷小平移变换

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{\alpha\prime}{}_{(s)}(x) &= \varphi^{\alpha}_{(s)}(x) + \varepsilon^{\alpha}_{(s)1}(x) \\ \pi^{(s)\prime}{}_{\alpha}(x) &= \pi^{(s)}_{\alpha}(x) + \varepsilon^{(s)}_{\alpha 2}(x) \end{aligned}\right\} \tag{4-4-32}$$

此变换的 Jacobi 行列式为 1. 在式(4-4-32)变换下，生成泛函式(4-4-24)是不变的，从而分别有

$$\int \mathscr{D}\varphi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\left(\frac{\delta I^{p}_{\text{eff}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}} + J^{(s)}_{\alpha}\right)\exp\left\{iI^{p}_{\text{eff}} + i\int d^4x(J^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s)} + K^{\alpha}_{(s)}\pi^{(s)}_{\alpha})\right\} = 0 \tag{4-4-33a}$$

$$\int \mathscr{D}\varphi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\left(\frac{\delta I^{p}_{\text{eff}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}} + K^{(s)}_{\alpha}\right)\exp\left\{iI^{p}_{\text{eff}} + i\int d^4x(J^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s)} + K^{\alpha}_{(s)}\pi^{(s)}_{\alpha})\right\} = 0 \tag{4-4-33b}$$

让 $J^{(s)}_{\alpha} = K^{\alpha}_{(s)} = 0$，由式(4-4-33)得

$$\left.\begin{aligned} \langle 0 \mid T^{*}(\delta I^{p}_{\text{eff}}/\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}) \mid 0\rangle &= 0 \\ \langle 0 \mid T^{*}(\delta I^{p}_{\text{eff}}/\delta\pi^{(s)}_{\alpha}) \mid 0\rangle &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-4-34}$$

其中 T^* 为一种特殊的编时乘积. 对式(4-4-33a)关于 $J^{(s)}_{\alpha}$ 求 n 次泛函微商。然后让 t_1, t_2, …, $t_m \to +\infty$; t_{m+1}, t_{m+2}, …, $t_n \to -\infty$，得

$$\langle \text{out}, m \left| \left(\frac{\delta I^{p}_{\text{eff}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}}\right) \right| n-m, \text{in}\rangle = 0 \tag{4-4-35}$$

由于 m 和 n 是任意的，由式(4-4-35)可得

$$\dot{\pi}^{(s)}_{\alpha}(x) = -\frac{\delta H^{c}_{\text{eff}}}{\delta\varphi^{\alpha}_{(s)}(x)} \tag{4-4-36a}$$

类似地，由式(4-4-33b)可得

$$\dot{\varphi}^{\alpha}_{(s)}(x) = \frac{\delta H^{c}_{\text{eff}}}{\delta\pi^{\alpha}_{(s)}(x)} \tag{4-4-36b}$$

式(4-4-36)为约束 Hamilton 系统的量子正则方程.

在约束 Hamilton 的经典理论中，Dirac 曾猜想所有第一类约束均是规

范变换的生成元．长期以来对这猜想的有效性，一直存在着争议，高阶微商理论也有类似的问题[12,13]．如果 Dirac 猜想成立，系统的经典正则方程应该由扩展 Hamilton 量 H_E 导出，H_E 中包含了所有第一类(初级和次级)约束．而在约束 Hamilton 的量子理论中，其正则方程应由式(4-4-36)式给出，H_{eff}^c中不仅包含了所有约束(可以是第二类约束)，而且还包含了规范条件，这与经典理论是完全不同的．在量子理论中，基本的是生成泛函，而不是经典运动方程．

4-4-3 高阶微商系统规范不变有质量矢量场

理论规范不变的要求，通常规范场为无质量的．现讨论一种有质量规范场．考虑有质量矢量场和标量场的二阶微商 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-c^2\,\partial_\lambda F^{\alpha\lambda}\,\partial_\rho F_\alpha^\rho+\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi-mB_\mu)(\partial^\mu\varphi-mB^\mu) \tag{4-4-37a}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu \tag{4-4-37b}$$

式中：c 和 m 均为常数．由式(4-4-2)和式(4-4-37)导出的 EL 方程为

$$(1-2c^2\Box)\Box B_\mu-\partial_\mu[(1-2c^2\Box)\,\partial^\nu B_\nu]-m^2B_\mu+m\,\partial_\mu\varphi=0 \tag{4-4-38}$$

场 $\varphi(x)$，$B^\mu(x)=B^\mu_{(0)}(x)$和 $\dot{B}^\mu(x)=B^\mu_{(1)}(x)$的正则动量分别为

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)}=-mB^0(x)+\dot{\varphi}(x) \tag{4-4-39}$$

$$\pi_\mu=-F_{0\mu}-2c^2(\partial_k\,\partial_\lambda F^{0\lambda}\delta_\mu^k-\partial_0\,\partial_\lambda F_\mu^\lambda) \tag{4-4-40}$$

$$\pi_\mu^{(1)}=2c^2(\partial_\lambda F^{0\lambda}\delta_\mu^0-\partial_\lambda F_\mu^\lambda) \tag{4-4-41}$$

正则 Hamilton 量为

$$\begin{aligned}H_c=\int d^3x\mathscr{H}_c=\int d^3x\Big[&\pi_\mu B^\mu_{(1)}-\frac{1}{4c^2}(\pi_i^{(1)})^2+\pi_i\,\partial_kF^{ik}+\\&\pi_i^{(1)}\,\partial^iB^0_{(1)}+\frac{1}{2}(B_{(1)i}-\partial_iB_0)(B^i_{(1)}-\partial^iB_0)-\\&c^2(\partial_iB^i_{(1)}-\partial_i\,\partial^iB_0)(\partial_kB^k_{(1)}-\partial_k\,\partial^kB_0)+\\&\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}+\frac{1}{2}m^2B_iB^i+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi-\\&mB_i\,\partial^i\varphi-(\partial^i\pi_i+m\pi)B^0\Big]\end{aligned} \tag{4-4-42}$$

初级约束为

$$\Phi^0 = \pi_0^{(1)} \approx 0 \tag{4-4-43}$$

由约束的自洽性条件，有下列次级约束：

$$\Phi^1 = \{\Phi^0, H_T\} = \partial^i \pi_i^{(1)} - \pi_0 \approx 0 \tag{4-4-44}$$

$$\Phi^2 = \{\Phi^1, H_T\} = \partial^i \pi_i + m\pi \approx 0 \tag{4-4-45}$$

所有约束 $\Phi^k(k=0, 1, 2)$ 均为第一类约束. 由它们构成的规范变换生成元为

$$G = \int d^3x[\pi_\mu \partial^\mu \varepsilon(x) + m\pi\varepsilon(x) + \pi_\mu^{(1)} \partial_0 \partial^\mu \varepsilon(x)] \tag{4-4-46}$$

由 G 导致的规范变换为

$$\left.\begin{aligned} &\delta B^\mu = \{B^\mu, G\} = \partial^\mu \varepsilon(x), \quad \delta B_{(1)}^\mu = \partial_0 \partial^\mu \varepsilon(x) \\ &\delta\varphi = m\varepsilon(x), \quad \delta\pi = \delta\pi_\mu = \delta\pi_\mu^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-4-47}$$

在这个规范变换下，式(4-4-37a)是不变的.

采用路径积分量子化，对第一类约束须选取相应的规范条件. 由式(4-4-38)的 0 分量，有

$$B_0 = [(1-2c^2\Box)\nabla^2 + m^2]^{-1} \partial_0 [(1-2c^2\Box)\nabla \cdot \boldsymbol{B} - m\varphi] \tag{4-4-48}$$

取广义 Coulomb 规范条件

$$(1-2c^2\Box)\nabla \cdot \boldsymbol{B} - m\varphi = 0 \tag{4-4-49}$$

条件式(4-4-49)随时间的稳定性，相应于 $B_0(x)=0$，对 $B_0(x)$ 的稳定性要求，有 $\dot{B}_0(x)=0$. 这样就有如下 3 个规范条件：

$$\Omega_1 = B_{(1)}^0 \approx 0 \tag{4-4-50}$$

$$\Omega_2 = (1-2c^2\Box)\nabla \cdot \boldsymbol{B} - m\varphi \approx 0 \tag{4-4-51}$$

$$\Omega_3 = B^0 \approx 0 \tag{4-4-52}$$

全部约束和规范条件一起记为 $\Phi = \{\Phi_l\} = \{\Phi_k(k=0,1,2), \Omega_i(i=1,2,3)\}$，它们成为了第二类约束，且有如下 Poisson 括号：

$$\{\Omega_1(x), \Phi^1(y)\} = \delta^{(3)}(x-y) \tag{4-4-53}$$

$$\{\Omega_2(x), \Phi^2(y)\} = [(1-2c^2\nabla^2)\nabla^2 - m]\delta^{(3)}(x-y) \tag{4-4-54}$$

$$\{\Omega_3(x), \Phi^0(y)\} = \delta^{(3)}(x-y) \tag{4-4-55}$$

由此可见，$\det|\{\Phi_l, \Phi_m\}|$ 与场量无关. 这个行列式可以从生成泛函式(4-4-21)中略去. 由式(4-4-37)描述的系统，其 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] = \int \mathcal{D}B^\mu \mathcal{D}B_{(1)}^\mu \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\pi_\mu \mathcal{D}\pi_\mu^{(1)} \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\lambda_k \mathcal{D}\mu^m \cdot \exp\left\{ i\int d^4x (\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_\mu B^\mu + J.\varphi + \xi^k \lambda_k + \xi_m \mu^m) \right\} \tag{4-4-56}$$

这里仅对场量(包括乘子场)B^μ，φ，λ_k 和 μ^m 引入了外源 J_μ，J，ξ^k 和 ξ_m，而

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \pi_\mu \dot{B}^\mu + \pi_\mu^{(1)} \dot{B}_{(1)}^\mu + \pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_\text{c} + \lambda_k \Phi^k + \mu^m \Omega_m \tag{4-4-57}$$

系统的正则作用量和生成泛函式(4-4-56)在式(4-4-47)变换下是不变的，变换式(4-4-47)的 Jacobi 行列式为 1. 此时正则形式的 Ward 恒等式(4-4-31)成为

$$\Big[-\partial_0 \frac{\delta}{\delta\xi_1} + [\nabla^2(1-2c^2\Box) - m^2]\frac{\delta}{\delta\xi_2} - \partial_0\frac{\delta}{\delta\xi_3} - \partial^\mu J_\mu + mJ\Big] Z[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] = 0 \tag{4-4-58}$$

令 $Z[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] = \exp\{\mathrm{i}W[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m]\}$，并由泛函 Legendre 变换引入正规顶角的生成泛函，即

$$\Gamma[B^\mu, \varphi, \lambda, \mu] = W[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] - \int \mathrm{d}^4x (J_\mu B^\mu + J\varphi + \xi^k\lambda_k + \xi_m\mu^m) \tag{4-4-59}$$

$$\delta W/\delta J_\mu(x) = B^\mu(x),\quad \delta\Gamma/\delta B^\mu(x) = -J_\mu(x) \tag{4-4-60a}$$

$$\delta W/\delta J(x) = \varphi(x),\quad \delta\Gamma/\delta\varphi(x) = -J(x) \tag{4-4-60b}$$

$$\delta W/\delta\xi^k(x) = \lambda_k(x),\quad \delta\Gamma/\delta\lambda_k(x) = -\xi^k(x) \tag{4-4-60c}$$

$$\delta W/\delta\xi_m(x) = \mu^m(x),\quad \delta\Gamma/\delta\mu^m(x) = -\xi_m(x) \tag{4-4-60d}$$

由此 Ward 恒等式(4-4-58)化为

$$\partial_0\mu_1(x) - \nabla^2(1-2c^2\Box - m^2)\mu_2 + \partial_0\mu_3(x) + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu(x)} - m\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = 0 \tag{4-4-61}$$

将式(4-4-61)分别对 $\varphi(x_2)$ 或 $B^\nu(x_2)$ 求泛函微商，然后让所有场(包括乘子场)为零，即 $B_\mu=\varphi=\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，分别得

$$\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} = \frac{1}{m}\partial_{x_1}^\mu\frac{\delta^2\Gamma}{\delta B^\mu(x_1)\delta\varphi(x_2)} \tag{4-4-62}$$

$$\partial_{x_1}^\mu\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta B^\mu(x_1)\delta B^\nu(x_2)} = m\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta B^\nu(x_2)} \tag{4-4-63}$$

式(4-4-62)和式(4-4-63)分别给出了 $\varphi(x)$ 场和 $B^\mu(x)$ 场传播子所适合的关系式. 将式(4-4-61)分别关于 $B^\nu(x_2)$ 和 $\varphi(x_3)$ 求泛函微商，然后让所有场为零，得

$$\partial_{x_1}^\mu\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta B^\mu(x_1)\delta B^\nu(x_2)\delta\varphi(x_3)} = m\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta B^\nu(x_2)\delta\varphi(x_3)} \tag{4-4-64}$$

式(4-4-64)给出了场的 3 点正规顶角应适合的关系式. 将式(4-4-61)对场多次求泛函数商，可得到正规角间更多的关系. 由正则形式 Ward 恒等式导出正规顶角间的关系，其突出优点在于，对相空间中生成泛函可以不事先作出对动量的路径积分.

当 $\det|\{\Phi_l,\Phi_m\}|$ 与场量有关时，这时只需寻找保持 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 不变的定域或非定域变换，在该变换下由正则 Ward 恒等式，仍可导致正规顶角所适合的关系.

4-5 高阶微商系统非定域变换的广义 Ward 恒等式

场论中的高阶微商理论，可改善 Feynman 图的收敛性，受到人们的关注. Ward 恒等式在量子场论中占重要地位，它是证明理论可重整化的工具；由它可导出诸 Green 函数间的关系. Ward 恒等式已有各种推广. 在从路径积分导出 Ward 恒等式的讨论中，通常是基于位形空间路径积分，这只适用于相空间路径积分对正则动量可积的情形（对含复杂约束的奇异 Lagrange 量系统，往往很难或根本无法作出该积分）. 相空间路径积分更基本，它适用于一般情形，因此，从相空间路径积分出发研究系统的对称性具有更普遍的意义. 在上一章中讨论了一阶微商系统，这里研究高阶微商系统.

本节基于相空间生成泛函，建立了高阶微商奇异 Lagrange 量系统在定域和非定域变换下的广义正则 Ward 恒等式. 对规范不变系统导出了位形空间中定域和非定域以及整体变换下的广义 Ward 恒等式. 用于高阶微商非 Abel CS 理论，无须作出对正则动量的路径积分，就可以导出正规顶角的一些关系，给出 BRS 变换下的 Ward-Takahashi 恒等式.

4-5-1 非定域广义正则 Ward 恒等式

设场 $\varphi^{\alpha}(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 的运动由含高阶微商奇异 Lagrange 量 $L[\varphi^{\alpha}_{(0)},\varphi^{\alpha}_{(1)},\varphi^{\alpha}_{(2)},\cdots]=\int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu},\varphi^{\alpha}_{,\mu\nu},\cdots)$ 来描述. 由 Ostrogradsky 变换过渡到 Hamilton 描述时，$\varphi^{\alpha}_{(s)}$ 的正则动量记为 $\pi^{(s)}_{\alpha}$. 该系统的正则变量 $\varphi^{\alpha}_{(s)},\pi^{(s)}_{\alpha}$ 在相空间中存在固有约束，则该系统称为广义约束 Hamilton 系统. 设 $\Lambda_k(\varphi^{\alpha}_{(s)},\pi^{(s)}_{\alpha})\approx 0(k=1,2,\cdots,K_1)$ 为系统的第一类约束，$\theta_i(\varphi^{\alpha}_{(s)},\pi^{(s)}_{\alpha})\approx 0(i=1,2,\cdots,I_1)$ 为第二类约束，按 FS 路径积分量子化方案，该系统 Green 函数的相空间的生成泛函为

$$Z[j_\alpha]=\int \mathscr{D}\varphi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\delta(\Phi)\sqrt{\det\{\Phi,\Phi\}}\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+j_\alpha\varphi^{\alpha})\right\} \tag{4-5-1}$$

式中：$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$，$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为正则 Hamilton 量密度. 对第二类约束系统，$\{\Phi\}$ 代表所有第二类约束；对第一类约束系统，$\{\Phi\}$ 代表所有约束和规范条件

的总体. $\{\cdot,\cdot\}$代表广义 Poisson 括号，j_a 为 φ^a 的外源. 利用 δ-函数和 Grassmann 变量 $\overline{C}_l(x)$和 $C_k(x)$的积分性质，可将式(4-5-1)化为

$$Z[j_a,\eta_m,\xi_k,\bar{\xi}_l]=\int\mathscr{D}\varphi^a_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\mathscr{D}\lambda_m\mathscr{D}\overline{C}_k\mathscr{D}C_l\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+j_a\varphi^a)\right\} \tag{4-5-2}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\lambda_m\Phi_m+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4y\,\overline{C}^k(x)\{\Phi_k(x),\Phi_l(y)\}C_l(y) \tag{4-5-3}$$

而 $\lambda_m(x)$为乘子场，为简单起见，记 $\varphi^a_{(s)}=(\varphi^a_{(s)},\lambda_m,\overline{C}_k,C_l)$，$J=(j_a,\eta_m,\xi_k,\xi_l)$，其中 η_m，ξ_k 和 $\bar{\xi}_l$ 分别为 λ_m，$\overline{C}_k$ 和 C_l 的外源. 这样式(4-5-2)可写为

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\varphi^a_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J\varphi)\right\} \tag{4-5-4}$$

定域规范不变性在场论中具有基本的意义，规范场论和共形场论中也讨论了非定域变换. 考虑增广相空间中的定域和非定域无穷小变换(省略 α 指标)

$$\left.\begin{aligned}
&x^{\mu\prime}=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\
&\varphi'_{(s)}(x')=\varphi_{(s)}(x)+\Delta\varphi_{(s)}(x)=\\
&\qquad\varphi_{(s)}(x)+A_{s\sigma}\varepsilon^\sigma(x)+\int\mathrm{d}^4yE(x,y)B_{s\sigma}(y)\varepsilon^\sigma(y)\\
&\pi^{(s)\prime}(x')=\pi^{(s)}(x)+\Delta\pi^{(s)}(x)=\\
&\qquad\pi^{(s)}(x)+U^s_\sigma\varepsilon^\sigma(x)+\int\mathrm{d}^4yF(x,y)V^s_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)
\end{aligned}\right\} \tag{4-5-5}$$

式中：$E(x,y)$和 $F(x,y)$为给定函数；R^μ_σ，$A_{s\sigma}$，$B_{s\sigma}$，U^s_σ 和 V^s_σ 为线性微分算符；$\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意函数，它们及其微商的值在时空区域的边界上为零. 在式(4-5-5)变换下，有效正则作用量的变更为[14]

$$\Delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\Delta\int\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}\mathrm{d}^4x=\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi_{(s)}}\delta\varphi_{(s)}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}}\delta\pi^{(s)}+\mathrm{D}(\pi^{(s)}\delta\varphi_{(s)})+\partial_\mu[(\pi^{(s)}\varphi_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\Delta x^\mu)]\right\} \tag{4-5-6}$$

设式(4-5-5)正则变量变换的 Jacobi 行列式记为 $\overline{J}[\varphi_{(s)},\pi^{(s)},\varepsilon]$. 生成泛函式(4-5-4)在式(4-5-5)变换下的不变性，表明$\dfrac{\delta Z}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}=0$. 将式(4-5-5)、式(4-5-6)代入式(4-5-4)，并对相应的项进行分部积分，由 $\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，表面项积分为零；然后将生成泛函关于 $\varepsilon^\sigma(x)$求泛函微商，得

$$\left(J^0_\sigma+\widetilde{A}_{s\sigma}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi_{(s)}(x)}\right)+\widetilde{U}^s_\sigma\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}(x)}\right)-\widetilde{R}^\mu_\sigma\left[\varphi_{(s),\mu}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi_{(s)}(x)}\right)+\right.\right.$$

$$
\varphi_{,\mu}J+\pi^{(s)}_{,\mu}\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}(x)}\right)\Big]+\int \mathrm{d}^4y\Big\{\widetilde{B}_{s\sigma}\Big[E(y,x)\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi_{(s)}(y)}\right)+
$$

$$
\mathrm{D}(\pi^{(s)}(y)E(y,x))\Big]+\widetilde{B}_{s\sigma}[E(y,x)J(y)]+
$$

$$
\widetilde{V}^{s}_{\sigma}\Big[F(y,x)\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi^{(s)}(y)}\right)\Big]\Big\}\Big)_{\varphi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}}Z[J]=0 \qquad (4\text{-}5\text{-}7)
$$

其中 $J^0_\sigma=-\frac{\mathrm{i}\delta\overline{J}}{\delta\varepsilon^\sigma(x)}|_{\varepsilon^\sigma=0}$. 当变换的 Jacobi 行列式不依赖于 $\varepsilon^\sigma(x)$时, $J^0_\sigma=0$, 而 $\widetilde{A}_{s\sigma}$, $\widetilde{B}_{s\sigma}$, $\widetilde{R}^\mu_\sigma$, $\widetilde{U}^s_\sigma$ 和 $\widetilde{V}^s_\sigma$ 分别为 $A_{s\sigma}$, $B_{s\sigma}$, R^μ_σ, U^s_σ 和 V^s_σ 的伴随算符时, 式(4-5-7)称为高阶微商奇异 Lagrange 量系统在定域和非定域变换下的广义正则 Ward 恒等式. 当式(4-5-5)中 $E=F=0$ 时, 式(4-5-7)可化为定域变换下的广义正则 Ward 恒等式. 将式(4-5-7)对外源 J 多次求泛函微商可得其他的广义 Ward 恒等式, 从而得诸 Green 函数的关系. 这样导出结果的优点在于, 无须作出生成泛函中对正则动量的路径积分.

4-5-2 规范不变系统

高阶微商定域(规范)变换下不变系统, 为广义约束 Hamilton 系统. 该系统的量子化, 也可以用 FP 技巧通过路径(泛函)积分变换得到, 其有效 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\mathrm{f}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$, $\mathscr{L}$ 为原始 Lagrange 量密度, $\mathscr{L}_{\mathrm{f}}$ 为规范固定项, $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$为鬼粒子项, 位形空间生成泛函为[1]

$$
Z[J]=\int\mathscr{D}\varphi\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J\varphi)\right\} \qquad (4\text{-}5\text{-}8)
$$

式中: φ 代表所有场量, J 为相应的外源.

考虑无穷小定域和非定域变换:

$$
\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\
\varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+A_\sigma\varepsilon^\sigma(x)+\\
&\quad\int\mathrm{d}^3yE(x,y)B_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}5\text{-}9)
$$

式中: R^μ_σ, A_σ 和 B_σ 为线性微分算符; $\varepsilon^\sigma(x)$为任意函数, 在区域边界上为零(包括各级微商). 在式(4-5-9)变换下, 有效作用量 I_{eff}的变更为[14](将 I_{eff}简记为 I, $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$记为 $\mathscr{L}$)

$$
\delta I=\int\mathrm{d}^4x\Big\{\frac{\delta I}{\delta\varphi}\Big[(A_\sigma-\varphi_{,\mu}R^\mu_\sigma)\varepsilon^\sigma(x)+\int\mathrm{d}^4yE(x,y)B_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\Big]+
$$

$$
\partial_\mu\Big[j^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)+\sum_{m=0}^{N-1}\Pi^{\mu\nu(m)}\partial_{\nu(m)}\int\mathrm{d}^4yE(x,y)B_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\Big]\Big\} \qquad (4\text{-}5\text{-}10\mathrm{a})
$$

式中

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi} = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \partial_{\mu(m)} \mathscr{L}^{\mu(m)} \tag{4-5-10b}$$

$$\mathscr{L}^{\mu(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{\mu(m)\text{的} \\ \text{所有排列}}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{,\mu(m)}} \tag{4-5-10c}$$

$$\Pi^{\mu\nu(m)} = \sum_{l=0}^{N-(m+1)} (-1)^l \partial_{\lambda(l)} \mathscr{L}^{\mu\nu(m)\lambda(l)} \tag{4-5-10d}$$

$$j_\sigma^\mu = \mathscr{L}_{\text{eff}} R_\sigma^\mu + \sum_{m=0}^{N-1} \Pi^{\mu\nu(m)} \partial_{\nu(m)} (A_\sigma - \varphi_{,\rho} R_\sigma^\rho) \tag{4-5-10e}$$

式(4-5-10a)中对$\partial_\mu(j_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma(x))$的积分化为表面项后为零.将剩下的有关项分部积分,由$\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件,相应的表面项积分为零.将式(4-5-9)和式(4-5-10)代入式(4-5-8),设式(4-5-9)变换的 Jacobi 行列式为 1,生成泛函式(4-5-8)在式(4-5-9)变换下的不变性,表明$\frac{\delta Z[J]}{\delta \varepsilon^\sigma(x)}\Big|_{\varepsilon^\sigma(x)=0}=0$,于是得

$$\left\{\widetilde{A}_\sigma\left(\frac{\delta I}{\delta \varphi}+J\right)+\widetilde{R}_\sigma^\mu\left[\varphi_{,\mu}\left(\frac{\delta I}{\delta \varphi}+J\right)\right]+\int \mathrm{d}^4 y \widetilde{B}_\sigma\left[E(y,x)\frac{\delta I}{\delta \varphi}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\partial_\mu\left(\sum_{m=0}^{N-1} \Pi^{\mu\nu(m)} \partial_{\nu(m)} E(y,x)\right)+J\right]\right\} Z[J]=0 \tag{4-5-11}$$

式中:$\widetilde{A}_\sigma$,$\widetilde{R}_\sigma^\mu$ 和 $\widetilde{B}_\sigma$ 分别为 A_σ,R_σ^μ 和 B_σ 的伴随算符.式(4-5-11)为高阶微商规范不变系统的生成泛函式(4-5-8)在定域和非定域变换下满足的广义 Ward 恒等式.

现讨论无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\varphi_{,\mu},\varphi_{,\mu\nu}\cdots) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \\ &\quad \varphi(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{\mu\sigma}(x,\varphi,\varphi_{,\mu},\varphi_{,\mu\nu}\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{4-5-12}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为无穷小任意参数,$\tau^{\mu\sigma}$和$\xi^\sigma$ 为$x,\varphi,\varphi_{,\mu},\cdots$的函数.假设有效作用量在式(4-5-12)变换下不变,且变换的 Jacobi 行列式为 1,生成泛函式(4-5-8)在式(4-5-12)变换下的不变性,有

$$Z[J]=\int \mathscr{D}\varphi\left\{1+\varepsilon_\sigma \int \mathrm{d}^4 x\left[J(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_\mu(J\varphi\tau^{\mu\sigma})\right]\right\}Z[J]=$$
$$\left\{1+\varepsilon_\sigma \int \mathrm{d}^4 x\left[J\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu \frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\partial_\mu\left(\tau^{\mu\sigma}J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)\right]\right\}_{\varphi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}} Z[J] \tag{4-5-13}$$

从而生成泛函式(4-5-8)满足如下广义 Ward 恒等式

$$\int \mathrm{d}^4 x\left[J\left(\xi^\sigma-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)+\partial_\mu\left(\tau^{\mu\sigma}J\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\right)\right]_{\varphi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}} Z[J]=0 \tag{4-5-14}$$

将式(4-5-14)关于外源 J 求泛函微商,然后让外源为零,可得 Green 函数间的若干关系式.

4-5-3 高阶微商非 Abel CS 旋量场

CS 理论在量子 Hall 效应等方面有直接应用. (2+1)维非 Abel CS 项与物质场耦合的 Lagrange 量密度为[15]

$$\mathscr{L}=-\frac{c^2}{4\pi}\mathrm{D}_\rho F^a_{\mu\nu}\mathrm{D}^\rho F^{a\mu\nu}-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\partial_\mu A^a_\nu A^a_\rho+\frac{1}{3}f^a_{bc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho\Big)+\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\mathrm{D}_\mu\psi \tag{4-5-15}$$

式中:D_μ 为协变微商,f^a_{bc} 为群的结构常数,γ^μ 为 Dirac γ-矩阵. 场量 $A^a_\mu,\dot{A}^a_\mu\equiv B^a_\mu$, ψ 和 $\bar{\psi}$ 的正则动量分别记为 $P^\mu_a,Q^\mu_a,\bar{\pi}$ 和 π. 如式(5-5-15)所示 Lagrange 量是奇异的,由前面类似的讨论可知此约束 Hamilton 系统的相空间生成泛函为

$$Z[J,\bar{\xi},\xi]=\int\mathscr{D}u\,\delta(\Omega^a_i)\exp\Big\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\big(\mathscr{L}^\mathrm{p}+\lambda^a_i\Lambda^a_i+\bar{\lambda}\theta+\bar{\theta}\lambda-\partial^\mu\bar{C}^a\mathrm{D}^a_{\mu b}C^b+J^\mu_aA^a_\mu+\bar{J}\psi+\bar{\psi}J+\bar{\xi}^aC^a+\bar{C}^a\xi^a\big)\Big\} \tag{4-5-16}$$

式中: $u=(A^a_\mu,B^a_\mu,\psi,\bar{\psi},P^\mu_a,Q^\mu_a,\bar{\pi},\pi,\lambda,\bar{\lambda},C^a,\bar{C}^a)$, $\mathscr{L}^\mathrm{p}=\dot{A}^a_\mu P^\mu_a+\dot{B}^a_\mu Q^\mu_a+\dot{\bar{\psi}}\pi+\bar{\pi}\dot{\psi}-\mathscr{H}_c$, $\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 密度, $\theta\approx0$ 和 $\bar{\theta}\approx0$ 为第二类约束, $\Lambda^a_i\approx0(i=1,2,3)$为第一类约束, $\Omega^a_i\approx0(i=1,2,3)$为规范条件. 这里仅对场量 $A^a_\mu,\psi,\bar{\psi},C^a$, $\bar{C}^a$ 引入了外源.

在量子水平上, I^p 和 $\mathscr{L}_\mathrm{gh}$ 在下列变换下不变[16]

$$\left.\begin{aligned}&A^{a'}_\mu(x)=A^a_\mu(x)+\mathrm{D}^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x),B^{a'}_\mu(x)=B^a_\mu(x)+\partial_0\mathrm{D}^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x)\\&C^{a\prime}(x)=C^a(x)+\mathrm{i}(T_\sigma)^a_bC^b(x)\varepsilon^\sigma(x)\\&\bar{C}^{a\prime}(x)=\bar{C}^a(x)-\mathrm{i}\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x)+\frac{\mathrm{i}}{\Box}\partial_\mu[\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\partial^\mu\varepsilon^\sigma(x)]\\&\psi'(x)=\psi(x)-\mathrm{i}(T_\sigma)\psi(x)\varepsilon^\sigma(x),\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)+\mathrm{i}\bar{\psi}(x)(T_\sigma)\varepsilon^\sigma(x)\end{aligned}\right\} \tag{4-5-17}$$

正则动量作相应的变换,其中 $T_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为规范群的生成元. 在式(4-5-17)变换下,设 $\delta(\mathscr{L}_\mathrm{gh}+\mathscr{L}_m)=F_\sigma(u,\lambda)\varepsilon^\sigma(x)$,生成泛函式(4-5-16)在式(4-5-17)变换下的不变性,有如下广义 Ward 恒等式

$$\Big\{J^0_\sigma+\mathrm{i}F_\sigma-\mathrm{i}\partial_\mu J^\mu_\sigma+f^a_{\sigma c}J^\mu_a\frac{\delta}{\delta J^\mu_c}+\mathrm{i}\bar{J}_\alpha(T_\sigma)^\alpha_\beta\frac{\delta}{\delta\bar{J}_\beta}-\mathrm{i}J_\alpha(T_\sigma)^\alpha_\beta\frac{\delta}{\delta J_\beta}+\mathrm{i}\bar{\xi}_a(T_\sigma)^a_b\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_b}-\mathrm{i}\xi_a(T_\sigma)^a_b\frac{\delta}{\delta\xi_b}+\mathrm{i}\partial^\mu\Big[\partial_\mu\Big(\xi_a\frac{1}{\Box}\Big)(T_\sigma)^a_b\frac{\delta}{\delta\xi_b}\Big]\Big\}Z[J,\bar{\xi},\xi]=0 \tag{4-5-18}$$

令 $Z[J,\bar{\xi},\xi]=\exp\{iW[J,\bar{\xi},\xi]\}$，通过泛函 Legendre 变换，引入正规顶角的生成泛函

$$\Gamma[A^a_\mu,\psi,\bar{\psi},C^a,\bar{C}^a] = W[J^\mu_a,\bar{J},J,\bar{\xi},\xi] - \int d^3x(J^\mu_a A^a_\mu + \bar{J}\psi + \bar{\psi}J + \bar{\xi}_a C^a + \bar{C}^a\xi_a)$$

于是式(4-5-18)化为

$$J^0_\sigma + iF_\sigma + i\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\sigma_\mu} - if^a_{\sigma c}A^c_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu} - i(T_\sigma)^a_\beta\psi_\beta \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^\beta} + i(T_\sigma)^a_\beta\bar{\psi}_\beta \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}^\beta} - iC^a(T_\sigma)^a_b \frac{\delta\Gamma}{\delta C^b} + i\bar{C}^a(T_\sigma)^a_b \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{C}^b} - i\partial^\mu\left[\partial_\mu\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{C}^a}\frac{1}{\square}\right)(T_\sigma)^a_b\bar{C}^b\right] = 0 \tag{4-5-19}$$

将式(4-5-19)关于 $\psi_\lambda(x_2)$ 和 $\bar{\psi}_\rho(x_3)$ 求泛函微商，然后让所有场为零，即 $A^a_\mu=\psi=\bar{\psi}=C^a=\bar{C}^a=\lambda=0$. 由于 J^0_σ 与场量无关[16]，于是得

$$\partial^\mu_{x_1} \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}_\rho(x_3)\delta\psi_\lambda(x_2)\delta A^\mu_\sigma(x_1)} = \delta(x_1-x_2)(T_\sigma)^a_\lambda \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}_\rho(x_3)\delta\psi_a(x_1)} - \delta(x_1-x_3)(T_\sigma)^a_\rho \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi_\lambda(x_2)\delta\bar{\psi}_a(x_1)} \tag{4-5-20}$$

将式(4-5-19)关于 $\bar{C}^k(x_2)$ 和 $C^m(x_3)$ 求泛函微商，然后让所有场为零，得

$$\partial^\mu_{x_1} \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{C}^k(x_2)\delta C^m(x_3)\delta A^\mu_\sigma(x_1)} + \delta(x_1-x_2)(T_\sigma)^b_k \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{C}^b(x_1)\delta C^m(x_3)} - \delta(x_1-x_3)(T_\sigma)^b_m \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{C}^k(x_2)\delta C^b(x_1)} - \partial^\mu\left[\partial_\mu\left(\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{C}^a(x_1)\delta C^m(x_3)}\frac{1}{\square}\right)(T_\sigma)^a_k\delta(x_1-x_2)\right] = 0 \tag{4-5-21}$$

这里导出正规顶角的 Ward 恒等式与传统方法不同的显著优点在于，不需要作出相空间路径积分中对正则动量的积分. 对约束结构复杂的系统，作出该积分是很困难的，甚至是不可能的. 此外变换式(4-5-17)是线性(非定域)的，导出上述结果仅要求变换保持 I^P 和 $\mathscr{L}_{gh}$ 在理论中不变，这些都与 BRS 变换不同.

现在考虑位形空间中的 BRS(整体)变换

$$\left.\begin{aligned} &\delta A^a_\mu = -\tau D^a_{\mu b}C^b \\ &\delta\psi = i\tau C^b T^b\psi, \quad \delta\psi = -i\tau\bar{\psi}C^b T_b \\ &\delta C^a = \frac{1}{2}\tau f^a_{bc}C^b C^c, \quad \delta\bar{C}^a = -\partial^\mu A^a_\mu \end{aligned}\right\} \tag{4-5-22}$$

其中 τ 是 Grassmann 参量. 不难验证,$\delta(D^{\sigma}_{\mu b}C^b)=\delta(\delta\psi)=\delta(\delta\bar{\psi})=\delta(\delta C^{\sigma})=0$. 对 δA^a_μ,δC^a,$\delta\psi$ 和 $\delta\bar{\psi}$ 分别引入外源 u^μ_a,v^a,$\bar{\eta}$ 和 η,给出扩展生成泛函

$$Z[J,\bar{\xi},\xi,u,v,\bar{\eta},\eta]=\int\mathscr{D}A^a_\mu\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{C}^a\mathscr{D}C^a\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int d^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J^\mu_aA^a_\mu+\bar{J}\psi+\bar{\psi}J+\bar{\xi}_aC^a+\right.$$

$$\left.\bar{C}^a\xi_a+u^\mu_a\delta A^a_\mu+v_a\delta C^a+\bar{\eta}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\eta)\right\}\qquad(4\text{-}5\text{-}23)$$

式中:$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$是在 Lorentz 规范下用 FP 技巧得到的有效 Lagrange 量,它在式(4-5-22)变换下不变,且变换的 Jacobi 行列式为 1. 生成泛函式(4-5-23)在式(4-5-22)变换下不变,则有

$$\int\mathscr{D}A^a_\mu\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{C}^a\mathscr{D}C^a\left[\int d^3x[J^\mu_a\delta A^a_\mu+\bar{J}\delta\psi+\delta\bar{\psi}J+\bar{\xi}_a\delta C^a+\delta\bar{C}^a\xi_a]\cdot\right.$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int d^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J^\mu_aA^a_\mu+\bar{J}\psi+\bar{\psi}J+\bar{\xi}_aC^a+\bar{C}^a\xi_a+\right.$$

$$\left.u^\mu_a\delta A^a_\mu+v_a\delta C^a+\bar{\eta}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\eta)\right\}=0\qquad(4\text{-}5\text{-}24)$$

从而生成泛函式(4-5-23)满足如下广义 Ward 恒等式:

$$\int d^3x\left[\bar{J}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}+J\frac{\delta}{\delta\eta}+J^\mu_a\frac{\delta}{\delta u^\mu_a}+\bar{\xi}_a\frac{\delta}{\delta v_a}-\xi_a\partial^\mu\left(\frac{\delta}{\delta J^\mu_a}\right)\right]\cdot$$

$$Z[J,\bar{\xi},\xi,u,v,\bar{\eta},\eta]=0\qquad(4\text{-}5\text{-}25)$$

此结果也可以从生成泛函式(4-5-16)出发导出. 生成泛函和 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$在式(4-5-22)变换下的不变性,可导出量子水平的 BRS 守恒荷.

对约束 Hamilton 系统,FS 相空间路径积分量子化比直观的 FP 位形空间路径积分量子化更基本,后者仅适用于规范不变系统. 对某些场论模型,将 FS 量子化结果作出对正则动量的路径积分后,可化为 FP 量子化的结果. 这里分别用 FS 和 FP 方案导出了高阶微商奇异 Lagrange 量系统在非定域变换下的 Ward 恒等式. 用于非 Abel-CS 理论,不难验证,按 FS 和 FP 方案可导致同样结果,这表明 FP 方案对此模型也适用.

4-6 高阶微商系统正则 Ward 恒等式和 Abel 规范理论中动力学质量的产生

这里给出高阶微商系统正则 Ward 恒等式的一个应用. 动力学对称破缺在粒子物理中起着重要的作用,它提出一种不同于 Higgs 机制产生破缺的可能机理,在动力学自发破缺机理中不需要引入 Higgs 标量场,Lagrange 量只包含所要研究的场,自发破缺解存在于自己所满足的(非微扰的)方程之中. 它

包含的基本场及参数更少,因而一直引起人们的研究兴趣. 它的缺点是计算困难,因为动力学自发破缺是一个非微扰效应,不能作微扰展开. 最近,开展了包含复合场的 Ward-Takahashi(WT)恒等式的研究. 在一些模型的研究中,这种方法能够得到包括 Fermi 子和束缚态的质量谱. 在存在明显破缺的情况下,用这种方法能更方便地讨论其相结构、质量谱、PCAC 等,并将它推广到规范对称动力学破缺的情况,讨论规范玻色子获得质量的机理. 当规范对称动力学破缺时,矢量介子获得的质量与 Schwinger 机理结果一致. 由高阶微商描述的动力系统一直被广泛研究,基于相空间的路径积分,建立了高阶微商奇异 Lagrange 量系统在相空间中的正则 Ward 恒等式[17]. Lagrange 量中含高阶微商项,在量子理论中能改变费曼图的收敛性. 这里对含高阶微商项的 Cornwall-Norton 模型和含高阶微商项的 Jackiw-Johnson 模型,基于高阶微商约束理论的正则 Ward 恒等式[17],讨论高阶微商项在 Abel 规范对称理论中,动力学质量产生的影响[18].

4-6-1 含高阶微商项的 Cornwall-Norton 模型

在 Cornwall-Norton 模型中引入高阶微商项,其 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{c}{4}\partial_\rho G_{\mu\nu}\partial^\rho G^{\mu\nu} + g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + g'\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2\psi B^\mu \tag{4-6-1}$$

式中:$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,$G_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$,$c$ 为常数. 由 Ostrogradsky 变换引入正则动量,设场变量 $\bar{\psi},\psi,A_\mu,B_\mu,C_\mu=\dot{B}_\mu$ 的正则动量分别为 $\pi,\bar{\pi},\pi^\mu,P^\mu,Q^\mu$,则

$$\begin{aligned} &P^0 = -c\partial_0\partial_i G^{0i}, \quad P^i = G^{i0} + c(\nabla^2 G^{0i} + \partial_0\partial_j G^{ji}) - \partial_0 Q^i \\ &Q^0 = 0, \quad Q^i = -c\partial_0 G^{0i} \end{aligned} \tag{4-6-2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\pi = \frac{\partial_r \mathscr{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = 0, \quad \bar{\pi} = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = -\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0 \\ &\pi^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} \end{aligned}\right\} \tag{4-6-3}$$

初级约束为

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1 = \pi \approx 0, \quad \Phi_2 = \bar{\pi} + \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0 \approx 0 \\ &\Phi_3 = \pi^0 \approx 0, \quad \Phi_4 = Q^0 \approx 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-6-4}$$

正则 Hamilton 量密度为

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_c &= \bar{\pi}\dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\pi + \dot{A}_\mu\pi^\mu + C_\mu P^\mu + \dot{C}_\mu Q^\mu - \mathscr{L} = \\ &\bar{\pi}\dot{\psi} + (F_{0i} + \partial_i A_0)\pi^i + C_\mu P^\mu + \left(-\frac{1}{c}Q_i + \partial_i C^0\right)Q^i - \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\psi + \frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}G_{0i}G^{0i} + \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij} +$$

$$\frac{c}{4}\partial_i G_{jk}\partial^i G^{jk} + \frac{c}{4}\partial_0 G_{ij}\partial^0 G^{ij} + \frac{c}{2}\partial_k G_{0j}\partial^k G^{0j} +$$

$$\frac{c}{2}\partial_0 F_{0j}\partial^0 F^{0j} - g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - g'\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2\psi B_\mu =$$

$$C_\mu P^\mu - \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\psi + \frac{1}{2}\pi_i^2 - A_0\partial_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} -$$

$$\frac{1}{2c}Q_iQ^i + \partial_i C^0 Q^i + \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij} + \frac{1}{2}C_iC^i + \frac{1}{2}\partial_i B_0\partial^i B_0 -$$

$$C_i\partial^i B^0 + \frac{c}{4}\partial_i G_{jk}\partial^i G^{jk} + \frac{c}{4}\partial_0 G_{ij}\partial^0 G^{ij} +$$

$$\frac{c}{2}\partial_k G_{0j}\partial^k G^{0j} - g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - g'\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2\psi B_\mu \tag{4-6-5}$$

总 Hamilton 量为

$$H_T = H_c + \int d^3x\lambda^i\Phi_i \tag{4-6-6}$$

$\lambda^i(x)$为约束乘子. 初级约束的自洽性条件给出次级约束，即

$$\{\Phi_1, H_T\} = \{\pi, H_T\} = (\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\psi + g\gamma^\mu\psi A^\mu + g'\gamma^\mu\tau_2\psi B_\mu - \lambda_2\mathrm{i}\gamma^0 \approx 0 \tag{4-6-7a}$$

$$\{\Phi_2, H_T\} = \{\bar{\pi} + \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0, H_T\} = (\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\bar{\psi} - g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu - g'\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2 B_\mu + \lambda_1\mathrm{i}\gamma^0 \approx 0 \tag{4-6-7b}$$

可确定乘子 λ_1, λ_2

$$\lambda_1 = -\mathrm{i}\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\bar{\psi} + \mathrm{i}\gamma^0 g\gamma^\mu\bar{\psi}A^\mu + \mathrm{i}\gamma^0 g'\gamma^\mu\tau_2\psi B_\mu \tag{4-6-8a}$$

$$\lambda_2 = -\mathrm{i}\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - m_0)\psi - \mathrm{i}\gamma^0 g\psi\gamma^\mu A^\mu - \mathrm{i}\gamma^0 g'\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_2 B_\mu \tag{4-6-8b}$$

次级约束为

$$\chi_1 = \{\Phi_3, H_T\} = \{\pi^0, H_T\} = \partial_i\pi^i + g\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0 \tag{4-6-9a}$$

$$\chi'_1 = \{\Phi_4, H_T\} = \{Q^0, H_T\} = -P^0 + \partial_i Q^i \approx 0 \tag{4-6-9b}$$

$$\chi'_2 = \{\chi'_1, H_T\} = \{-P^0 + \partial_i Q^i, H_T\} = -\partial_i P^i - g'\bar{\psi}\gamma^0\tau_2\psi \approx 0 \tag{4-6-9c}$$

此外，再无约束. 第一类约束为 Φ_3, Φ_4, χ'_1，第二类约束为 $\Phi_1, \Phi_2, \chi_1, \chi'_2$. 它们不构成第二类约束的最小数目，它们的线性组合为

$$\Phi_6 = \partial_i\pi^i + \mathrm{i}g(\bar{\pi}\psi + \bar{\psi}\pi) \approx 0 \tag{4-6-10a}$$

$$\Phi_7 = -\partial_i P^i - \mathrm{i}g(\bar{\pi}\tau_2\psi + \bar{\psi}\tau_2\pi) \approx 0 \tag{4-6-10b}$$

是第一类约束. 因而第一类约束是 $R_1\equiv\Phi_3\approx0, R_2\equiv\Phi_5\approx0, R_3\equiv\Phi_4\approx0, R_4\equiv\Phi_6\approx0, R_5\equiv\Phi_7\approx0$；第二类约束是 $R_6\equiv\Phi_1\approx0, R_7\equiv\Phi_2\approx0$. 按 FS 路径积分量子化方案，相应于每一个第一类约束需取一规范条件，该条件取为

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_1=\partial_i\pi_i+\partial_i\partial_iA_0\approx0\\&\Omega_2=\partial_iA_i\approx0,\quad \Omega_3=C_0\approx0\\&\Omega_4=\partial_iC^i\approx0,\quad \Omega_5=\partial_iB^i\approx0\end{aligned}\right\}\tag{4-6-11}$$

对复合场引入外源，由 FS 量子化方案，略去与场量无关的项，则 Green 函数的相空间生成泛函为

$$\begin{aligned}Z[J]=&\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}\pi^\mu\mathscr{D}B_\mu\mathscr{D}P^\mu\mathscr{D}C_\mu\mathscr{D}Q^\mu\cdot\\&\delta(R_1)\delta(R_2)\delta(R_3)\delta(R_4)\delta(R_5)\delta(\Omega_1)\delta(\Omega_2)\delta(\Omega_3)\cdot\\&\delta(\Omega_4)\delta(\Omega_5)\delta(R_6)\delta(R_7)\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x[\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J_\mu B_\mu+\right.\\&\left.J'_\mu C^\mu+J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+\bar{\psi}\tau_a\psi K_a]\right\}\end{aligned}\tag{4-6-12}$$

其中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\bar{\pi}\dot{\psi}+\dot{\bar{\psi}}\pi+\dot{A}_\mu\pi^\mu+\dot{C}_\mu Q^\mu+C_\mu P^\mu-\mathscr{H}_c$$

利用 δ-函数的性质，式(4-6-12)可写为

$$\begin{aligned}Z[J]=&\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}\pi^\mu\mathscr{D}B_\mu\mathscr{D}P^\mu\mathscr{D}C_\mu\mathscr{D}Q^\mu\mathscr{D}\mu_k\mathscr{D}\omega_l\cdot\\&\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{P}+J_\mu B^\mu+J'_\mu C^\mu+J_\mu A^\mu+\right.\\&\left.\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+U_k\mu_k+V_l\omega_l+\bar{\psi}\tau_a\psi K_a]\right\}\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]}\end{aligned}\tag{4-6-13}$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mu_kR_k+\omega_l\Omega_l$$

在下列变换下

$$\left.\begin{aligned}&\delta\psi(x)=\mathrm{i}[\alpha(x)+\tau_2\beta(x)]\psi(x)\\&\delta\bar{\pi}(x)=-\mathrm{i}[\alpha(x)+\tau_2\beta(x)]\bar{\psi}(x)\gamma^0\\&\delta\pi(x)=0,\quad \delta\pi^\mu(x)=0\\&\delta A_\mu(x)=\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x)\\&\delta B_\mu(x)=\frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x)\\&\delta P^\mu(x)=0,\quad \delta Q^\mu(x)=0\\&\delta C_\mu(x)=\delta(\partial_0B_\mu(x))=\frac{1}{g}\partial_\mu\partial_0\beta(x)\end{aligned}\right\}\tag{4-6-14}$$

$\mathscr{L}^p$ 不变,此变换的 Jacobi 行列式为 1. 又

$$\begin{aligned}\delta(\mu_k R_k + \omega_l \Omega_l) = & \frac{1}{g}\omega_1 \nabla^2 \partial_0 \alpha(x) + \frac{1}{g}\omega_2 \nabla^2 \alpha(x) + \\ & \frac{1}{g}\omega_3 \partial_0 \partial_0 \beta(x) + \frac{1}{g}\omega_4 \nabla^2 \partial_0 \beta(x) + \\ & \frac{1}{g}\omega_5 \nabla^2 \beta(x) \end{aligned} \tag{4-6-15}$$

作泛函 Legendre 变换,引入正规顶角生成泛函 $\Gamma[\phi]$,$\Gamma[\phi]$满足的 Ward 恒等式为

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{g}\partial_0 \partial_0 \omega_3(x) - \frac{1}{g}\partial_0 \nabla^2 \omega_4(x) + \frac{1}{g}\nabla^2 \omega_5(x) + \\ & \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(x)} \mathrm{i}\tau_2 \bar{\psi}_c(x) + \psi_c(x)\mathrm{i}\tau_2 \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(x)} + \\ & \frac{1}{g}\partial^\mu \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta B_c^\mu(x)} - \frac{1}{g}\partial_0 \partial^\mu \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta C_c^\mu(x)} - \\ & 2\varepsilon_{2ab}\sigma_c^a(x) \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\sigma_c^b(x)} = 0 \end{aligned} \tag{4-6-16}$$

其中引进 $\sigma^a(x) = aG^a(x)$来描述束缚态 $G^a(x)$,从式(4-6-16)可得关于两点顶角的 Ward 恒等式. 对式(4-6-16)中 $\psi_c(y)$和 $\bar{\psi}_c(z)$求导,无外源时 $\psi_c(x) = \bar{\psi}_c(x) = 0$. 由式(4-6-16)得

$$\begin{aligned} & \delta(x-z)\mathrm{i}\tau_2 \frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)} + \delta(x-y)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(x)}\mathrm{i}\tau_2 - \\ & 2\varepsilon_{2ab}\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\sigma_c^b(x)}\sigma_c^a(x) - \\ & \frac{1}{g}\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta B_c^\mu(x)} - \\ & \frac{1}{g}\partial_0\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta C_c^\mu(x)} = 0 \end{aligned} \tag{4-6-17}$$

作 Fourier 变换,式(4-6-17)可化为

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p)\mathrm{i}\tau_2 - \mathrm{i}\tau_2\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p+k) = 2\varepsilon_{2ab}\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi},\sigma_a}(p+k,-p;-k)\sigma_c^b - \\ & \frac{\mathrm{i}}{g}k_\mu\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi},B_\mu}(p+k,-p;-k) + \\ & \frac{1}{g}k_\mu k_0\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi},C_\mu}(p+k,-p;-k) \end{aligned} \tag{4-6-18}$$

当 $k_\mu \to 0$ 时,式(4-6-18)则变为

$$-\mathrm{i}[\tau_2, \Gamma^{(2)}_{\psi,\bar\psi}(p)] = 2\varepsilon_{2ab}\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar\psi,\sigma_a}(p,-p;0)\sigma^b_c \tag{4-6-19}$$

可见，高阶微商项对 Fermi 子的质量无贡献. 对式(4-6-16)的 $B^\nu_c(y)$ 求导，得

$$\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta B^\nu_c(y)\delta\psi_c(x)}\mathrm{i}\tau_2\psi_c(x) + \bar\psi_c(x)\mathrm{i}\tau_2\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta B^\nu_c(y)\delta\bar\psi_c(x)} +$$

$$\frac{1}{g}\partial^\mu\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta B^\nu_c(y)\delta B^\mu_c(x)} - 2\varepsilon_{2ab}\sigma^a_c(x)\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta B^\nu_c(y)\delta\sigma^b_c(x)} -$$

$$\frac{1}{g}\partial^0\partial^\mu\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta B^\nu_c(y)\delta C^\mu_c(x)} = 0 \tag{4-6-20}$$

作 Fourier 变换，类似于前面的讨论，则式(4-6-20)变为

$$\frac{\mathrm{i}}{g}p_\mu\Gamma^{(2)}_{B_\nu,B_\mu}(p) + \frac{1}{g}p_\mu p_0\Gamma^{(2)}_{B_\nu,C_\mu}(p) = -2\sigma^3_c\Gamma^{(2)}_{B_\nu,\sigma_1}(p) \tag{4-6-21}$$

应用关系式

$$\lim_{p\to 0}\Gamma^{(2)}_{B_\nu,B_\mu}(p) = -z_B\delta_{\mu,\nu}m^2_B \tag{4-6-22}$$

得到规范 Bose 子质量，即

$$m^2_B = -\lim_{p\to 0} z^{-1}_B g'\mathrm{i}\left[\frac{p_\mu p_\nu p_0}{p^2}\frac{1}{g}\Gamma^{(2)}_{B_\nu,C_\mu}(p) + \frac{p_\nu}{p^2}\Gamma^{(2)}_{B_\nu,\sigma_1}(p)\sigma^3_c\right] \tag{4-6-23}$$

此时，高阶微商项对规范 Bose 子的质量有贡献.

4-6-2 含高阶微商项的 Jackiw-Johnson 模型

在 Jackiw-Johnson 模型中引入高阶微商项，其 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{c}{4}\partial_\rho F_{\mu\nu}\partial^\rho F^{\mu\nu} + gJ_{5\mu}A^\mu \tag{4-6-24}$$

式中：$J_{5\mu} = \mathrm{i}\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi$，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，$c$ 为常数.

设场变量 $\bar\psi, \psi, A_\mu, B_\mu = \dot A_\mu$ 的正则共轭动量分别为 $\pi, \bar\pi, P^\mu, Q^\mu$，由 Ostrogradsky变换，引入正则动量，有

$$\left.\begin{aligned} &P^0 = -c\partial_0\partial_i F^{0i} \\ &P^i = F^{0i} + c(\nabla^2 F^{0i} + \partial_0\partial_j F^{ji}) - \partial_0 Q^i \\ &Q^0 = 0, \quad Q^i = -c\partial_0 F^{0i} \\ &\pi = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot\psi} = \mathrm{i}\,\bar\psi\gamma^0, \bar\pi = \frac{\partial_r\mathscr{L}}{\partial\dot{\bar\psi}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-6-25}$$

初级约束和正则 Hamilton 量密度分别为

$$\Phi_1 = \pi \approx 0, \quad \Phi_2 = \bar\pi + \bar\psi\mathrm{i}\gamma^0 \approx 0, \quad \Phi_3 = Q^0 \approx 0$$

$$\mathscr{H}_c = B_\mu P^\mu - \frac{1}{2c}Q^iQ_i + \partial_i B_0 Q^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} +$$

$$\frac{1}{2}B_iB^i + \frac{1}{2}\partial_iA_0\partial^iA^0 - B_i\partial^iA_0 +$$

$$\frac{c}{4}\partial_iF_{jk}\partial^iF^{jk} + \frac{c}{4}\partial_0F_{ij}\partial^0F^{ij} +$$

$$\frac{c}{2}\partial_kF_{0j}\partial^kF_{0j} - \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^i\partial_i\psi - gJ_{5\mu}A^\mu \tag{4-6-26}$$

总 Hamilton 量为

$$H_\mathrm{T} = H_\mathrm{c} + \int \mathrm{d}^3x\lambda_i\Phi_i \tag{4-6-27}$$

$\lambda_i(x)$为约束乘子. 由初级约束 Φ_1,Φ_2 的自洽性条件给出乘子 λ_1,λ_2 满足的方程. 其次级约束为

$$\chi_1 = \{\Phi_3, H_\mathrm{T}\} = \{Q^0, H_\mathrm{T}\} = -P^0 + \partial_iQ^i \approx 0 \tag{4-6-28a}$$

$$\chi_2 = \{\chi_1, H_\mathrm{T}\} = \{-P^0 + \partial_iQ^i, H_\mathrm{T}\} = -\partial_iP^i - gJ_{50} \approx 0 \tag{4-6-28b}$$

此外,再无约束. 第一类约束为 $\Phi_3=Q^0,\Phi_4=\chi_1$;第二类约束为 Φ_1,Φ_2,χ_2. 它们不构成第二类约束的最小数目,其线性组合

$$\Phi_5 = -\partial_iP^i + g(\bar{\pi}\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5\pi) \approx 0 \tag{4-6-29}$$

为第一类约束. 因此,第一类约束的最大数目为

$$\left.\begin{aligned} \Phi_3 &= Q^0 \approx 0 \\ \Phi_4 &= -P^0 + \partial_iQ^i \approx 0 \\ \Phi_5 &= -\partial_iP^i + g(\bar{\pi}\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5\pi) \approx 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-6-30}$$

第二类约束为

$$\Phi_1 = \pi \approx 0, \quad \Phi_2 = \bar{\pi} + \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0 \approx 0 \tag{4-6-31}$$

对第一类约束取相应的规范条件

$$f_1 = B_0 \approx 0, f_2 = \partial_iB^i \approx 0, f_3 = \partial_iA^i \approx 0 \tag{4-6-32}$$

对复合场引入外源,由 FS 量子化方案,略去与场量无关的项,则 Green 函数的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[J] = \int & \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}P^\mu\mathscr{D}B_\mu\mathscr{D}Q^\mu \cdot \\ & \delta(f_1)\delta(f_2)\delta(f_3)\delta(\Phi_3)\delta(\Phi_4)\delta(\Phi_5)\delta(\Phi_1)\delta(\Phi_2) \cdot \\ & \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}^\mathrm{p} + J_\mu A^\mu + J'_\mu B^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\psi}\psi K + \right. \\ & \left. \bar{\psi}\gamma_5\psi K_5]\right\} \end{aligned} \tag{4-6-33}$$

利用 δ-函数的性质式(4-6-33)可写为

$$\begin{aligned} Z[J] = \int & \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\pi}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}P^\mu\mathscr{D}B_\mu\mathscr{D}Q^\mu\mathscr{D}\mu_k\mathscr{D}\omega_l \cdot \\ & \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}^\mathrm{p}_\mathrm{eff} + J_\mu A^\mu + J'_\mu B^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \right. \end{aligned}$$

$$U_k\mu_k + V_l\omega_l + \bar{\psi}\psi K + \bar{\psi}\gamma_5\psi K_5]\} \tag{4-6-34}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}^{\mathrm{p}} + \mathscr{L}_{\mathrm{m}} = \mathscr{L}^{\mathrm{p}} + \omega_l f_l + \mu_k \Phi_k$$

在下列变换下

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\psi(x) = \mathrm{i}\alpha(x)\gamma_5\psi(x)\\
&\delta\pi(x) = 0\\
&\delta\bar{\pi}(x) = \bar{\psi}\alpha(x)\gamma_5\gamma^0\\
&\delta A_\mu(x) = -\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\alpha(x)\\
&\delta P^\mu(x) = 0\\
&\delta Q^\mu(x) = 0\\
&\delta B_\mu(x) = \delta(\partial_0 A_\mu) = -\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\partial_0\alpha(x)
\end{aligned}\right\} \tag{4-6-35}$$

$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 是不变的. 又

$$\delta(\omega_l f_l + \mu_k\Phi_k) = -\frac{\mathrm{i}}{g}\omega_l\partial_0\partial_0\alpha(x) - \frac{\mathrm{i}}{g}\omega_2\,\nabla^2\partial_0\alpha(x) - \frac{\mathrm{i}}{g}\omega_3\,\nabla^2\alpha(x) \tag{4-6-36}$$

作泛函 Legendre 变换,引入顶角生成泛函 $\Gamma[\phi]$,得 Ward 恒等式为

$$\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_0\partial_0\omega_l + \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_0\,\nabla^2\omega_2 - \frac{\mathrm{i}}{g}\,\nabla^2\omega_3 + \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(x)}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\psi_c(x) - \bar{\psi}_c(x)\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(x)} + \frac{1}{2g}\partial^\mu\partial^0\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta B^\mu_c(x)} - \frac{\mathrm{i}}{2g}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta A^\mu_c(x)} + G(x)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta G_5(x)} - G_5(x)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta G(x)} = 0 \tag{4-6-37}$$

为了描述凝聚的量子涨落,引入标量和赝标量场 $\sigma(x)$,$\pi(x)$,即

$$\sigma(x) = aG(x),\quad \pi(x) = aG_5(x) \tag{4-6-38}$$

则式(4-6-37)变为

$$\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_0\partial_0\omega_l + \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_0\,\nabla^2\omega_2 - \frac{\mathrm{i}}{g}\,\nabla^2\omega_3 + \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(x)}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\psi_c(x) - \bar{\psi}_c(x)\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(x)} + \frac{1}{2g}\partial^\mu\partial^0\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta B^\mu_c(x)} - \frac{\mathrm{i}}{2g}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta A^\mu_c(x)} + \sigma_c(x)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\pi_c(x)} - \pi_c(x)\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\sigma_c(x)} = 0 \tag{4-6-39}$$

对式(4-6-39)的 $\psi_c(y)$,$\bar{\psi}_c(z)$求导,得

$$\delta(x-z)\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)} - \delta(x-z)\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(x)}\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_5 -$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\psi}_c(x)\,\frac{i}{2}\gamma_5\,\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)}+\\
&\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)}\,\frac{i}{2}\gamma_5\psi_c(x)-\\
&\frac{i}{2g}\partial_\mu\,\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta A\mu_c(x)}+\\
&\frac{1}{2g}\partial^\mu\partial^0\,\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta B_c^\mu(x)}-\\
&\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\sigma_c(x)}\pi_c(x)+\\
&\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\psi}_c(z)\delta\psi_c(y)\delta\pi_c(x)}\sigma_c(x)=0
\end{aligned}
\tag{4-6-40}
$$

现在选择如下破缺

$$\langle\bar{\psi}(x)\psi(x)\rangle\neq 0 \tag{4-6-41a}$$

$$\langle\bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)\rangle\neq 0 \tag{4-6-41b}$$

对式(4-6-40)作 Fourier 变换,有

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\gamma_5\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p+k)+\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p)\,\frac{i}{2}\gamma_5=&\frac{1}{2g}k_\mu\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi};A_\mu}(p+k,-p;-k)+\\
&\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi},\pi}(p+k,-p;-k)\sigma_c+\\
&\frac{1}{2g}k_\mu k_0\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi};B_\mu}(p+k,-p;-k)
\end{aligned}
\tag{4-6-42}
$$

当 $k_\mu\to 0$ 时式(4-6-42)变为

$$\frac{i}{2}\gamma_5\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p)+\Gamma^{(2)}_{\psi,\bar{\psi}}(p)\,\frac{i}{2}\gamma_5=\Gamma^{(3)}_{\psi,\bar{\psi};\pi}(p,-p;0) \tag{4-6-43}$$

此时,高阶微商项对 Fermi 子的质量无贡献.

对 $A_c^\mu(x)$求导,类似计算可得

$$\sigma_c\Gamma^{(2)}_{A_\nu,\pi}(p)-\frac{1}{2g}p_\mu\Gamma^{(2)}_{A_\mu,B_\mu}(p)+\frac{1}{2g}p_\mu p_0\Gamma^{(2)}_{A_\mu,B_\mu}=0 \tag{4-6-44}$$

于是,有

$$m_A^2=\lim_{p\to 0}z_A^{-1}2gi\left[\frac{p_\nu}{p^2}\Gamma^{(2)}_{A_\nu,\pi}(p)\sigma_c+\frac{1}{2g}\,\frac{p_\mu p_\nu p_0}{p^2}\Gamma^{(2)}_{A_\nu,B_\mu}(p)\right] \tag{4-6-45}$$

此时,高阶微商项对规范 Bose 子质量有贡献. 上面发展的方法可以进一步推广到非 Abel 规范理论的动力学对称破缺研究中.

4-7 广义量子色动力学(QCD)中的正则 Ward 恒等式

广义 QCD 的 Lagrange 量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4\kappa^2}D^a_{b\mu}G^b_{\lambda\nu}D^{a\mu}_c G^{c\lambda\nu} + i\bar{\psi}^\alpha\gamma^\mu\nabla^\alpha_{\beta\mu}\psi^\beta - m\bar{\psi}^\alpha\psi^\alpha \quad (4\text{-}7\text{-}1)$$

式中

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu + f^a_{bc}B^b_\mu B^c_\nu \quad (4\text{-}7\text{-}2)$$

$$D^a_{b\mu} = \delta^a_b\partial_\mu + f^a_{cb}B^c_\mu \quad (4\text{-}7\text{-}3)$$

$$\nabla^\alpha_{\beta\mu} = \delta^\alpha_\beta\partial_\mu - i(T_a)^\alpha_\beta B^a_\mu \quad (4\text{-}7\text{-}4)$$

其中 $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$，$\lambda_a$ 为 Gell-Mann 矩阵. Lagrange 量式(4-7-1)在下列规范变换下是不变的：

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi^\alpha &= -i\varepsilon^a(x)(T_a)^\alpha_\beta\psi^\beta \\ \delta A^a_\mu &= D^a_{b\mu}\varepsilon^b(x) \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}7\text{-}5)$$

广义 QCD 的 Lagrange 量是奇异的，系统在相空间存在固有约束. 设 $\pi_{a\mu}$，$\pi^{(1)}_{a\mu}$，π_ψ，$\pi_{\bar{\psi}}$分别代表与 $B^{a\mu}$，$B^{ai}_{(1)} = \dot{B}^{ai}$，$\psi$，$\bar{\psi}$ 相应的正则共轭动量. 系统所含的约束为

$$\Phi^{(1)}_{a1} = \pi_{a0} + D^a_{bi}\pi^{(1)}_{ib} \approx 0 \quad (4\text{-}7\text{-}6)$$

$$\Phi^{(1)}_2 = \pi_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0 \approx 0 \quad (4\text{-}7\text{-}7)$$

$$\Phi^{(1)}_3 = \pi_{\bar{\psi}} \approx 0 \quad (4\text{-}7\text{-}8)$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}_a = {} & D^a_{bi}\pi_{bi} - \bar{\psi}^\alpha\gamma_0(T_a)^\alpha_\beta\psi^\beta - [\Phi^{(1)}_{2\alpha}(T_a)^\alpha_\beta\psi^\beta + \\ & \Phi^{(1)}_{3\alpha}(\tilde{T}_a)^\alpha_\beta\psi^\beta] - f^a_{bc}(B^{bi}_{(1)}\pi^{(1)}_{ci} + \pi_{c0}B^{b0})\end{aligned} \quad (4\text{-}7\text{-}9a)$$

而

$$(\tilde{T}_a)^\alpha_\beta = -\gamma^0(T_a)^\alpha_\beta\gamma^0 \quad (4\text{-}7\text{-}9b)$$

$\Phi^{(1)}_{a1}$ 和 $\Phi^{(2)}_a$ 为第一类约束，$\Phi^{(1)}_2$ 和 $\Phi^{(1)}_3$ 为第二类约束. 采用路径积分量子化，正则规范条件取为

$$\Phi^G_{a1} = \partial_i B^{ai} \approx 0 \quad (4\text{-}7\text{-}10)$$

$$\Phi^G_{a2} = \partial_i B^{ai}_{(1)} \approx 0 \quad (4\text{-}7\text{-}11)$$

全部约束和规范条件一起构成第二类约束. 此时 Green 函数的生成泛函

$$\begin{aligned}Z[J] = \int & \mathscr{D}B\mathscr{D}B_{(1)}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\pi^{(1)}\mathscr{D}\pi_\psi\mathscr{D}\pi_{\bar{\psi}} \cdot \\ & \delta(\Phi)\sqrt{\det|\{\Phi,\Phi\}|} \cdot \\ & \exp\left\{i\int d^4x(\mathscr{L}^p + J^\mu_a B^a_\mu + \bar{J}\psi + \bar{\psi}J)\right\}\end{aligned} \quad (4\text{-}7\text{-}12)$$

式中

$$\mathscr{L}^p = \pi_{a\mu}\dot{B}^{a\mu} + \pi^{(1)}_{a\mu}\dot{B}^{a\mu}_{(1)} + \dot{\psi}\pi_\psi + \dot{\bar{\psi}}\pi_{\bar{\psi}} - \mathscr{H}_c \quad (4\text{-}7\text{-}13)$$

$\mathscr{H}_c$ 为系统的正则 Hamilton 量密度；Φ 代表全部约束条件和规范条件，$\Phi = (\Phi_l, \Phi^G_m)$. 这里仅对场量引入外源. 由于

$$\det|\{\Phi,\Phi\}| = \det{}^4 D^a_{bi}\partial_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-7-14}$$

引入鬼场 $C(x)$ 和 $\overline{C}(x)$. 由式(4-7-14)可将式(4-7-12)写为

$$\begin{aligned} Z[J^\mu_a,\overline{J},J,\overline{\xi},\xi,\eta,\zeta] = & \int \mathscr{D}B\,\mathscr{D}B_{(1)}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}\pi^{(1)}\cdot \\ & \mathscr{D}\pi_\psi\,\mathscr{D}\pi_{\overline{\psi}}\,\mathscr{D}\overline{C}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}\mu\cdot \\ & \exp\Big\{\mathrm{i}\int d^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} + J^\mu_a B^a_\mu + \overline{J}\psi + \overline{\psi}J + \\ & \overline{\xi}C + \overline{C}\xi + \eta^m\lambda_m + \zeta^n\mu_n)\Big\} \end{aligned} \tag{4-7-15}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}^{\mathrm{p}} + \mathscr{L}_{\mathrm{m}} + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{4-7-16}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathrm{m}} = & \lambda^a_1\Phi^{(1)}_{a1} + \lambda^2\Phi^{(1)}_2 + \lambda^3\Phi^{(1)}_3 + \\ & \lambda^a_2\Phi^{(2)}_a + \mu^a_1\Phi^G_{a1} + \mu^a_2\Phi^G_{a2} \end{aligned} \tag{4-7-17a}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} = 2\overline{C}_a(x)D^a_{bi}\partial_i C^b(x) \tag{4-7-17b}$$

4-7-1 广义 QCD 中规范场-鬼场正规顶角

下面来寻找一变换,使 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$保持不变. 由于在

$$\left.\begin{aligned} B^{a\prime}_\mu(x) &= B^a_\mu(x) + D^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x) \\ C^{a\prime}(x) &= C^a(x) + \mathrm{i}(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x)C^b(x) \end{aligned}\right\} \tag{4-7-18}$$

变换下,$D^a_{b\mu}C^b$ 变为

$$D^a_{b'}{}'_\mu C^{b\prime} = D^a_{b\mu}C^b + \mathrm{i}(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x)D^b_{e\mu}C^e \tag{4-7-19}$$

因此,如果设 $\overline{C}^a(x)$ 做下列变换:

$$\partial^\mu\overline{C}^{a\prime} = \partial^\mu\overline{C}^a - \mathrm{i}\overline{C}^b(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x) \tag{4-7-20}$$

那么,$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$在下列变换

$$C^{a\prime}(x) = C^a(x) + \mathrm{i}(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x)C^b(x) \tag{4-7-21a}$$

$$\overline{C}^{a\prime}(x) = \overline{C}^a(x) - \mathrm{i}\overline{C}^b(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma + \frac{\mathrm{i}}{\Box}\partial_\mu[\overline{C}^b(T_\sigma)^a_b\partial^\mu\varepsilon^\sigma(x)] \tag{4-7-21b}$$

$$B^{a\prime}_\mu(x) = B^a_\mu(x) + D^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x) \tag{4-7-21c}$$

$$B^{a\prime}_{(1)\mu}(x) = B^a_{(1)\mu}(x) + \partial_0 D^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x) \tag{4-7-21d}$$

$$\pi^{\mu\prime}_a(x) = \pi^\mu_a(x) + f^a_{bc}\pi^\mu_c(x)\varepsilon^b(x) + f^a_{bc}\pi^{(1)\mu}_c(x)\dot{\varepsilon}^b(x) \tag{4-7-21e}$$

$$\pi^{(1)\mu\prime}_a(x) = \pi^{(1)\mu}_a(x) + f^a_{bc}\pi^{(1)\mu}_c(x)\varepsilon^b(x) \tag{4-7-21f}$$

$$\psi'(x) = \psi(x) - \mathrm{i}T_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\psi(x) \tag{4-7-21g}$$

$$\overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x) + \mathrm{i}\overline{\psi}(x)T_\sigma\varepsilon^\sigma(x) \tag{4-7-21h}$$

$$\pi'_{\psi}(x) = \pi_{\psi}(x) + \mathrm{i}\pi_{\psi}(x) T_{\sigma}\varepsilon^{\sigma}(x) \tag{4-7-21i}$$

$$\pi'_{\bar{\psi}}(x) = \pi_{\bar{\psi}}(x) \tag{4-7-21j}$$

下，是不变的. 式(4-7-21b)又可写为

$$\overline{C}^{a\prime}(x) = \overline{C}^{a}(x) - \mathrm{i}\overline{C}^{b}(x)(T_{\sigma})^{a}_{b}\varepsilon^{\sigma}(x) + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 y \Delta_0(x,y)\partial_{\mu}[\overline{C}^{b}(y)(T_{\sigma})^{a}_{b}\partial^{\mu}\varepsilon^{\sigma}(y)] \tag{4-7-22a}$$

式中 $\Delta_0(x-y)$ 适合

$$\Box\Delta_0(x,y) = \mathrm{i}\delta^4(x-y) \tag{4-7-22b}$$

设将式(4-7-21)变换的 Jacobi 行列式记为 $\overline{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$，并记

$$J^0_{\sigma} = -\left.\frac{\mathrm{i}\delta\overline{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon^{\sigma}}\right|_{\varepsilon^{\sigma}(x)=0}$$

在式(4-7-21)变换下，设 $\mathscr{L}_m$ 的变更为

$$\delta\mathscr{L}_m = F_{\sigma}(\phi,\pi,\lambda,\mu)\varepsilon_{\sigma}(x) \tag{4-7-23}$$

其中 F_{σ} 与场的正则变量和乘子场 $\lambda_m(x)$，$\mu_m(x)$ 有关，当乘子场 $\lambda_m=\mu_m=0$ 时，$F_{\sigma}=0$. 生成泛函式(4-7-15)在式(4-7-21)变换下不变，此时广义 Ward 恒等式(4-5-7)化为

$$\Big\{J^0_{\sigma} + \mathrm{i}F_{\sigma} - \mathrm{i}\partial_{\mu}J^{\mu}_{\sigma} + \mathrm{i}f^{a}_{\sigma c}J^{\mu}_{a}\frac{\delta}{\delta J^{\mu}_{c}} + \mathrm{i}\overline{J}T_{\sigma}\frac{\delta}{\delta\overline{J}} - \mathrm{i}JT_{\sigma}\frac{\delta}{\delta J} + \mathrm{i}\bar{\xi}_{a}(T_{\sigma})^{a}_{b}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_{b}} - \mathrm{i}\xi_{a}(T_{\sigma})^{b}_{a}\frac{\delta}{\delta\xi_{b}} + \mathrm{i}\partial^{\mu}\Big[\partial_{\mu}\Big(\xi_{a}\frac{1}{\Box}\Big)(T_{\sigma})^{b}_{a}\frac{\delta}{\delta\xi_{b}}\Big]\Big\}Z[J^{\mu}_{a},\overline{J},J,\bar{\xi},\xi,\zeta,\eta] = 0 \tag{4-7-24}$$

让 $Z[J^{\mu}_{a},\overline{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta] = \exp\{\mathrm{i}W[J^{\mu}_{a},\overline{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta]\}$，并利用泛函 Legendre变换将 $W[J^{\mu}_{a},\overline{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta]$换为 $\Gamma[B^{a}_{\mu},\psi,\bar{\psi},C,\overline{C},\lambda,\mu]$，即

$$\Gamma[B^{a}_{\mu},\psi,\bar{\psi},C,\overline{C},\lambda,\mu] = W[J^{\mu}_{a},\overline{J},J,\bar{\xi},\xi,\eta,\zeta] - \int \mathrm{d}^4 x(J^{\mu}_{a}B^{a}_{\mu} + \overline{J}\psi + \bar{\psi}J + \bar{\xi}C + \overline{C}\xi + \eta^{m}\lambda_{m} + \zeta^{n}\mu_{n}) \tag{4-7-25}$$

且

$$\frac{\delta W}{\delta J^{\mu}_{a}(x)} = B^{a}_{\mu}(x), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta B^{a}_{\mu}(x)} = -J^{\mu}_{a}(x) \tag{4-7-26a}$$

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \bar{\psi}(x), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} = -J(x) \tag{4-7-26b}$$

$$\frac{\delta W}{\delta\overline{J}(x)} = \psi(x), \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} = -\overline{J}(x) \tag{4-7-26c}$$

$$\frac{\delta W}{\delta\xi(x)}=\overline{C}(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}(x)}=-\xi(x) \tag{4-7-26d}$$

$$\frac{\delta W}{\delta\bar{\xi}(x)}=C(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta C(x)}=-\bar{\xi}(x) \tag{4-7-26e}$$

$$\frac{\delta W}{\delta\eta^n(x)}=\lambda_m(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda_m(x)}=-\eta^n(x) \tag{4-7-26f}$$

$$\frac{\delta W}{\delta\zeta^n(x)}=\mu_n(x),\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\mu_n(x)}=-\zeta^n(x) \tag{4-7-26g}$$

这样，式(4-7-24)又可化为

$$\begin{aligned}&J^0_\sigma+\mathrm{i}F_\sigma+\mathrm{i}\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta B^\sigma_\mu}-\mathrm{i}f^a_{\sigma c}B^c_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta B^a_\mu}-\mathrm{i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}T_\sigma\psi+\mathrm{i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}T_\sigma\overline{\psi}-\\&\mathrm{i}C^a(T_\sigma)^a_b\frac{\delta\Gamma}{\delta C^b}+\mathrm{i}\overline{C}^a(T_\sigma)^b_a\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}^b}-\\&\mathrm{i}\partial^\mu\left[\partial_\mu\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}^a}\frac{1}{\Box}\right)(T_\sigma)^b_a\overline{C}^b\right]=0\end{aligned} \tag{4-7-27}$$

将式(4-7-27)关于 $\overline{C}^k(x_2)$ 和 $C^m(x_3)$ 求泛函微商，然后让所有场(包括乘子场)为 0，即 $B^a_\mu=\psi=\overline{\psi}=C^a=\overline{C}^a=\lambda_m=\mu_n=0$，于是得

$$\begin{aligned}&\partial^\mu_{x_1}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^k(x_2)\delta C^m(x_3)\delta B^\sigma_\mu(x_1)}+(T_\sigma)^m_b\delta(x_1-x_3)\cdot\\&\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^k(x_2)\delta C^b(x_1)}-(T_\sigma)^b_k\delta(x_1-x_2)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^b(x_1)\delta C^m(x_3)}+\\&\partial^\mu\left[\partial_\mu\left(\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{C}^a(x_1)\delta C^m(x_3)}\frac{1}{\Box}\right)(T_\sigma)^k_a\delta(x_1-x_2)\right]=0\end{aligned} \tag{4-7-28}$$

式(4-7-28)为式(4-7-21)变换下广义 QCD 相应的规范场-鬼场正规顶角的 Ward 恒等式，将式(4-7-27)关于其他场求泛函微商，然后让场变量等于 0，可得到场的传播子和正规顶角间更多的关系式.

式(4-7-28)与传统的 BRS 不变性导致的结果不同，BRS 变换中关于鬼场的变换是非线性的，这里在变换式(4-7-21)中关于鬼场的变换则是线性的(非定域). BRS 变换保证了有效 Lagrange 量不变. 这里的变换仅保证了 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 的不变性，而 $\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$ 可以是非不变的. 导出规范场-鬼场正规顶角 Ward 恒等式(4-7-28)时，无须作出对动量的积分，这也是和传统研究不同的另一突出优点.

4-7-2 广义 QCD 中的 PCAC 和 AVV 顶角

由 Fermi 场 $\psi(x)$ 构成的矢量流、轴矢流、标量流和赝标量流分别为

$$
\left.\begin{aligned}
V_\mu^a(x) &= \overline{\psi}(x)\gamma_\mu T^a\psi(x) \\
A_\mu^a(x) &= \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi(x) \\
S^a(x) &= \overline{\psi}(x)T^a\psi(x) \\
P^a(x) &= \mathrm{i}\overline{\psi}(x)\gamma_5 T^a\psi(x)
\end{aligned}\right\} \tag{4-7-29}
$$

引入与这些流相应的外源 $v_a^\mu(x), a_a^\mu(x), s_a(x), p_a(x)$，并构成与式(4-7-15)相应的扩展生成泛函，即

$$
\begin{aligned}
Z[J_a^\mu,\overline{J},J,\overline{\xi},\xi,\eta,\zeta,v,a,s,p] = &\int \mathscr{D}B\,\mathscr{D}B_{(1)}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\pi\,\cdot \\
&\mathscr{D}\pi^{(1)}\,\mathscr{D}\pi_\psi\,\mathscr{D}\pi_{\overline{\psi}}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\overline{C}\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}\mu\,\cdot \\
&\exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^\mu B_\mu^a + \overline{J}\psi + \overline{\psi}J + \\
&\overline{\xi}C + \overline{C}\xi + \eta^m\lambda_m + \zeta^n\mu_n + \\
&v_a^\mu V_\mu^a + a_a^\mu A_\mu^a + s_a S^a + p_a P^a)\Big\}
\end{aligned} \tag{4-7-30}
$$

在手征变换

$$
\left.\begin{aligned}
\psi'(x) &= (1 + \mathrm{i}\epsilon^\sigma(x)\gamma_5 T_\sigma)\psi(x) \\
\pi'_\psi(x) &= \pi_\psi(x)(1 - \mathrm{i}\epsilon^\sigma(x)\gamma_5 T_\sigma) \\
\overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x)(1 + \mathrm{i}\epsilon^\sigma(x)\gamma_5 T^\sigma) \\
\pi'_{\overline{\psi}}(x) &= (1 - \mathrm{i}\epsilon^\sigma(x)\gamma_5 T_\sigma)\pi_{\overline{\psi}}(x)
\end{aligned}\right\} \tag{4-7-31}
$$

下

$$
\begin{aligned}
\delta I^{\mathrm{p}} = &\delta\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \\
&\int \mathrm{d}^4x\,\epsilon^\sigma(x)(\partial^\mu A_\mu^\sigma - 2mP^\sigma - f_{bc}^\sigma A_\mu^b B^{c\mu})
\end{aligned} \tag{4-7-32}
$$

式中：$\epsilon^\sigma(x)$ 为四维时空区域边界上为 0 的无穷小任意函数. 式(4-7-31)变换的 Jacobi 行列式为 1. 又因为

$$
\delta\Phi_3^{(1)} = -\mathrm{i}\epsilon^\sigma(x)\Phi_3^{(1)}\gamma_5 T_\sigma \tag{4-7-33}
$$

其他约束条件在式(4-7-31)变换下不变. 这样由生成泛函式(4-7-30)在式(4-7-31)变换下的不变性，有

$$
\begin{aligned}
&\int \mathscr{D}B\,\mathscr{D}B_{(1)}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}\pi^{(1)}\,\mathscr{D}\pi_\psi\,\mathscr{D}\pi_{\overline{\psi}}\,\mathscr{D}C\,\mathscr{D}\overline{C}\,\mathscr{D}\lambda\,\mathscr{D}\mu\,\cdot \\
&\quad[\partial^\mu A_\mu^\sigma - 2mP^\sigma - f_{bc}^\sigma A_\mu^b B^{c\mu} - \mathrm{i}\lambda^3\Phi_3^{(1)}\gamma_5 T_\sigma + \mathrm{i}\overline{J}\gamma_5 T_\sigma\psi + \\
&\quad\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma_5 T_\sigma J + f_{bc}^\sigma v_\mu^b A^{c\mu} + f_{bc}^a a_\mu^b V^{c\mu} - d_{bc}^a s_b P^c + d_{bc}^a p^b S^c]\,\cdot \\
&\quad\exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^\mu B_\mu^a + \overline{J}\psi + \overline{\psi}J + \overline{\xi}C + \overline{C}\xi +
\end{aligned}
$$

$$\eta^m\lambda_m + \zeta^n\mu_n + v_a^\mu V_\mu^a + a_a^\mu A_\mu^a +$$

$$s_a S^a + p_a P^a)\Big\} = 0 \tag{4-7-34}$$

当所有外源为 0 时，在约束超曲面上，由式(4-7-34)可得

$$\langle 0 \mid [\partial^\mu \hat{A}_\mu^a(x) - 2m\,\hat{P}^a(x) - f_{bc}^a \hat{A}_\mu^b(x) \hat{B}^{c\mu}(x)] \mid 0\rangle = 0 \tag{4-7-35}$$

此即广义 QCD 中轴矢流部分守恒(PCAC)的一种表达式. 将式(4-7-34)关于 $v_\nu^b(y)$、$v_\lambda^c(z)$求泛函微商，然后让所有的外源为 0，则在约束超曲面上，有

$$\begin{aligned}
&\langle 0 \mid T^*[(\partial^\mu \hat{A}_\mu^a(x) - 2m\hat{P}^a(x) - \\
&f_{de}^a \hat{A}_\mu^d(x) \hat{B}^{e\mu}(x)) \hat{V}_\nu^b(y) \hat{V}_\lambda^c(z)] \mid 0\rangle = \\
&\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y) f_{be}^a \langle 0 \mid T[\hat{A}_\nu^e(x) \hat{V}_\lambda^c(y)] \mid 0\rangle + \\
&\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-z) f_{ce}^a \langle 0 \mid T[\hat{A}_\lambda^e(x) \hat{V}_\nu^b(y)] \mid 0\rangle
\end{aligned} \tag{4-7-36}$$

这就是 AVV 顶角的广义 PCAC 关系. 对一阶微商系统相应的问题在文献[19]中的讨论忽略了对约束的处理.

4-8 高阶微商奇异 Lagrange 量系统的整体量子对称性质

在奇异 Lagrange 量

$$\mathscr{L}(\varphi^a, \varphi^a_{,\mu}, \cdots, \varphi^a_{,\mu(N)}), \quad \varphi_{,\mu(m)} = \underbrace{\partial_\mu \cdots \partial_\nu}_{m} \varphi^a \tag{4-8-1}$$

描述的动力系统中，由于 Lagrange 量式(4-8-1)的奇异性，系统的运动被限制在相空间中由约束所决定的超曲面上. 系统 Green 函数的生成泛函可写为

$$\begin{aligned}
Z[J,K] = &\int \mathscr{D}\varphi^a_{(s)}\, \mathscr{D}\pi_a^{(s)}\, \mathscr{D}\lambda_m\, \mathscr{D}C_l\, \mathscr{D}\overline{C}_k \cdot \\
&\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}} + J_a^{(s)}\varphi^a_{(s)} + K^a_{(s)}\pi_a^{(s)})\right]
\end{aligned} \tag{4-8-2}$$

有效正则作用量

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}} = \int \mathrm{d}^4x \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}} = &\int \mathrm{d}^4x \Big[\pi_a^{(s)}\dot{\varphi}^a_{(s)} - \mathscr{H}_c + \lambda_m \Phi_m + \\
&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4y \overline{C}_k(x)\{\Phi_k(x), \Phi_l(y)\}C_l(y)\Big]
\end{aligned} \tag{4-8-3}$$

式中：$\pi_a^{(s)}$ 为 Ostrogradsky 变换所确定的正则动量；$\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量密度；$\Phi = \{\Phi_m\}$为所有约束的总体(对第二类约束系统)，或约束和规范条件的总体(对第一类约束系统)；$\{\cdot,\cdot\}$代表场的广义 Poisson 括号；$C_l(x)$和 $\overline{C}_k(x)$

为 Grassmann 变量；$\lambda_m(x)$ 为 Lagrange 乘子场. 为了简化记号，设 $\phi^a_{(s)}=(\varphi^a_{(s)},\lambda_m,C_l,\bar{C}_k)$，$J^{(s)}_a=(J^{(s)}_a,\zeta_m,\xi_k,\bar{\xi}_l)$，其中 ζ_m、ξ_k、$\bar{\xi}_l$ 分别为 λ_m、$\bar{C}_k$、C_l 相应的外源，这时式(4-8-2)可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^a_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\cdot\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J^{(s)}_a\phi^a_{(s)}+K^a_{(s)}\pi^{(s)}_a)\right]\qquad(4\text{-}8\text{-}4)$$

下面从系统的整体对称性出发，导出系统整体对称下的广义正则 Ward 恒等式和量子守恒律. 考虑增广相空间中的整体对称变换，其无穷小变换为

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma\tau^{\mu\sigma}(x;\phi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a)\\\phi^{a\prime}_{(s)}(x')&=\phi^a_{(s)}(x)+\Delta\phi^a_{(s)}(x)=\\&\quad\phi^a_{(s)}(x)+\varepsilon_\sigma\xi^{a\sigma}_{(s)}(x;\phi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a)\\\pi^{(s)\prime}_a(x')&=\pi^{(s)}_a(x)+\Delta\pi^{(s)}_a(x)=\\&\quad\pi^{(s)}_a(x)+\varepsilon_\sigma\eta^{(s)\sigma}_a(x;\phi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a)\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}8\text{-}5)$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为任意无穷小参数；$\tau^{\mu\sigma}$，$\xi^{a\sigma}_{(s)}$，$\eta^{(s)\sigma}_a$ 为 x，$\varphi^a_{(s)}$，$\pi^{(s)}_a$ 的给定函数. 假设有效正则作用量 $I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$ 在式(4-8-5)变换下不变，且式(4-8-5)变换的 Jacobi 行列式为 1. 生成泛函式(4-8-4)在式(4-8-5)变换下不变，于是有

$$\begin{aligned}Z[J,K]=\int\mathscr{D}\phi^a_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\Big\{1+\mathrm{i}\varepsilon_\sigma\int\mathrm{d}^4x\Big(&J^{(s)}_a\Big(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_a}\Big)+\\&K^a_{(s)}\Big(\eta^{(s)\sigma}_a-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^a_{(s)}}\Big)+\partial_\mu\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J^{(s)}_a\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_a}+\\&K^a_{(s)}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^a_{(s)}}\Big)\Big]\Big)\Big\}_{\substack{\phi^a_{(s)}\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_a}\\\pi^{(s)}_a\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^a_{(s)}}}}Z[J,K]\end{aligned}\qquad(4\text{-}8\text{-}6)$$

从而，得

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}^4x\Big\{J^{(s)}_a\Big(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_a}\Big)+K^a_{(s)}\Big(\eta^{(s)\sigma}_a-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^a_{(s)}}\Big)+\\&\qquad\partial_\mu\Big[\tau^{\mu\sigma}\Big(J^{(s)}_a\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_a}+K^a_{(s)}\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^a_{(s)}}\Big)\Big]\Big\}_{\substack{\phi^a_{(s)}\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{(s)}_a}\\\pi^{(s)}_a\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K^a_{(s)}}}}\\&\qquad Z[J,K]=0\end{aligned}\qquad(4\text{-}8\text{-}7)$$

式(4-8-7)为高阶微商奇异 Lagrange 量系统整体对称下的广义正则 Ward 恒等式. 对式(4-8-7)关于外源 $J^{(0)}_a$ 多次求泛函微商，可得若干 Green 函数间的关系式.

下面导出整体对称下的量子守恒律. 假设系统的有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 在式(4-8-5)的整体变换下不变. 将该变换定域化,在增广相空间中讨论对应的定域变换

$$
\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma}(x)\tau^{\mu\sigma}(x;\phi^{a}_{(s)},\pi^{(s)}_{a}) \\
\phi^{a\prime}_{(s)}(x') &= \phi^{a}_{(s)}(x) + \Delta\phi^{a}_{(s)}(x) = \\
&\quad \phi^{a}_{(s)}(x) + \varepsilon_{\sigma}(x)\xi^{a\sigma}_{(s)}(x;\phi^{a}_{(s)},\pi^{(s)}_{a}) \\
\pi^{(s)\prime}_{a}(x') &= \pi^{(s)}_{a}(x) + \Delta\pi^{(s)}_{a}(x) = \\
&\quad \pi^{(s)}_{a}(x) + \varepsilon_{\sigma}(x)\eta^{(s)\sigma}_{a}(x;\phi^{a}_{(s)},\pi^{(s)}_{a})
\end{aligned}\right\} \tag{4-8-8}
$$

式中: $\varepsilon^{\sigma}(x)(\sigma = 1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数,它们的值及其所需的各级微商在时空区域的边界上为 0. 在式(4-8-8)变换下,系统的有效正则作用量的改变为

$$
\begin{aligned}
\Delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = &\int \mathrm{d}^4 x\, \varepsilon_{\sigma}(x)\Big\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\phi^{a}_{(s)}}(\xi^{a\sigma}_{(s)} - \phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \\
&\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{a}}(\eta^{(s)\sigma}_{a} - \pi^{(s)}_{a,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s+1)} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + \\
&\mathrm{D}[\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)} - \phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]\Big\} + \int \mathrm{d}^4 x\{[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s+1)} - \\
&\mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}]\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x) + \pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)} - \phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_{\sigma}(x)\}
\end{aligned} \tag{4-8-9}
$$

式中 $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 由于假设有效正则作用量在整体变换式(4-8-5)下不变,故式(4-8-9)中的第一个积分为 0. 根据 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ 的边界条件,式(4-8-9)又可写为

$$
\begin{aligned}
\Delta I_{\mathrm{eff}} = &\int \mathrm{d}^4 x\{[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s+1)} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}]\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x) + \\
&\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)} - \phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_{\sigma}(x)\} = \\
&-\int \mathrm{d}^4 x\, \varepsilon_{\sigma}(x)\{\partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s+1)} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + \\
&\mathrm{D}[\pi^{(s)}_{a}(\xi^{a\sigma}_{(s)} - \phi^{a}_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}
\end{aligned} \tag{4-8-10}
$$

将式(4-8-8)变换的 Jacobi 行列式记为 $\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]$. 生成泛函

$$
Z[J,K] = \int \mathscr{D}\phi^{a}_{(s)}\,\mathscr{D}\pi^{(s)}_{a}\,\cdot\,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J^{(s)}_{a}\phi^{a}_{(s)} + K^{a}_{(s)}\pi^{(s)}_{a})\right\} \tag{4-8-11}
$$

在式(4-8-8)变换下的不变性,表明

$$
\left.\frac{\delta Z[J,K]}{\delta\varepsilon_{\sigma}(x)}\right|_{\varepsilon_{\sigma}(x)=0} = 0 \tag{4-8-12}
$$

将式(4-8-8)、式(4-8-10)代入式(4-8-11),并对所得结果关于 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ 求泛函微商,由式(4-8-12)得

$$\int \mathscr{D}\phi^a_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\{\partial_\mu[(\pi^{(s)}_a\phi^a_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+$$
$$\mathrm{D}[\pi^{(s)}_a(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]-J^\sigma_0-M^\sigma\}\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\text{eff}}+J^{(s)}_a\phi^a_{(s)}+K^a_{(s)}\pi^{(s)}_a)\right\}=0 \tag{4-8-13}$$

式中

$$J^\sigma_0=-\mathrm{i}\frac{\delta\bar{J}[\phi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon_\sigma(x)}\bigg|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} \tag{4-8-14}$$

$$M^\sigma=J^{(s)}_a(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})+K^a_{(s)}(\eta^{(s)\sigma}_a-\pi^{(s)}_{a,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \tag{4-8-15}$$

将式(4-8-13)关于外源 $J^{(0)}_a$ 求 n 次泛函微商，得

$$\int \mathscr{D}\phi^a_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\Big(\{\partial_\mu[(\pi^{(s)}_a\phi^a_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+$$
$$\mathrm{D}[\pi^{(s)}_a(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]-J^\sigma_0-M^\sigma\}\cdot$$
$$\phi^a(x_1)\phi^a(x_2)\cdots\phi^a(x_n)-\mathrm{i}\sum_j\phi^a(x_1)\phi^a(x_2)\cdots\cdot$$
$$\phi^a(x_{j-1})\phi^a(x_{j+1})\cdots\phi^a(x_n)N^{a\sigma}\delta(x-x_j)\Big)\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\text{eff}}+J^{(s)}_a\phi^a_{(s)}+K^a_{(s)}\pi^{(s)}_a)\right\}=0 \tag{4-8-16}$$

式中

$$N^{a\sigma}=\xi^{a\sigma}_{(0)}-\phi^a_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} \tag{4-8-17}$$

在式(4-8-16)中，让所有外源为 0，得

$$\langle 0\mid T^*\{\partial_\mu[(\pi^{(s)}_a\phi^a_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi^{(s)}_a(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]-$$
$$J^\sigma_0\}\phi^a(x_1)\phi^a(x_2)\cdots\phi^a(x_n)\mid 0\rangle=$$
$$\mathrm{i}\sum_j\langle 0\mid T^*\phi^a(x_1)\phi^a(x_2)\cdots\phi^a(x_{j-1})\cdot$$
$$\phi^a(x_{j+1})\cdots\phi^a(x_n)N^{a\sigma}\mid 0\rangle\delta(x-x_j) \tag{4-8-18}$$

式中：$|0\rangle$代表场的基态；T^* 代表一种特定的编时乘积. 固定 t，并让

$$t_1,t_2,\cdots,t_m\to+\infty;\qquad t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_n\to-\infty$$

利用约化公式[19]，可将式(4-8-18)化为

$$\langle \mathrm{out},m\mid\{\partial_\mu[(\pi^{(s)}_a\phi^a_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+$$
$$\mathrm{D}[\pi^{(s)}_a(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]-J^\sigma_0\}\mid n-m,\mathrm{in}\rangle=0 \tag{4-8-19}$$

由于 m,n 的任意性，于是有

$$\partial_\mu[(\pi^{(s)}_a\phi^a_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi^{(s)}_a(\xi^{a\sigma}_{(s)}-\phi^a_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]=J^\sigma_0 \tag{4-8-20}$$

将式(4-8-20)在四维时空区域积分，假设场在空间区域无穷远处为 0，利用三维 Gauss 定理，由式(4-8-20)得

$$\mathrm{D}\int \mathrm{d}^3x[\pi_a^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma} - \phi_{(s),k}^a\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma}] = \int \mathrm{d}^4x J_0^\sigma \tag{4-8-21}$$

其中重复的拉丁字母 k 指标求和由 1～3. 这样就得到下列结果：如果高阶微商奇异 Lagrange 量系统的有效正则作用量在增广相空间中整体变换下不变，并且对应的定域变换式(4-8-8)的 Jacobi 行列式为常数，那么该系统存在的量子守恒量为

$$Q^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3x[\pi_a^{(s)}(\xi_{(s)}^{a\sigma} - \phi_{(s),k}^a\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma}]$$
$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{4-8-22}$$

此结果对理论中无反常时成立.

量子守恒量式(4-8-22)与正则形式 Noether 定理导出的守恒量相对应[11]. 由于约束 Hamilton 系统量子化时，约束带来的量子效应，一般有效 Hamilton 量 $H_{\mathrm{eff}} = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}$ 与正则 Hamilton 量 H_c 是不同的，这时量子守恒量式(4-8-22)有别于经典 Noether 荷. 这是约束 Hamilton 系统的量子正则方程不同于经典正则方程的缘故. 在约束 Hamilton 的经典理论中，Dirac 曾猜想：所有第一类约束(初级约束和次级约束)均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换. 这个问题与由扩展 Hamilton 量 H_{E} 给出的广义正则方程是否与 Lagrange 方程等价紧密相关. 长期以来，关于 Dirac 猜想一直存在着不同的争议. 已有工作给出的反例说明了高阶微商奇异 Lagrange 量系统 Dirac 猜想失效[5,13].

在量子理论中，基于生成泛函式(4-8-4)在正则变量 $\phi_{(s)}^a$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 平移变换下的不变性，可以得到量子理论中的高阶微商奇异Lagrange量系统的广义正则方程，即

$$\dot{\phi}_{(s)}^a = \frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta \pi_a^{(s)}}, \quad \dot{\pi}_a^{(s)} = -\frac{\delta H_{\mathrm{eff}}}{\delta \phi_{(s)}^a} \tag{4-8-23}$$

可见，约束 Hamilton 系统的量子正则方程，既不是由总 Hamilton 量 H_{T} 决定，也不是由扩展 Hamilton 量 H_{E} 决定. 量子水平的式(4-8-23)与经典正则方程不同，因而量子水平的守恒量就不同于经典 Noether 守恒量. 在量子理论中，导出守恒量式(4-8-22)不仅需要系统的有效正则作用量(而不是正则作用量)在整体变换下不变，而且在对应的定域变换[式(4-8-8)]下其路径(泛函)积分测度也不变. 这与经典理论中守恒量存在的条件是不同的. 可见，经典理论中的对称性和守恒律的联系，在量子理论中一般不再保持.

4-9 高阶微商杨-Mills场论中的量子守恒律

含高阶微商杨-Mills场的Lagrange量密度为[6]

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu}-\frac{1}{4\Lambda^{2}}D_{b\mu}^{a}F_{\lambda\nu}^{b}D_{c}^{a\mu}F^{c\lambda\nu} \tag{4-9-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}+f_{bc}^{a}A_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c} \tag{4-9-2}$$

$$D_{b\mu}^{a}=\delta_{b}^{a}\partial_{\mu}+f_{cb}^{a}A_{\mu}^{c} \tag{4-9-3}$$

在Coulomb规范下，Green函数的生成泛函为

$$\begin{aligned}Z[J,\xi,\bar{\xi},\eta]=&\int\mathscr{D}A_{\mu}^{a}\,\mathscr{D}A_{(1)\mu}^{a}\,\mathscr{D}\pi_{a}^{\mu}\,\mathscr{D}\pi_{a}^{(1)\mu}\,\mathscr{D}\bar{C}_{a}\,\mathscr{D}C_{a}\,\mathscr{D}\lambda_{m}\cdot\\&\delta(\Phi_{a_1}^{G})\,\delta(\Phi_{a_2}^{G})\exp\left\{i\int d^{4}x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{a}^{\mu}A_{\mu}^{a}+\right.\\&\left.\bar{\xi}^{a}C_{a}+\bar{C}^{a}\xi_{a}+\eta^{m}\lambda_{m})\right\}\end{aligned} \tag{4-9-4}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{4-9-5}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi_{a}^{\mu}\dot{A}_{\mu}^{a}+\pi_{a}^{(1)\mu}\dot{A}_{(1)\mu}^{a}-\mathscr{H}_{c} \tag{4-9-6}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{m}}=\lambda_{1}^{a}\Phi_{a_1}^{(1)}+\lambda_{2}^{a}\Phi_{a}^{(2)} \tag{4-9-7}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=2\bar{C}_{a}D_{bi}^{a}\partial_{i}C_{b} \tag{4-9-8}$$

$\mathscr{H}_{c}$ 是式(4-9-1)相应的正则 Hamilton 量密度；π_{a}^{μ} 和 $\pi_{a}^{(1)\mu}$ 分别为 A_{μ}^{a}，$\dot{A}_{\mu}^{a}=A_{(1)\mu}^{a}$对应的正则共轭动量；$\{\Phi\}$和$\{\Phi^{G}\}$分别为约束条件和规范条件. 在式(4-9-4)中，仅对场量 A_{μ}^{a} 引入了外源 J_{a}^{μ}，由于理论的规范无关性，其规范条件 $\Phi_{ai}^{G}\approx 0(i=1,2)$可用规范条件$\Phi_{ai}^{G}-p_{ai}(x)\approx 0$代替. 其中 $p_{ai}(x)$ 为与规范无关的函数，用 $\exp\left[-\frac{1}{2\alpha_{i}}\int d^{4}x(p_{ai})^{2}\right]$（式中 α_{i} 为参数）去乘以式(4-9-4)，然后关于 $p_{ai}(x)$做泛函积分，略去无关紧要的因子，得

$$\begin{aligned}Z[J,\bar{\xi},\xi,\eta]=&\int\mathscr{D}A_{\mu}^{a}\,\mathscr{D}A_{(1)\mu}^{a}\,\mathscr{D}\pi_{a}^{\mu}\,\mathscr{D}\pi_{(1)a}^{\mu}\,\mathscr{D}\bar{C}_{a}\,\mathscr{D}C_{a}\,\mathscr{D}\lambda_{m}\cdot\\&\exp\left\{i\int d^{4}x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{a}^{\mu}A_{\mu}^{a}+\bar{\xi}C_{a}+\bar{C}_{a}\xi_{a}+\eta^{m}\lambda_{m})\right\}\end{aligned} \tag{4-9-9}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=&\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\lambda_{1}^{a}\Phi_{a}^{(1)}+\lambda_{2}^{a}\Phi_{a}^{(2)}-\frac{1}{2\alpha_{1}}(\Phi_{a_1}^{G})^{2}-\\&\frac{1}{2\alpha_{2}}(\partial^{i}A_{i}^{a})^{2}+2\bar{C}_{a}D_{bi}^{a}\partial_{i}C_{b}\end{aligned} \tag{4-9-10}$$

考虑相空间中的 BRS 变换

$$\delta A_{\mu}^{a}=D_{b\mu}^{a}C^{b}\tau,\ \delta A_{(1)\mu}^{a}=\partial_{0}(D_{b\mu}^{a}C^{b}\tau) \tag{4-9-11a}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta\pi_{a}^{\mu}&=f_{be}^{a}\pi_{e}^{\mu}C^{b}\tau-f_{be}^{a}\pi_{e}^{(1)\mu}\dot{C}^{b}\tau\\ \delta\pi_{a}^{(1)\mu}&=-f_{be}^{a}\pi_{e}^{(1)\mu}C^{b}\tau\end{aligned}\right\} \tag{4-9-11b}$$

$$\delta C^{a}=\frac{\tau}{2}f_{bc}^{a}C^{b}C^{c},\ \delta\overline{C}^{a}=-\frac{\tau}{\alpha_{2}}\partial^{i}A_{i}^{a} \tag{4-9-11c}$$

式中：τ 为 Grassmann 参数. 由于高阶微商纯杨-Mills 场的约束 $\Phi_{a}^{(1)}\approx 0$ 和 $\Phi_{a}^{(2)}\approx 0$ 均为第一类约束，变换式(4-9-11a)是由第一类约束作为规范生成元所产生的规范变换，它不会离开约束超曲面. 因此，在 BRS 变换式(4-9-11)下，沿着约束(包括规范约束)所确定的超曲面上，系统的有效正则 Lagrange 量式(4-9-10)是不变的，即 $\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{p}\approx 0$. 式(4-9-11)变换的 Jacobi 行列式为 1. 按式(4-8-22)所得系统的广义 BRS 量子守恒量为

$$Q=\int d^{3}x(\pi_{a}^{\mu}\delta A_{\mu}^{a}+\pi_{a}^{(1)\mu}\delta A_{(1)\mu}^{a}+\bar{\pi}_{a}\delta C^{a}+\pi_{a}\delta\overline{C}^{a}) \tag{4-9-12a}$$

式中

$$\pi_{a}^{0}=\frac{1}{\Lambda^{2}}D_{aj}^{b}D_{b0}^{e}F_{e}^{j0} \tag{4-9-12b}$$

$$\pi_{a}^{i}=\frac{1}{\Lambda^{2}}(D_{a}^{bj}D_{bj}^{e}F_{e}^{0i}+D_{bj}^{e}D_{b0}^{e}F_{e}^{ij})-D_{a0}^{b}\pi_{b}^{(1)i}+F_{a}^{0i} \tag{4-9-12c}$$

$$\pi_{a}^{(1)0}=0 \tag{4-9-12d}$$

$$\pi_{a}^{(1)i}=\frac{1}{\Lambda^{2}}D_{bj}^{a}F_{b}^{ij} \tag{4-9-12e}$$

$$\pi_{a}=-\dot{\overline{C}}^{a} \tag{4-9-12f}$$

$$\bar{\pi}_{a}=D_{b0}^{a}C^{b} \tag{4-9-12g}$$

上述形式的显著优点在于无须作出系统 Green 函数的相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，即可导出相应的结果.

4-10 高阶微商 Maxwell 非 Abel CS 理论中的量子 BRS 守恒荷

现考虑(2+1)维时空中非 Abel CS 项与旋量场的耦合情况. 高阶微商 Maxwell 非 Abel CS 理论中的Lagrange量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{c}{4\pi}D_{\rho}F_{\mu\nu}^{a}D^{\rho}F^{a\mu\nu}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}A_{\rho}^{a}+\frac{1}{3}f_{bc}^{a}A_{\mu}^{a}A_{\nu}^{b}A_{\rho}^{c})+i\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi \tag{4-10-1}$$

式中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \tag{4-10-2}$$

D_μ 代表协变微商. γ^μ 为 Dirac γ-矩阵. 由 Ostrogradsky 变换，分别对 $A_\mu^a, \dot{A}_\mu^a = B_\mu^a, \psi$ 和 $\bar{\psi}$ 引入相应的正则动量 $P_a^\mu, Q_a^\mu, \bar{\pi}$ 和 π，有

$$P^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho B_\mu)} \tag{4-10-3}$$

$$Q^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{B}_\mu} \tag{4-10-4}$$

$$\bar{\pi} = \frac{\partial_r \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} \tag{4-10-5}$$

$$\pi = \frac{\partial_r \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} \tag{4-10-6}$$

求出的 $P^{a\mu}, Q^{a\mu}, \pi^a$ 和 π^a 分别为

$$\begin{aligned} P^{a\mu} = {} & F^{a\mu 0} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{0\mu\nu} A_\nu^a - \frac{c}{\pi}\mathrm{D}_i \mathrm{D}^i F^{a\mu 0} - \\ & \mathrm{D}_0 Q^{a\mu} - \frac{c}{\pi}\mathrm{D}_i \mathrm{D}_0 F^{a\mu i} + f_{bc}^a A_0^c Q^{b\mu} \end{aligned} \tag{4-10-7}$$

$$Q^{a\mu} = \frac{c}{\pi}\mathrm{D}_0 F^{a\mu 0} \tag{4-10-8}$$

$$\bar{\pi}^a = \mathrm{i}\bar{\psi}^a \gamma^0 \tag{4-10-9}$$

$$\pi^a = 0 \tag{4-10-10}$$

初级约束为

$$\theta^a = \pi^a \approx 0 \tag{4-10-11}$$

$$\bar{\theta}^a = \bar{\pi}^a - \mathrm{i}\bar{\psi}^a \gamma^0 \approx 0 \tag{4-10-12}$$

$$\Lambda^{(0)a} = Q^{a0} \approx 0 \tag{4-10-13}$$

总 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}^2 x (\mathscr{H}_c + \lambda_{(0)}^a \Lambda_a^{(0)} + \bar{\lambda}_a \theta^a + \bar{\theta}^a \lambda_a) \tag{4-10-14}$$

式中：$\lambda_{(0)}^a$ 为 Bose Lagrange 乘子；λ_a 和 $\bar{\lambda}_a$ 为 Fermi Lagrange 乘子；$\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量，

$$\mathscr{H}_c = \dot{A}_\mu^a P^{a\mu} + \dot{B}_\mu^a Q^{a\mu} + \dot{\bar{\psi}}\pi + \bar{\pi}\dot{\psi} - \mathscr{L} \tag{4-10-15}$$

正则变量对 $(A_\mu^a, P^{a\mu})$、$(B_\mu^a, Q^{a\mu})$、$(\psi, \bar{\pi})$ 和 $(\bar{\psi}, \pi)$ 的基本广义 Poisson 括号与一阶微商理论结果相同. 初级约束的自洽性要求 $\{\theta, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0$ 和 $\{\bar{\theta}, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0$，分别给出确定的 Lagrange 乘子 λ^a 和 $\bar{\lambda}^a$ 的方程. 由初级约束 $\Lambda^{(0)a}$ 的自洽性条

件得次级约束. 其次级约束为

$$\Lambda^{(1)a} = \{\Lambda^{(0)a}, H_T\} = -P^{a0} + D_i Q^{ai} \approx 0 \qquad (4\text{-}10\text{-}16)$$

由次级约束的自洽性要求，有

$$\begin{aligned}\overline{\Lambda}^{(2)a} &= \{\Lambda^{(1)a}, H_T\} = -D_i P^{ai} - \frac{\kappa}{4\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j^a - \\ &\quad f_{bc}^a B_i^b Q^{ci} - f_{bc}^a A_0^b D_i Q^{ci} + \mathrm{i} f_{bc}^a \overline{\psi}^b \gamma_0 \psi \approx 0 \end{aligned} \qquad (4\text{-}10\text{-}17)$$

$$\overline{\Lambda}^{(3)a} = \{\overline{\Lambda}^{(2)a}, H_T\} = -f_{bc}^a A_0^b \overline{\Lambda}^{(2)c} \qquad (4\text{-}10\text{-}18)$$

可见，$\overline{\Lambda}^{(3)a}$ 自然是弱等于 0，而不导致新的约束. 做约束 $\overline{\Lambda}^{(2)a}, \theta^a, \overline{\theta}^a$ 的线性组合，给出

$$\begin{aligned}\Lambda^{(2)a} &= f_{bc}^a(\overline{\psi}^b \pi^c + \overline{\pi}^b \psi^c) + D_i P^{ai} + \frac{\kappa}{4\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j^a + \\ &\quad f_{bc}^a B_i^b Q^{ci} + f_{bc}^a A_0^b D_i Q^{ci} \approx 0\end{aligned} \qquad (4\text{-}10\text{-}19)$$

不难验证，式(4-10-11)、式(4-10-12)为第二类约束，而式(4-10-13)、式(4-10-16)、式(4-10-19)为第一类约束. 按约束 Hamilton 系统的 FS 量子化规则，对每一个第一类约束需选取一规范条件，并将这些规范条件取为

$$\Omega_1^a = B_0^a \approx 0 \qquad (4\text{-}10\text{-}20)$$

$$\Omega_2^a = \partial_i B^{ai} \approx 0 \qquad (4\text{-}10\text{-}21)$$

$$\Omega_3^a = \partial_i A^{ai} \approx 0 \qquad (4\text{-}10\text{-}22)$$

此系统同时含第一类约束和第二类约束，其 Green 函数在相空间中的生成泛函

$$\begin{aligned}Z[J] &= \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}P_a^\mu \mathscr{D}B_\mu^a \mathscr{D}Q_a^\mu \mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\pi\, \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\overline{\pi}\ \delta(\theta)\delta(\overline{\theta})\cdot \\ &\quad \prod_{k,l}\delta(\Lambda^{(k)})\delta(\Omega_l)\ \det|\{\Lambda^{(k)},\Omega_l\}|\,[\det|\{\theta,\overline{\theta}\}|]^{\frac{1}{2}}\cdot \\ &\quad \exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(\dot{A}_\mu^a P^{a\mu} + \dot{B}_\mu^a Q^{a\mu} + \dot{\overline{\psi}}\pi + \overline{\pi}\dot{\psi} - \\ &\quad \mathscr{H}_c + J_{1a}^\mu A_\mu^a + J_{2a}^\mu B_\mu^a + \overline{J}\psi + \overline{\psi}J)\Big\}\end{aligned} \qquad (4\text{-}10\text{-}23)$$

不难验证，$\{\theta,\overline{\theta}\}$ 与场量无关，可从生成泛函式(4-10-23)中略去. 而

$$[\{\Lambda^{(k)},\Omega_l\}] = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & M^{ab} & \mathbf{B} \\ 0 & 0 & M^{ab}\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}10\text{-}24)$$

式中

$$\mathbf{A} = [\{\Lambda^{(0)a},\Omega_1^b\}] = [-\delta^{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})] \qquad (4\text{-}10\text{-}25)$$

$$M^{ac} = \{\Lambda^{(2)a},\Omega_3^c\} = (\delta^{ab}\ \nabla^2 - f_{bc}^a A_i^b \partial^i)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (4\text{-}10\text{-}26)$$

$$\boldsymbol{B} = [\{\Lambda^{(2)a}, \Omega_2^b\}] \tag{4-10-27}$$

记 $\boldsymbol{M}_C = [M^{ab}]$. 因子 $\det \boldsymbol{M}_C \delta(\partial_i A^{ai})$ 可用 $\det \boldsymbol{M}_L \delta(\partial_\mu A^{a\mu})$ 代替，而

$$\boldsymbol{M}_L = (\delta^{ac}\partial^\mu\partial_\mu - f^a_{bc}A^b_\mu\partial^\mu)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4-10-28}$$

将式(4-10-24)～式(4-10-28)代入式(4-10-23)，其中的行列式用 Grassmann 变量 $C^a(x)$ 和 $\overline{C}^b(y)$ 的积分来表达，由理论的规范无关性，可将规范条件的因子写在指数上. 略去与场量无关的因子，于是生成泛函式(4-10-23)又可写为

$$\begin{aligned} Z[J] = \int & \mathscr{D}A^a_\mu \, \mathscr{D}P^\mu_a \, \mathscr{D}B^a_\mu \, \mathscr{D}Q^\mu_a \, \mathscr{D}\overline{\psi} \, \mathscr{D}\pi \, \mathscr{D}\psi \, \mathscr{D}\overline{\pi} \, \mathscr{D}\lambda \, \mathscr{D}\overline{\lambda} \cdot \\ & \mathscr{D}C \, \mathscr{D}\overline{C} \exp\left\{ i\int d^3x [\mathscr{L}^p_{\text{eff}} + J^\mu_{1a}A^a_\mu + J^\mu_{2a}B^a_\mu + \right. \\ & \left. \overline{J}\psi + \overline{\psi}J + \overline{J}_{3a}C^a + \overline{C}^a J_{3a}] \right\} \end{aligned} \tag{4-10-29}$$

式中

$$\mathscr{L}^p_{\text{eff}} = \mathscr{L}^p + \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_{gh} + \mathscr{L}_m \tag{4-10-30}$$

$$\mathscr{L}^p = \dot{A}^a_\mu P^{a\mu} + \dot{B}^a_\mu Q^{a\mu} + \dot{\overline{\psi}}\pi + \overline{\pi}\dot{\psi} - \mathscr{H}_c \tag{4-10-31}$$

$$\mathscr{L}_g = -\frac{1}{2\alpha_3}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 \tag{4-10-32}$$

$$\mathscr{L}_{gh} = 2\partial^\mu \overline{C}^a D^a_{b\mu} C^b \tag{4-10-33}$$

$$\mathscr{L}_m = \lambda^a_i \Lambda^{(i)a} + \overline{\lambda}_a \theta^a + \overline{\theta}^a \lambda_a - \frac{1}{2\alpha_j}(\Omega^j_a)^2 \quad (j = 1, 2) \tag{4-10-34}$$

在式(4-10-29)中对鬼场 $C^a(x)$ 和 $\overline{C}^b(x)$ 分别引入了外源 $\overline{J}_{3a}$ 和 J_{3b}. 现考虑相空间中的 BRS 变换

$$\left.\begin{aligned} &\delta A^\mu_a = -\tau D^a_{b\mu}C^b, \ \delta P^\mu_a = -\tau f^a_{bc}P^\mu_c C^b + \tau f^a_{bc}Q^\mu_c \dot{C}^b \\ &\delta B^a_\mu = -\tau\partial_0(D^a_{b\mu}C^b), \ \delta Q^\mu_a = \tau f^a_{bc}Q^\mu_c C^b \\ &\delta\psi = i\tau C^b T^b \psi, \ \delta\overline{\pi} = -i\tau\overline{\pi}C^b T^b \\ &\delta\overline{\psi} = -i\tau\overline{\psi}C^b T^b, \ \delta\pi = i\tau C^b T^b \pi \\ &\delta C^a = \frac{1}{2}\tau f^a_{bc}C^b C^c, \ \delta\overline{C} = -\frac{1}{\alpha_3}\tau\partial^\mu A^a_\mu \end{aligned}\right\} \tag{4-10-35}$$

式(4-10-30)中前三项之和($\mathscr{L}^p + \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_{gh}$)在式(4-10-35)变换下不变；由第一类约束产生的规范变换仍保持不会离开约束决定的超曲面，而第二类约束 $\overline{\theta}$ 和 θ 在式(4-10-35)变换下不变；式(4-10-34)最后一项$\left[-\frac{1}{2\alpha_j}(\Omega^j_a)^2\right]$显然在式(4-10-35)变换下也不会离开约束超曲面. 即是说，量子理论中有效正则 Lagrange 量 $\mathscr{L}^p_{\text{eff}}$ 描述的系统在式(4-10-35)变换下是不变的(在约束所确定的

超曲面上)，且式(4-10-35)变换的 Jacobi 行列式为 1. 这样由式(4-8-22)所得系统在量子理论中的 BRS 守恒荷为

$$
Q=\int \mathrm{d}^2 x(\pi_a^\mu \delta A_\mu^a+Q_a^\mu \delta B_\mu^a+\bar{\pi}\, \delta \psi+\delta \bar{\psi} \pi+\bar{R}_a \delta C^a+\delta \bar{C}^a R_a) \tag{4-10-36}
$$

式中：$\bar{R}_a$ 和 R_a 分别为鬼场 C^a 和 $\bar{C}^a$ 的正则共轭动量.

有效正则 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 在 (x_1, x_2) 平面内的空间转动下是不变的，且场变换的 Jacobi 行列式为 1. 在空间转动变换下，$\tau^{0\sigma}=0$，于是由式(4-8-22)得系统在量子理论中的守恒角动量[15].

导出上述量子守恒律的显著优点在于无须作出生成泛函中对正则动量的路径积分. 此外对高阶微商非 Abel CS 项与标量场耦合情形也进行了研究[17].

4-11 高阶微商规范不变系统的整体对称性和量子守恒律

对称性和守恒律的联系在经典理论中是由 Noether 定理给出的. Noether 定理及其推广，传统的讨论是用位形空间中的变量来表述的. 最近正则形式的 Noether 定理已建立[10-12] 由高阶微商描述的动力系统一直被广泛研究，Lagrange 量中含高阶微商项，在量子理论中它能改善费曼图的收敛性. 而含 CS 项的系统一直是人们的研究兴趣，特别是(2+1)维的 CS 理论提供了一个描述分数自旋和分数统计的理论，它能被用来研究分数量子 Hall 效应. 这里研究高阶微商规范不变系统的量子守恒律并将其应用于含高阶微商的 Maxwell 非 Abel CS 理论 .

在路径积分量子化理论中，出现的是经典的数，这为研究系统的量子对称性质提供了方便. 从路径积分导出量子守恒律，通常是由位形空间变量来表述的. 它仅适用于相空间路径积分中关于正则动量的积分为 Gauss 型的情形. 当系统的约束结构比较复杂时，要作出相空间路径积分中关于动量的路径积分是十分困难的，甚至是不可能的. 因此，从相空间路径积分的量子化方案出发来研究系统的量子正则对称性，就具有更基本的意义. 本节第一部分和第二部分分别从位形空间和相空间的生成泛函出发，导出了含高阶微商规范不变系统的整体对称性下的守恒律，第三部分将上述结果用于高阶 Maxwell 非 Abel CS 理论，分别在位形空间和相空间来分析，其量子守恒的结果是相同的. 这表明 FP 方法对此模型适用. 此时的量子守恒量均需计及鬼粒子的贡献.

4-11-1 位形空间中的整体对称性和量子守恒律

设高阶微商规范不变系统的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(x,\ \psi^{\alpha},\ \psi^{\alpha}_{,\mu},\ \psi^{\alpha}_{,\mu(m)},\ \cdots,\ \psi^{\alpha}_{,\mu(N)})$，$\psi^{\alpha}$ 的最高阶微商，记为N，$\psi^{\alpha}_{,\mu(N)}=\underbrace{\partial_{\mu}\cdots\partial_{\nu}}_{N}\psi^{\alpha}$，由FP方法，得系统的 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\phi^{\alpha}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_{\alpha}\phi^{\alpha})\right\} \tag{4-11-1}$$

式中：ϕ^{α} 代表所有场量；$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{f}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$，$\mathscr{L}_{f}$是与规范条件有关的规范固定项，$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$是鬼粒子项(规范补偿项)．考虑位形空间无穷小整体变换：

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}\tau^{\mu\sigma}\ \ (x,\cdots\phi_{,\mu(m)}\cdots)\\ \phi^{\alpha\prime}&=\phi^{\alpha}+\Delta\phi^{\alpha}=\phi^{\alpha}+\varepsilon_{\sigma}\xi^{\alpha\sigma}\ \ (x,\cdots\phi_{,\mu(m)}\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{4-11-2}$$

假设有效作用量 I_{eff}在式(4-11-2)变换下不变，将式(4-11-2)定域化，考虑如下的变换：

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}(x)\tau^{\mu\sigma}\ \ (x,\cdots\phi_{,\mu(m)}\cdots)\\ \phi^{\alpha\prime}&=\phi^{\alpha}+\Delta\phi^{\alpha}=\phi^{\alpha}+\varepsilon_{\sigma}(x)\xi^{\alpha\sigma}\ \ (x,\cdots\phi_{,\mu(m)}\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{4-11-3}$$

其中 $\varepsilon_{\sigma}(x)$为无穷小任意函数，它们及其各级微商在时空区域边界上为零．在式(4-11-3)变换下有效作用量的变分为

$$\begin{aligned}\Delta I_{\mathrm{eff}}=&\int\mathrm{d}^{4}x\varepsilon_{\sigma}(x)\left\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^{\alpha}}(\xi^{\alpha\sigma}-\phi^{\alpha}_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_{\mu}[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\right.\\&\left.\sum_{n=0}^{N-1}\Pi_{\alpha}^{\mu\nu(n)}\ \partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma}-\phi^{\alpha}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})]\right\}+\\&\int\mathrm{d}^{4}x\left\{[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\sum_{n=0}^{N-1}\Pi_{\alpha}^{\mu\nu(n)}\ \partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma}-\phi^{\alpha}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})]\,\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x)\right\}\end{aligned} \tag{4-11-4}$$

由于假设有效作用量在式(4-11-2)变换下不变，第一个积分为零，根据 $\varepsilon_{\sigma}(x)$的边界条件，式(4-11-4)可写为

$$\begin{aligned}\Delta I_{\mathrm{eff}}=&-\int\mathrm{d}^{4}x\varepsilon_{\sigma}(x)\ \partial_{\mu}[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\\&\sum_{n=0}^{N-1}\Pi_{\alpha}^{\mu\nu(n)}\ \partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma}-\phi^{\alpha}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})]\end{aligned} \tag{4-11-5}$$

设变换式(4-11-3)的 Jacobi 行列式为 1，由于生成泛函式(4-11-1)在式(4-11-3)变换下不变，根据 $\varepsilon_{\sigma}(x)$的边界条件，有

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\phi^{\alpha}\left\{1-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x\,\varepsilon_{\sigma}(x)\ \partial_{\mu}[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}+\sum_{n=0}^{N-1}\Pi_{\alpha}^{\mu\nu(n)}\ \partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma}-\phi^{\alpha}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})]+\right.$$

$$
\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J_\alpha \varepsilon_\sigma(x)(\xi^{\alpha\sigma} - \alpha^\alpha_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\Big\}\cdot
$$

$$
\exp\Big\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J_\alpha \phi^\alpha\Big\} \tag{4-11-6}
$$

将式(4-11-6)对 $\varepsilon_\sigma(x)$ 求泛函微商，得

$$
\int \mathscr{D}\phi^\alpha\{\partial_\mu[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_\alpha^{\mu\nu(n)}\partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})] -
$$

$$
J_\alpha(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\}\exp\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J_\alpha \phi^\alpha\} = 0 \tag{4-11-7}
$$

将式(4-11-7)关于 $J(x_j)$ 求 n 次泛函微商，可得

$$
\int \mathscr{D}\phi^\alpha\Big(\Big\{\partial_\mu\Big[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_\alpha^{\mu\nu(n)}\partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})\Big] -
$$

$$
J_\alpha(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\Big\}\phi^\alpha(x_1)\cdots\phi^\alpha(x_n) + (-\mathrm{i})\sum_j \phi^\alpha(x_1)\cdots\cdot
$$

$$
\phi^\alpha(x_{j-1})\phi^\alpha(x_{j+1})\cdots\phi^\alpha(x_n)N^\sigma\delta(x - x_j)\Big)\cdot
$$

$$
\exp\Big\{\mathrm{i}I_{\mathrm{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J_\alpha \phi^\alpha\Big\} = 0 \tag{4-11-8}
$$

其中 $N^\sigma = -(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})$，让式(4-11-8)中外源 $J_\alpha = 0$，得

$$
\langle 0 \mid T^*\{\partial_\mu[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_\alpha^{\mu\nu(n)}\partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})]\}\cdot
$$

$$
\phi^\alpha(x_1)\cdots\phi^\alpha(x_n) \mid 0\rangle = \mathrm{i}\sum_j \langle 0 \mid T^*\phi^\alpha(x_1)\cdots\cdot \tag{4-11-9}
$$

$$
\phi^\alpha(x_{j-1})\phi^\alpha(x_{j+1})\cdots\phi^\alpha(x_n)N^\sigma \mid 0\rangle\delta(x - x_j)
$$

固定 t，让 t_1，…，$t_m \to +\infty$，t_{m+1}，…，$t_n \to -\infty$，可得

$$
\langle \mathrm{out}, m \mid \{\partial_\mu[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_\alpha^{\mu\nu(n)}\cdot\partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})]\} \mid n - m, \mathrm{in}\rangle = 0 \tag{4-11-10}
$$

m 和 n 任意，因而有

$$
\partial_\mu[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_\alpha^{\mu\nu(n)}\partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})] = 0 \tag{4-11-11}
$$

将式(4-11-11)对场所在的区域积分，利用 Gauss 定理及场在区域的边界上为零的性质，可得量子守恒量(算符)为

$$
Q^\sigma = \int \mathrm{d}^3 x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_\alpha^{0\nu(n)}\partial_{\nu(n)}(\xi^{\alpha\sigma} - \phi^\alpha_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})] \tag{4-11-12}
$$

式(4-11-12)与经典 Noether 定理的区别在于，在经典情形，整体变换是保

持原始作用量 $I=\int \mathscr{L}\mathrm{d}^4x$ 不变，这里在式(4-11-2)变换下，有效作用量 I_{eff} 不变. 而式(4-11-12)中出现的是 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 而不是 $\mathscr{L}$. 此外，在量子水平上，变换的行列式必须为 1，才能保证所示守恒量式(4-11-12)存在. 可见，经典理论中对称性联系的守恒量，在量子理论中不一定再保持.

4-11-2 相空间中的整体对称性和量子守恒律

规范不变的系统，其相空间描述必含约束，此时，相空间 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}\psi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\mathscr{D}\lambda_m\mathscr{D}C_l\mathscr{D}\overline{C}_l\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\left(I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\int \mathrm{d}^4x J^{(s)}_{\alpha}\psi^{\alpha}_{(s)}\right)\right\} \qquad (4\text{-}11\text{-}13)$$

式中：

$$I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x[\pi^{(s)}_{\alpha}\psi^{\alpha}_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda_m\Phi_m+$$

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\overline{C}_k\{\Phi_k(x),\Phi_l(y)\}C_l(y)]$$

$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 是场 ψ^{α} 的广义正则 Hamilton 量密度，$\{\Phi_m\}$是所有约束(对仅含第二类约束的系统)或约束和规范条件的总体(对含第一类约束的系统)，$\lambda_m(x)$是 Lagrange 乘子. 为了简便，让 $\phi_{(s)}=(\psi^{\alpha}_{(s)},\ \lambda_m,\ C_l,\ \overline{C}_k)$，$J^{(s)}=(J^{(s)}_{\alpha},\ \eta_m,\ \xi_k,\ \overline{\xi}_l)$，$\eta_m$，$\xi_k$，$\overline{\xi}_l$ 分别是 λ_m，$\overline{C}_k$，C_l 的外源，$\pi_{(s)}=(\pi^{\alpha}_{(s)})$. 则式(4-11-13)为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}\phi_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}\exp\left\{\mathrm{i}\left(I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\int \mathrm{d}^4xJ^{(s)}\phi_{(s)}\right)\right\} \qquad (4\text{-}11\text{-}14)$$

动力系统的正则整体对称性在经典的情况下产生守恒律[11]. 现在考虑一个和整体变换式(4-8-5)相联系的定域变换

$$\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime}&=x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\phi_{(s)},\pi^{(s)})\\
\phi'_{(s)}(x')&=\phi_{(s)}(x)+\Delta\phi_{(s)}=\\
&\qquad\phi_{(s)}(x)+\varepsilon_{\sigma}(x)\xi^{\sigma}_{(s)}(x,\phi_{(s)},\pi^{(s)})\\
\pi^{(s)\prime}(x')&=\pi^{(s)}+\Delta\pi^{(s)}=\\
&\qquad\pi^{(s)}+\varepsilon_{\sigma}(x)\eta^{(s)\sigma}(x,\phi_{(s)},\pi^{(s)})
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}11\text{-}15)$$

$\varepsilon_{\sigma}(x)(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$是无穷小任意函数，它们的值和导数在时空区域的

边界上为零. 假设有效正则作用量在整体变换(即式(4-11-15)中的 $\varepsilon_\sigma(x)$用参数 ε_σ 代替)下是不变的，则在定域变换下，有

$$\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}} = -\int \mathrm{d}^4 x \varepsilon_\sigma(x) \{ \partial_\mu[(\pi^{(s)}\phi_{(s+1)} - \mathcal{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi^{(s)}(\xi^\sigma_{(s)} - \phi_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \tag{4-11-16}$$

假设变换式(4-11-15)的行列式为 1，相空间的生成泛函式(4-11-14)在定域变换式(4-11-15)下是不变的，即 $\frac{\delta Z[J]}{\delta\varepsilon_\sigma(x)}\mid_{\varepsilon_\sigma=0} = 0$. 将(4-11-15)和(4-11-16)代入(4-11-14)并对 $\varepsilon_\sigma(x)$求泛函微商，可得

$$\int \mathcal{D}\phi_{(s)}\mathcal{D}\pi^{(s)}\{ \partial_\mu[(\pi^{(s)}\phi_{(s+1)} - \mathcal{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi^{(s)}(\xi^\sigma_{(s)} - \phi_{(s),\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x(\pi^{(s)}\phi_{(s+1)} - \mathcal{H}_{\mathrm{c}} + J^{(s)}\phi_{(s)})\right\} = 0 \tag{4-11-17}$$

对外源求微商，仿照以前的做法，可得系统的量子守恒量，即

$$Q^\sigma = \int \mathrm{d}^3 x[\pi^{(s)}(\xi^\sigma_{(s)} - \phi_{(s),k}\tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma}] \tag{4-11-18}$$

其中 $\mathcal{H}_{\mathrm{eff}}$是与 $\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}$相应的有效正则作用量.

4-11-3 高阶微商 Maxwell 非 Abel CS 标量场

高阶微商 Maxwell 非 Abel CS 规范场 A^a_μ 与标量场 ϕ 耦合的 Lagrange 量密度为

$$\mathcal{L} = (\mathrm{D}_\mu\phi)^+ (D^\mu\phi) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A^a_\nu A^a_\rho + \frac{1}{3}f^{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho) - \frac{c^2}{4\pi}\mathrm{D}_\rho F^a_{\mu\nu}\mathrm{D}^\rho F^{a\mu\nu} \tag{4-11-19}$$

其中 $\mathrm{D}_\mu\phi^\alpha = \partial_\mu\phi^\alpha + gA^\gamma_\mu T^\gamma_{\alpha\beta}\phi^\beta$，$T^a$ 为规范群的生成元，$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$.

利用 FP 量子化方法，取 Coulomb 规范，从 Green 函数的生成泛函导出系统的有效 Lagrange 量为

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{eff}} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\mathrm{gh}} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^i A^{ia})^2 \\ \mathcal{L}_{\mathrm{gh}} &= -\partial^i \overline{C}^a \mathrm{D}^a_{bi} C^b \end{aligned}\right\} \tag{4-11-20}$$

其中$\overline{C^a}$和 C^a 为鬼粒子场，α 为参数. 在下列 BRS 变换

$$
\left.\begin{aligned}
\delta\phi &=- \mathrm{i}\tau T^a C^a \phi, \quad \delta\phi^+ = \mathrm{i}\tau\phi^+ T^a C^a \\
\delta A_\mu^a &=- \tau D_{b\mu}^a C^b, \quad \delta C^a = \frac{1}{2}\tau f^{abc} C_b C_c \\
\delta \overline{C}^a &=- \frac{\tau}{\alpha}\, \partial^\mu A_\mu^a
\end{aligned}\right\} \tag{4-11-21}
$$

下有效作用量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$是不变的，其中 τ 为 Grassmann 参量．由式(4-11-12)可求出系统的量子 BRS 守恒荷．$\mathscr{L}_{\text{eff}}$在空间转动变换下保持不变且变换的行列式为 1．由式(4-11-12)可求出系统量子水平的守恒角动量，其结果与经典 Noether 定理不同的是需计及鬼粒子对角动量的贡献．

下面在相空间中来分析，通过 Ostrogradsky 变换，A_μ，$B_\mu=\dot{A}_\mu$，ϕ，ϕ^+相 应的正则动量分别为

$$
\left.\begin{aligned}
P^{a\mu} &= F^{a\mu 0} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{0\mu\nu} A_\nu^a - \frac{c^2}{\pi}\mathrm{D}_i \mathrm{D}^i F^{a\mu\nu} - \\
&\qquad \mathrm{D}_0 Q^{a\mu} - \frac{c^2}{\pi}\mathrm{D}_i \mathrm{D}_0 F^{a\mu i} + f^{abc} A_0^c Q^{b\mu} \\
Q^{a\mu} &= \frac{c^2}{\pi}\mathrm{D}_0 F^{a\mu 0} \\
\pi &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = (\mathrm{D}_0\phi)^+ \\
\pi^+ &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^+} = \mathrm{D}_0\phi
\end{aligned}\right\} \tag{4-11-22}
$$

初级约束为

$$
\Lambda^{(0)a} = Q^{a0} \approx 0 \tag{4-11-23}
$$

由约束的自洽性条件可得所有的次级约束，即

$$
\left.\begin{aligned}
\Lambda^{(1)a} &=- P^{a0} + \mathrm{D}_i Q^{ai} \approx 0 \\
\Lambda^{(2)a} &=- \mathrm{D}_i P^{ai} - \frac{\kappa}{4\pi}\,\partial_i A_j^a \varepsilon^{ij} - \\
&\qquad f^{abc} B_i^b Q^{ci} - f^{abc} A_0^b \mathrm{D}_i Q^{ci} \approx 0
\end{aligned}\right\} \tag{4-11-24}
$$

不难验证，$\Lambda^{(0)}$，$\Lambda^{(1)a}$，$\Lambda^{(2)a}$都是第一类约束．对于这些第一类约束分别取规范条件

$$
\Omega_0^a = B_0^a \approx 0, \quad \Omega_1^a = \partial_i B^{ai} \approx 0, \quad \Omega_2^a = \partial_i A^{ai} \approx 0 \tag{4-11-25}
$$

由 FS 量子化方法，可得 Green 函数的生成泛函，即

$$
\left.\begin{aligned}
Z[J]=\int & \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}P^{a\mu} \mathscr{D}B_\mu^a \mathscr{D}Q^{a\mu} \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\pi \mathscr{D}\phi^+ \mathscr{D}\pi^+ \cdot \\
& \prod_l \delta(\Lambda_l)\delta(\Omega_l)\det\{\Lambda,\Omega\} \cdot \\
& \exp\left\{ i\int d^3x (B_\mu^a P^{a\mu} + \dot{B}_\mu^a Q^{a\mu} + \pi\dot{\phi} + \pi^+\dot{\phi}^+ - \right. \\
& \left. \mathscr{H}_c + J_{1a}^\mu A_\mu^a + J_{2a}^\mu B_\mu^a + J_1\phi + J_1^+\phi^+) \right\}
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}11\text{-}26)
$$

式中

$$
\det\{\Lambda,\ \Omega\}=\det \mathbf{A}\cdot\det M^{ab}\cdot\det M^{ab},\ \mathbf{A}=-\delta^{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
$$

记 $\boldsymbol{M}_{\rm C}=[M_{\rm C}^{ab}]$，因子 $\det \boldsymbol{M}_{\rm C}\delta(\partial_i A^{ai})$ 可用 $\det \boldsymbol{M}_{\rm L}\delta(\partial_\mu A^{a\mu})$ 来代替，$\boldsymbol{M}_{\rm L}=(\delta^{ab}\partial_\mu\partial^\mu - f^{abc}A_\mu^c\partial^\mu)\delta(x-y)$，行列式通过 Grassmann 变量 $C^a(x)$，$\overline{C}^a(y)$ 的积分来表达，由理论的规范无关性，将规范条件因子写在指数上(利用 δ-函数的性质)．于是生成泛函为

$$
\left.\begin{aligned}
Z[J]=\int & \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}P^{a\mu} \mathscr{D}B_\mu^a \mathscr{D}Q^{a\mu} \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\pi \mathscr{D}\phi^+ \mathscr{D}\pi^+ \mathscr{D}\lambda \mathscr{D}C^a \mathscr{D}\overline{C}^a \cdot \\
& \exp\{ i\int d^3x [\mathscr{L}_{\rm eff}^{\rm p} + J_{1a}^\mu A_\mu^a + J_{2a}^\mu B_\mu^a + J_1\phi + \\
& J_1^+\phi^+ + \overline{J}_{3a}C^a + \overline{C}^a J_{3a}] + \lambda_i^a J_a^i \}
\end{aligned}\right\}
$$

(4-11-27)

其中

$$
\left.\begin{aligned}
& \mathscr{L}_{\rm eff}^{\rm p} = \mathscr{L}^{\rm p} + \mathscr{L}_{\rm g} + \mathscr{L}_{\rm gh} + \mathscr{L}_{\rm m} \\
& \mathscr{L}^{\rm p} = B_\mu^a P^{a\mu} + \dot{B}_\mu^a Q^{a\mu} + \dot{\phi}\pi + \dot{\phi}^+\pi^+ - \mathscr{H}_c \\
& \mathscr{L}_{\rm g} = -\frac{1}{2\alpha_2}(\Omega_2^a)^2 = -\frac{1}{2\alpha_2}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 \\
& \mathscr{L}_{\rm gh} = -\partial^\mu \overline{C}^a D_{b\mu}^a C_b \\
& \mathscr{L}_{\rm m} = \lambda_0^a \Lambda^{(0)a} + \lambda_1^a \Lambda^{(1)a} + \lambda_2^a \Lambda^{(2)a} - \\
& \qquad \frac{1}{2\alpha_0}(\Omega_0^a)^2 - \frac{1}{2\alpha_1}(\Omega_1^a)^2
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}11\text{-}28)
$$

在上面的生成泛函中对鬼场 $\overline{C}^a(x)$ 和 $C^a(x)$ 以及乘子场 λ_i^a 分别引入外源 J_{3a}，$\overline{J}_{3a}$，J_a^i 考虑相空间中场的 BRS 变换：

$$
\left.\begin{aligned}
& \delta\phi = -i\tau T^a C^a \phi,\quad \delta\pi = i\tau\pi T^a C^a \\
& \delta\phi^+ = i\tau\phi^+ T^a C^a,\quad \delta\pi^+ = -i\tau T^a C^a \pi^+ \\
& \delta A_\mu^a = -\tau D_{b\mu}^a C^b,\quad \delta P^{a\mu} = f_{bc}^a P^{c\mu} C^b \tau - f_{bc}^a Q^{c\mu}\dot{C}^b \\
& \delta B_\mu^a = \partial_0(-\tau D_{b\mu}^a C^b),\quad \delta Q^{a\mu} = f_{bc}^a Q^{c\mu} C^b \tau \\
& \delta C^a = \frac{1}{2} f^{abc} C_b C_c,\quad \delta\overline{C}^a = -\frac{1}{\alpha_2}\partial^\mu A_\mu^a
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}11\text{-}29)
$$

$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}$中的前三项之和在 BRS 变换下不变，由第一类约束产生的规范变换仍保持第一类约束不离开约束超曲面. 即是说 $\delta\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}\approx 0$，且 BRS 变换的 Jacobi 行列式为 1，这样由式(4-11-18)就得系统在量子水平下的 BRS 守恒荷

$$Q=\int \mathrm{d}^2x(P^{a\mu}\delta A^a_\mu+Q^{a\mu}\delta B^a_\mu+\pi\,\delta\phi+ \\ \delta\phi^+\,\pi^++\overline{R}_a\delta C^a+\delta\,\overline{C}^aR_a) \tag{4-11-30}$$

式中：$\overline{R}_a$ 和 R_a 分别为鬼场 C^a 和$\overline{C}^a$ 的正则共轭动量，将式(4-11-22)代入式(4-11-30)，可见其结果与由位形空间中导致的结果相同.

有效正则 Lagrange 量 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}$在$(x_1, x_2)$平面内的空间转动下不变，且变换的行列式为 1，又 $\tau^{0\sigma}=0$. 因此，系统在量子水平下的守恒角动量为

$$\begin{aligned}J_{12}=\int \mathrm{d}^2x\Big\{&P^{a\mu}\left(x_2\frac{\partial A^a_\mu}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial A^a_\mu}{\partial x_2}\right)+Q^{a\mu}\left(x_2\frac{\partial B^a_\mu}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial B^a_\mu}{\partial x_2}\right)+\\&P^{a\mu}\Big(\sum_{12}\Big)_{\mu\nu}A^a_\nu+Q^{a\mu}\Big(\sum_{12}\Big)_{\mu\nu}B^a_\nu+\pi\left(x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)+\\&\left(x_2\frac{\partial\phi^+}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\phi^+}{\partial x_2}\right)\pi^++\overline{R}_a\left(x_2\frac{\partial C^a}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial C^a}{\partial x_2}\right)+\\&\left(x_2\frac{\partial\overline{C}^a}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\overline{C}^a}{\partial x_2}\right)R_a\end{aligned} \tag{4-11-31}$$

其中$(\sum_{jk})_{\mu\nu}=\eta_{j\mu}\eta_{k\nu}-\eta_{j\nu}\eta_{k\mu}$. 因此，量子水平下的角动量包括鬼场的贡献. 将式(4-11-22)代入式(4-11-31)，其结果也与由位形空间所得结果相同. 以上讨论均未考虑重整化效应，对非 Abel CS 理论，重整化后 κ 值要产生移动[1].

上面的讨论，从位形空间生成泛函和从相空间生成泛函得到的结果相同. 这表明 FP 方法对这个高阶微商 Maxwell 非 Abel CS 场和复标量场耦合模型是适用的，但相空间中的路径积分比位形空间的路径积分更基本. 因为，在相空间中，可以避免考虑动量是否可积的问题. 同时也可以看出，得到的量子守恒角动量与由未量子化的原始 Lagrange 量按经典 Noether 定理导出的结果不同之处在于必须计算鬼粒子场对系统角动量的贡献.

4-12 非定域量子 Noether 恒等式及其应用

在经典理论中，相空间定域变换导致的正则 Noether 恒等式，在场论中有重要应用[20]，例如，分析系统的 Dirac 约束，研究约束乘子的性质[21]，讨论 Dirac 猜想等[22]，在某些情形下，由正则 Noether 恒等式还可导出系统相应的守恒律[23]. 这时在导出守恒律时应用的是经典 Noether 恒等式，结

合了量子化后的有效 Lagrange 量，是不彻底的量子理论. 早先的工作中已建立了整体对称下量子水平的 Noether(第一)定理[24-25]，并导出了定域变换下的量子 Noether 恒等式[26]. 高阶微商理论与引力理论、规范场论、超对称和弦理论等密切相关，受到人们的关注. 在杨-Mills 场论和规范场的共形对称等研究中，均涉及非定域变换. 这里将讨论该系统在定域和非定域变换下的量子 Noether 恒等式[27].

在动力系统的路径积分量子化形式中，相空间路径积分比位形空间路径积分更普遍. 在一些特殊情形，当作出前者对动量的路径积分后，可将其化为后者(如杨-Mills 场). 对于规范不变系统，更直观更简便的路径积分量子化是 FP 方法. FP 方法给出的结果有时可从约束 Hamilton 系统路径积分量子化的结果作出对动量的路径积分而得到.

4-12-1 非定域量子正则 Noether 恒等式

设场由高阶微商正规 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}(\varphi^a, \varphi^a_{,\mu}, \cdots, \varphi^a_{,\mu(N)})$描述，由 Ostrogradsky变换引入 $\varphi^a_{(s)}$的正则动量 $\pi^{(s)}_a$，系统 Green 函数的相空间生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^a_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_a\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J^s_a\varphi^a_{(s)}+K^a_s\pi^{(s)}_a)\right\}\qquad(4\text{-}12\text{-}1)$$

式中：$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\pi^{(s)}_a\dot{\varphi}^a_{(s+1)}-\mathscr{H}_c$. $\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量密度；J^s_a 和 K^a_s 分别为 $\varphi^a_{(s)}$和 $\pi^{(s)}_a$ 的外源. 考虑扩展相空间中的无穷小定域和非定域变换：

$$\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\
\varphi^{a\prime}_{(s)}(x')&=\varphi^a_{(s)}(x)+\Delta\varphi^a_{(s)}(x)=\\
&\pi^a_{(s)}(x)+S^a_{s\sigma}\varepsilon^\sigma(x)+\\
&\int\mathrm{d}^4yE(x,y)A^a_{s\sigma}(y)\varepsilon^\sigma(y)\\
\pi^{(s)\prime}_a(x')&=\pi^{(s)}_a(x)+\Delta\pi^{(s)}_a(x)=\\
&\pi^{(s)}_a(x)+T^s_{a\sigma}\varepsilon^\sigma(x)+\\
&\int\mathrm{d}^4yF(x,y)B^s_{a\sigma}(y)\varepsilon^\sigma(y)
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}12\text{-}2)$$

式中：$E(x, y)$和 $F(x, y)$为给定函数；R^μ_σ，$S^a_{s\sigma}$，$T^s_{a\sigma}$，$A^a_{s\sigma}$和 $B^s_{a\sigma}$为线性微分算符；$\varepsilon^\sigma(x)$，$\varepsilon^\sigma(y)(\sigma=1, 2, \cdots, r)$为无穷小任意函数，它们的值及其微商在时空区域的边界上为零. 在式(4-12-2)变换下，设正则作用量的变更为

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=\Delta\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4xU_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\qquad(4\text{-}12\text{-}3)$$

式中：U_σ 为线性微分算符. 场量变换的 Jacobi 行列式记为$\bar{J}[\varphi, \pi, \varepsilon]=$

$1+J_1[\varphi,\ \pi,\ \varepsilon]$;在式(4-12-2)变换下生成泛函式(4-12-1)不变，有

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\Big(1+J_1+\mathrm{i}\Delta I^{\mathrm{p}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\{J^s_\alpha\delta\varphi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_s\delta\pi^{(s)}_\alpha+\partial_\mu[(J^s_\alpha\varphi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_s\pi^{(s)}_\alpha)\Delta x^\mu]\}\Big)\cdot\exp\Big\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J^s_\alpha\varphi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_s\pi^{(s)}_\alpha)\Big\}\tag{4-12-4}$$

式中

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}}\delta\varphi^\alpha_{(s)}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}\delta\pi^{(s)}_\alpha+\mathrm{D}(\pi^{(s)}_\alpha\delta\varphi^\alpha_{(s)})+\partial_\mu[(\pi^{(s)}_\alpha\varphi^\alpha_{(s+1)}-\mathscr{H}_c)\Delta x^\mu]\}\tag{4-12-5}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}}=-\dot{\pi}^{(s)}_\alpha-\frac{\delta H_c}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}},\quad\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}=\dot{\varphi}^\alpha_{(s)}-\frac{\delta H_c}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}\tag{4-12-6}$$

$$\delta\varphi^\alpha_{(s)}=\Delta\varphi^\alpha_{(s)}-\varphi^\alpha_{(s),\mu}\Delta x^\mu,\quad\delta\pi^{(s)}_\alpha=\Delta\pi^{(s)}_\alpha-\pi^{(s)}_{\alpha,\mu}\Delta x^\mu\tag{4-12-7}$$

而 $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，$H_c$ 为正则 Hamilton 量. 根据 $\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，由式(4-12-3)～式(4-12-5)，有

$$\int\mathscr{D}\varphi^\alpha_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha\int\mathrm{d}^4x\Big[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}}\delta\varphi^\alpha_{(s)}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}\delta\pi^{(s)}_\alpha+\mathrm{D}(\pi^{(s)}_\alpha\delta\varphi^\alpha_{(s)})-U_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\Big]\cdot\exp\Big\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J^s_\alpha\varphi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_s\pi^{(s)}_\alpha)\Big\}=0\tag{4-12-8}$$

将式(4-12-2)和式(4-12-7)代入式(4-12-8)，对与微分算符有关的项作分部积分，利用$\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，并对$\varepsilon^\sigma(x)$求泛函微商，得

$$\int\mathscr{D}\varphi^\alpha_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha\Big\{\widetilde{S}^\alpha_{s\sigma}(x)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}(x)}+\widetilde{T}^s_{\alpha\sigma}\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha(x)}-\widetilde{R}^\mu_\sigma(x)\Big[\varphi^\alpha_{(s),\mu}(x)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}(x)}+\pi^{(s)}_{\alpha,\mu}(x)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha(x)}\Big]+\int\mathrm{d}^4y\Big[\widetilde{A}^\alpha_{s\sigma}(y)\Big(E(y,x)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^\alpha_{(s)}(y)}+\mathrm{D}(\pi^{(s)}_\alpha(y)E(y,x))\Big)+\widetilde{B}^s_{\alpha\sigma}\Big(F(y,x)\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha(y)}\Big)\Big]-\widetilde{U}_\sigma(1)\Big\}\cdot\exp\Big\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+J^s_\alpha\varphi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_s\pi^{(s)}_\alpha)\Big\}=0\tag{4-12-9}$$

式中：$\widetilde{S}^\alpha_{s\sigma}$，$\widetilde{T}^s_{\alpha\sigma}$，$\widetilde{R}^\mu_\sigma$，$\widetilde{A}^\alpha_{s\sigma}$，$\widetilde{B}^s_{\alpha\sigma}$和$\widetilde{U}_\sigma$分别为$S^\alpha_{s\sigma}$，$T^s_{\alpha\sigma}$，$R^\mu_\sigma$，$A^\alpha_{s\sigma}$，$B^s_{\alpha\sigma}$和$U_\sigma$的伴随算符. 将式(4-12-9)关于$J^0_\alpha(x)$求 n 次泛函微商后，让$J^s_\alpha=K^\alpha_s=0$，得

$$
\begin{aligned}
&\langle 0 \mid T^{*}\left\{\widetilde{S}_{s\sigma}^{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\widetilde{T}_{\alpha\sigma}^{s} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}-\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left[\varphi_{(s), \mu}^{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\pi_{\alpha, \mu}^{(s)} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}\right]+\right. \\
&\int \mathrm{d}^{4} y\left[\widetilde{A}_{s\sigma}^{\alpha}\left(E(y, x) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\mathrm{D}\left(\pi_{\alpha}^{(s)} E(y, x)\right)\right)+\right. \\
&\left.\left.\widetilde{B}_{\alpha\sigma}^{s}\left(F(y, x) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}\right)\right]-\widetilde{U}_{\sigma}(1)\right\} \cdot \\
&\varphi^{\alpha}\left(x_{1}\right) \varphi^{\alpha}\left(x_{2}\right) \cdots \varphi^{\alpha}\left(x_{n}\right) \mid 0\rangle=0 \qquad (4\text{-}12\text{-}10)
\end{aligned}
$$

式中：T^{*} 是一种特定的编时乘积. 固定 t，并让

$$
t_{1}, t_{2}, \cdots, t_{m} \rightarrow+\infty ; \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_{n} \rightarrow-\infty
$$

于是式(4-12-10)化为[20]

$$
\begin{aligned}
&\langle\text{out}, m\left|\left\{\widetilde{S}_{s\sigma}^{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\widetilde{T}_{\alpha\sigma}^{s} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}-\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left[\varphi_{(s), \mu}^{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\pi_{\alpha, \mu}^{(s)} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}\right]+\right.\right. \\
&\int \mathrm{d}^{4} y\left[\widetilde{A}_{s\sigma}^{\alpha}\left(E(y, x) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\mathrm{D}\left(\pi_{\alpha}^{(s)} E(y, x)\right)\right)+\right. \\
&\left.\left.\widetilde{B}_{\alpha\sigma}^{s}\left(F(y, x) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}\right)\right]-\widetilde{U}_{\sigma}(1)\right\}\Big| n-m, \text{in}\rangle=0
\end{aligned}
\qquad (4\text{-}12\text{-}11)
$$

由于 m，n 任意，从式(4-12-11)得

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{S}_{s\sigma}^{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\widetilde{T}_{\alpha\sigma}^{s} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}-\widetilde{R}_{\sigma}^{\mu}\left[\varphi_{(s), \mu}^{\alpha} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\pi_{\alpha, \mu}^{(s)} \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}\right]+ \\
&\int \mathrm{d}^{4} y\left[\widetilde{A}_{s\sigma}^{\alpha}\left(E(y, x) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^{\alpha}}+\mathrm{D}\left(\pi_{\alpha}^{(s)} E(y, x)\right)\right)+\right. \\
&\left.\widetilde{B}_{\alpha\sigma}^{s}\left(F(y, x) \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi_{\alpha}^{(s)}}\right)\right]-\widetilde{U}_{\sigma}(1)=0 \qquad (4\text{-}12\text{-}12)
\end{aligned}
$$

式(4-12-12)为正规 Lagrange 量系统在定域和非定域变换下的量子正则 Noether 恒等式.

对于含高阶微商的奇异 Lagrange 量系统，其 Green 函数的相空间生成泛函可写为

$$
Z[J, K]=\int \mathscr{D} \varphi_{(s)}^{\alpha} \mathscr{D} \pi_{\alpha}^{(s)} \exp \left\{\mathrm{i} \int \mathrm{d}^{4} x\left(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{\alpha}^{s} \varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{s}^{\alpha} \pi_{\alpha}^{(s)}\right)\right\} \qquad (4\text{-}12\text{-}13)
$$

式中

$$
\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\lambda_{k} \Phi_{k}+\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^{4} y\, \overline{C}_{l}(x)\left\{\Phi_{l}(x), \Phi_{m}(y)\right\} C_{m}(y) \qquad (4\text{-}12\text{-}14)
$$

而 $\varphi_{(s)}^{\alpha}$ 代表($\varphi_{(s)}^{\alpha}$，$\overline{C}_{l}$，C_{m}，λ_{k}). 对含第二类约束的系统，$\{\Phi\}$ 代表所有第二

类约束；对含第一类约束的系统，$\{\Phi_k\}$包括所有第一类约束和规范条件，$\{\cdot,\cdot\}$代表场的广义 Poisson 括号，$\overline{C}_l(x)$和 $C_m(x)$为 Grassmann 变量场，$\lambda_k(x)$为乘子场. 上述对正规 Lagrange 系统的讨论，也适用于奇异 Lagrange 系统，并同样可得量子正则 Noether 恒等式(4-12-12)，只要将相应的 I^{p} 改为 $I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$就行了. 无论变换式(4-12-2)的 Jacobi 行列式是否为 1，量子正则 Noether 恒等式均成立.

4-12-2 规范不变系统

高阶微商规范不变系统为广义约束 Hamilton 系统，该系统的路径积分量子化，可用 FP 方法来实现. 设系统规范不变的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\varphi,\ \varphi_{,\mu},\ \cdots,\ \varphi_{,\mu(N)})$，选取适当的规范条件，用 FP 方法得到系统位形空间中 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\varphi\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J\varphi)\right\}\qquad(4\text{-}12\text{-}15)$$

式中：J 为 φ 的外源；$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\mathrm{f}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$，$\mathscr{L}_{\mathrm{f}}$ 为规范固定项，它与规范条件有关，$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$为鬼粒子项.

考虑位形空间中的无穷小定域和非定域变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+R^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\ \varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+S_\sigma\varepsilon^\sigma(x)+\\ &\int\mathrm{d}^4yE(x,y)A_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}12\text{-}16)$$

式中：R^μ_σ，S_σ 和 A_σ 为线性微分算符；$\varepsilon^\sigma(x)$为无穷小任意函数. 其值及其各阶微商在时空区或边界上为零。式(2-12-16)变换下，设有效作用量的变更为

$$\Delta I_{\mathrm{eff}}=\Delta\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}^4xV_\sigma\varepsilon^\sigma(x)\qquad(4\text{-}12\text{-}17)$$

式中：V_σ 为线性微分算符. 场量变换的 Jacobi 行列式记为$\overline{J}[\varphi,\ \varepsilon]=1+J_1[\varphi,\ \varepsilon]$. 在式(2-12-16)变换下，生成泛函不变，有

$$Z[J]=\int\mathscr{D}\varphi\left\{1+J_1+\mathrm{i}\Delta I_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[J\delta\varphi+\partial_\mu(J\varphi\Delta x^\mu)]\right\}\cdot$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J\varphi)\right\}\qquad(4\text{-}12\text{-}18)$$

式中

$$\Delta I_{\text{eff}} = \int d^4 x \left\{ \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi} \left[(S_\sigma - \varphi_{,\mu} R_\sigma^\mu)\varepsilon^\sigma(x) + \int d^4 y E(x,y) A_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y) \right] + \partial_\mu (j_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma(x)) + \partial_\mu \left[\sum_{m=0}^{N-1} \Pi_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)} \cdot \partial_{\nu(m)} \int d^4 y E(x,y) A_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y) \right] \right\} \tag{4-12-19}$$

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi} = (-1)^m \partial_{\mu(m)} \mathscr{L}_{\text{eff}}^{\mu(m)}, \quad \mathscr{L}_{\text{eff}}^{\mu(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{\text{指标}m\text{的} \\ \text{所有排列}}} \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi_{,\mu(m)}} \tag{4-12-20}$$

$$j_\sigma^\mu = \mathscr{L}_{\text{eff}} R_\sigma^\mu + \sum_{m=0}^{N-1} \Pi_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)} \partial_{\nu(m)} (S_\sigma - \varphi_{,\mu} R_\sigma^\mu) \tag{4-12-21}$$

$$\Pi_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)} = \sum_{l=0}^{N-(m+1)} (-1)^l \partial_{\lambda(l)} \mathscr{L}_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)\lambda(l)} \tag{4-12-22}$$

由式(2-12-16)～式(2-12-22)，注意到 $\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，有

$$\int \mathscr{D}\varphi \int d^4 x \left\{ \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi} \left[(S_\sigma - \varphi_{,\mu} R_\sigma^\mu)\varepsilon^\sigma(x) + \int d^4 y E(x,y) A_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y) \right] - V_\sigma \varepsilon^\sigma(x) + \partial_\mu \left[\sum_{m=0}^{N-1} \Pi_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)} \partial_{\nu(m)} \int d^4 y E(x,y) A_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y) \right] \right\} \cdot \exp\left\{ i \int d^4 x (\mathscr{L}_{\text{eff}} + J\varphi) \right\} = 0 \tag{4-12-23}$$

将式(2-12-23)中与微分算符作用的项作分部积分，利用 $\varepsilon^\sigma(x)$的边界条件，然后对 $\varepsilon^\sigma(x)$求泛函微商，得

$$\int \mathscr{D}\varphi \left\{ \widetilde{S}_\sigma(x) \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi(x)} - \widetilde{R}_\sigma^\mu(x) \left(\varphi_{,\mu}(x) \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi(x)} \right) + \int d^4 y \widetilde{A}_\sigma(y) \left[E(y,x) \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi(y)} + \partial_\mu \left(\sum_{m=0}^{N-1} \Pi_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)} \partial_{\nu(m)} E(y,x) \right) \right] - \widetilde{V}_\sigma(1) \right\} \exp\left\{ i \int d^4 x (\mathscr{L}_{\text{eff}} + J\varphi) \right\} = 0 \tag{4-12-24}$$

式中：$\widetilde{S}_\sigma$，$\widetilde{R}_\sigma^\mu$，$\widetilde{A}_\sigma$ 和$\widetilde{V}_\sigma$ 分别为 S_σ，R_σ^μ，A_σ 和 V_σ 的伴随算符. 将式(2-12-23)关于 $J(x)$求 n 次泛函微商，让 $J=0$，固定 t，并让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \to +\infty; \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \to -\infty,$$

仿照前面的推导，可得

$$\widetilde{S}_\sigma \left(\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi} \right) - \widetilde{R}_\sigma^\mu \left(\varphi_{,\mu} \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi} \right) + \int d^4 y \widetilde{A}_\sigma \left[E(y,x) \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta\varphi} + \partial_\mu \left(\sum_{m=0}^{N-1} \Pi_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)} \partial_{\nu(m)} E(y,x) \right) \right] = \widetilde{V}_\sigma(1) \tag{4-12-25}$$

式(4-12-25)为高阶微商规范不变系统在位形空间中定域和非定域变换下的量子 Noether 恒等式，出现在该式中是量子化后的有效作用量 I_{eff}，而不是经典作用量 I.

4-12-3 量子守恒律

由量子 Noether 恒等式，在某些情形下，可导致量子守恒律. 为明确起见，考虑变换式(4-12-2)中 $E=F=0$，$\Delta x^{\mu}=0$ 的情形，而

$$\left.\begin{aligned} S_{s\sigma}^{\alpha} &= a_{s\sigma}^{\alpha} + a_{s\sigma}^{\alpha\mu}\,\partial_{\mu} + a_{s\sigma}^{\alpha\mu\nu}\,\partial_{\mu}\,\partial_{\nu} \\ T_{\alpha\sigma}^{s} &= b_{\alpha\sigma}^{s} + b_{\alpha\sigma}^{s\mu}\,\partial_{\mu} + b_{\alpha\sigma}^{s\mu\nu}\,\partial_{\mu}\,\partial_{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{4-12-26}$$

其中系统 a 和 b 等均是 x，$\varphi_{(s)}^{\alpha}$ 和 $\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数. 在式(4-12-2)和式(4-12-26)的变换下，设式(4-12-3)中的 U_{σ} 为

$$U_{\sigma} = u_{\sigma} + u_{\sigma}^{\mu}\,\partial_{\mu} + u_{\sigma}^{\mu\nu}\,\partial_{\mu}\,\partial_{\nu} \tag{4-12-27}$$

其中 u_{σ}，u_{σ}^{μ} 和 $u_{\sigma}^{\mu\nu}$ 均为 x，$\varphi_{(s)}^{\alpha}$ 和 $\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数. 此时量子正则 Noether 恒等式(4-12-12)成为

$$\begin{aligned} & a_{s\sigma}^{\alpha}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}} - \partial_{\mu}\left(a_{s\sigma}^{\alpha\mu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right) + \partial_{\mu}\,\partial_{\nu}\left(a_{s\sigma}^{\alpha\mu\nu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right) + \\ & b_{\alpha\sigma}^{s}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}} - \partial_{\mu}\left(b_{\alpha\sigma}^{s\mu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right) + \partial_{\mu}\,\partial_{\nu}\left(b_{\alpha\sigma}^{s\mu\nu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right) = \\ & u_{\sigma} - \partial_{\mu}u_{\sigma}^{\mu} + \partial_{\mu}\,\partial_{\nu}u_{\sigma}^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4-12-28}$$

在式(4-12-2)和式(4-12-26)变换下，由有效正则作用量的变更，有基本恒等式，即

$$\begin{aligned} & \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}(a_{s\sigma}^{\alpha} + a_{s\sigma}^{\alpha\mu}\,\partial_{\mu} + a_{s\sigma}^{\alpha\mu\nu}\,\partial_{\mu}\,\partial_{\nu})\varepsilon^{\sigma}(x) + \\ & \frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}(b_{\alpha\sigma}^{s} + b_{\alpha\sigma}^{s\mu}\,\partial_{\mu} + b_{\alpha\sigma}^{s\mu\nu}\,\partial_{\mu}\,\partial_{\nu})\varepsilon^{\sigma}(x) + \\ & \mathrm{D}[\pi_{\alpha}^{(s)}S_{s\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}(x)] = (u_{\sigma} + u_{\sigma}^{\mu}\,\partial_{\mu} + u_{\sigma}^{\mu\nu}\,\partial_{\mu}\,\partial_{\nu})\varepsilon^{\sigma}(x) \end{aligned} \tag{4-12-29}$$

将式(4-12-28)乘以 $\varepsilon^{\sigma}(x)$，对 σ 求和后与式(4-12-29)相减，得

$$\left.\begin{aligned} & \partial_{\mu}\left\{\left[a_{s\sigma}^{\alpha\mu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}} + b_{\alpha\sigma}^{s\mu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}} + \partial_{\nu}\left(a_{s\sigma}^{\alpha\mu\nu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right) - \right.\right. \\ & \left(a_{s\sigma}^{\alpha\mu\nu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}\right)\partial_{\nu} + \partial_{\nu}\left(b_{\alpha\sigma}^{s\mu\nu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right) - \\ & \left.\left.\left(b_{\alpha\sigma}^{s\mu\nu}\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}\right)\partial_{\nu} - u_{\sigma}^{\mu} + \partial_{\nu}u_{\sigma}^{\mu\nu} - u_{\sigma}^{\mu\nu}\,\partial_{\nu}\right]\right\}\varepsilon^{\sigma}(x) + \\ & \mathrm{D}[\pi_{\alpha}^{(s)}S_{s\sigma}^{\alpha}\varepsilon^{\sigma}(x)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-12-30}$$

从而得强守恒律，即

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x j_\sigma \varepsilon^\sigma(x) = \text{const} \tag{4-12-31}$$

$$j_\sigma = a_{s\sigma}^{\alpha 0} \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^\alpha} + b_{\alpha\sigma}^{s0} \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \pi_\alpha^{(s)}} + \partial_\nu \left(a_{s\sigma}^{\alpha 0 \nu} \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^\alpha} \right) - \left(a_{s\sigma}^{\alpha 0 \nu} \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^\alpha} \right) \partial_\nu +$$

$$\partial_\nu \left(b_{\alpha\sigma}^{s0\nu} \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \pi_\alpha^{(s)}} \right) - \left(b_{\alpha\sigma}^{s0\nu} \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \pi_\alpha^{(s)}} \right) \partial_\nu -$$

$$u_\sigma^0 + \partial_\nu u_\sigma^{0\nu} - u_\sigma^{0\nu} \partial_\nu + \pi_\alpha^{(s)} S_{s\sigma}^\alpha \tag{4-12-32}$$

当变换群有子群，且 $\varepsilon^\sigma(x) = \varepsilon_0^\rho \zeta_\rho^\sigma(x)$，其中 ε_0^ρ 为参数，$\zeta_\rho^\sigma(x)$ 为给定函数，此时强守恒律为

$$Q_\rho = \int \mathrm{d}^3 x j_\sigma \zeta_\rho^\sigma = \text{const} \tag{4-12-33}$$

导出式(4-12-31)和式(4-12-33)时，未利用系统的量子运动方程. 根据系统的量子运动方程：$\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \varphi_{(s)}^\alpha} = 0$，$\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta \pi_\alpha^{(s)}} = 0$，由式(4-12-31)可得系统的(弱)量子守恒律. 当系统的有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 在上述变换下不变时，此时相应的(弱)量子守恒律为

$$Q_\rho^w = \int \mathrm{d}^3 x \pi_\alpha^{(s)} S_{s\sigma}^\alpha \zeta_\rho^\sigma = \text{const} \tag{4-12-34}$$

此结果恰为有限李群对称(整体对称)下的量子守恒律. 这里给出的求量子守恒律的程式与量子正则 Noether(第一)定理完全不同.

对高阶微商规范不变系统，在式(4-12-16)中 $\Delta x^\mu = 0$，$E = 0$，而 $S_\sigma = a_\sigma + a_\sigma^\mu \partial_\mu + a_\sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$；在式(4-12-17)中，$V_\sigma = v_\sigma + v_\sigma^\mu \partial_\mu + v_\sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$，从式(4-12-25)出发，类似地可得强守恒律，即

$$\partial_\mu \left\{ \left[\sum_{m=0}^{N-1} \Pi_{\text{eff}}^{\mu\nu(m)} \partial_{\nu(m)} S_\sigma + a_\sigma^\mu \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \varphi} + \partial_\nu \left(a_\sigma^{\mu\nu} \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \varphi} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(a_\sigma^{\mu\nu} \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \varphi} \right) \partial_\nu - v_\sigma^\mu + \partial_\nu v_\sigma^{\mu\nu} - v_\sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \right] \varepsilon^\sigma(x) \right\} = 0 \tag{4-12-35}$$

当 $\varepsilon^\sigma(x) = \varepsilon_0^\sigma \xi_\rho^\sigma$，$\varepsilon_0^\sigma$ 为参数，利用系统的量子运动方程 $\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \varphi} = 0$，由式(4-12-35)可得系统的(弱)量子守恒律.

4-12-4　高阶微商非 Abel CS 理论

CS 理论在分数量子 Hall 效应乃至高温超导中有重要应用. 高阶微商

(2+1)维非 Abel CS 规范场 A_μ^a 与标量场 φ 耦合的 Lagrange 量密度为[17]

$$\mathscr{L}=-\frac{C^2}{4\pi}\mathrm{D}_\rho F_{\mu\nu}^a \mathrm{D}^\rho F^{a\mu\nu}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a+\frac{1}{3}f_{bc}^a A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c\right)+(\mathrm{D}_\mu\varphi)^+(\mathrm{D}^\mu\varphi) \tag{4-12-36}$$

式中：$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$；$\mathrm{D}_\mu$ 为协变微商；而 f_{bc}^a 为规范群的结构常数. 根据 FS 量子化方案系统 Green 函数的相空间生成泛函可写为

$$Z[J]=\int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}P^{a\mu}\mathscr{D}B_\mu^a\mathscr{D}Q^{a\mu}\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi^+\mathscr{D}\varphi^+\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\lambda\mathscr{D}C\mathscr{D}\overline{C}\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_{1a}^\mu A_\mu^a+J_{2a}^\mu B_\mu^a+J_1^+\varphi+\varphi^+J_1+\overline{J}_{3a}C^a+\overline{C}^a J_{3a})\right\} \tag{4-12-37}$$

式中：$P^{a\mu}$，$Q^{a\mu}$，π^+ 和 π 分别为 A_μ^a，$B_\mu^a=\dot{A}_\mu^a$，φ 和 φ^+ 的正则动量；$\lambda(x)$ 为乘子场；$C(x)$ 和 $\overline{C}(x)$ 为 Grassmann 变量鬼场；而

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{f}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}+\mathscr{L}_{\mathrm{m}} \tag{4-12-38}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=B_\mu^a P^{a\mu}+\dot{B}_\mu^a Q^{a\mu}+\dot{\varphi}^+\pi+\pi^+\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c \tag{4-12-39}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{f}}=-\frac{1}{2\alpha_2}(\Omega_2^a)^2=-\frac{1}{2\alpha_2}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \tag{4-12-40}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=-\partial^\mu\overline{C}^a\mathrm{D}_{b\mu}^a C^b \tag{4-12-41}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{m}}=\lambda_0^a\Lambda^{(0)a}+\lambda_1^a\Lambda^{(1)a}+\lambda_1^a\Lambda^{(2)a}-\frac{1}{2\alpha_0}(\Omega_0^a)^2-\frac{1}{2\alpha_1}(\Omega_1^a)^2 \tag{4-12-42}$$

其中 $\Lambda^{(i)a}\approx 0$ 为第一类约束，$\Omega_i^a\approx 0$ 为规范条件. 考虑 BRS 变换

$$\delta A_\mu^a=-\tau\mathrm{D}_{b\mu}^a D^b \tag{4-12-43a}$$

$$\delta\varphi=-\mathrm{i}\tau T^a C^a\varphi,\quad\delta\varphi^+=\mathrm{i}\tau\varphi^+T^a C^a \tag{4-12-43b}$$

$$\delta C^a=\frac{1}{2}f_{bc}^a C^b C^c,\quad\delta\overline{C}^a=\frac{1}{\alpha_2}\partial^\mu A_\mu^a \tag{4-12-43c}$$

式中：τ 为 Grassmann 参数($\varepsilon^a(x)=\tau C^a(x)$)；$T^a$ 为规范群的生成元. 在 BRS 变换下，由 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}_{\mathrm{f}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 决定的作用量在理论中是不变的，而第一类约束在 A_μ^a 的变换下，不离开约束超曲面，$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{m}}\approx 0$，因此在 BRS 变换下，$I_{\mathrm{eff}}$ 决定的理论是不变的，在约束超曲面内，由式(4-12-34)，得量子 BRS 守恒荷

$$Q_B=\int\mathrm{d}^2x(P_a^\mu\delta A_\mu^a+Q_a^\mu\delta B_\mu^a+\pi^+\delta\varphi+\delta\varphi^+\pi+\overline{R}_a\delta C^a+\delta\overline{C}^a R_a) \tag{4-12-44}$$

式中：$\overline{R}_a$，R_a 分别为 C^a，$\overline{C}^a$ 的正则动量．此结果也可由量子水平的正则 Noether(第一)定理导出．如果仅对 A_μ^a，φ 和 φ^+ 作式(4-12-43a)、式(4-12-43b)的变换，而鬼场 C^a 和$\overline{C}^a$ 不变．在约束超曲面内，$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$的变更为

$$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=W_a\varepsilon^a(x)+f_{bc}^a\,\partial^\mu\,\overline{C}^aC^b\,\partial_\mu\varepsilon^c(x) \tag{4-12-45}$$

其中 W_a 不依赖于 $\varepsilon^a(x)$的微商．由式(4-12-34)得量子 PBRS 守恒荷

$$Q'=\int \mathrm{d}^2x(P_a^\mu\delta A_\mu^a+Q_a^\mu\delta B_\mu^a+\pi^+\,\delta\varphi+\delta\varphi^+\,\pi-f_{bc}^a\,\dot{\overline{C}}^aC^bC^c) \tag{4-12-46}$$

此守恒荷与式(4-12-44)不同．上述结果也可用 4-12-2 节中的方法得到．

按 FP 方法，在 Lorentz 规范下，位形空间中的有效 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}-\partial^\mu\,\overline{C}^a\mathrm{D}_{b\mu}^aC^b-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \tag{4-12-47}$$

不难验证，上式右端前两项之和对应的作用量在下列变换下不变[16]

$$\left.\begin{aligned}&\delta A_\mu^a=\mathrm{D}_{\sigma\mu}^a\varepsilon^\sigma(x)\\&\delta\varphi=-\mathrm{i}T^\sigma\varphi\varepsilon^\sigma(x),\ \delta\varphi^+=\mathrm{i}\varphi^+\,T^\sigma\varepsilon^\sigma(x)\\&\delta C^a=\mathrm{i}(T_\sigma)_b^aC^b\varepsilon^\sigma(x)\\&\delta\overline{C}^a=\mathrm{i}\,\overline{C}^b(T_\sigma)_b^a\varepsilon^\sigma(x)-\\&\qquad\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3y\Delta_0(x,\ y)\,\partial_\mu[\overline{C}^b(y)(T_\sigma)_b^a\,\partial^\mu\varepsilon^\sigma(y)]\end{aligned}\right\} \tag{4-12-48}$$

其中 $\Delta_0(x,\ y)$适合

$$\square\Delta_0(x,\ y)=\mathrm{i}\delta(x-y) \tag{4-12-49}$$

由量子 Noether 恒等式(4-12-25)有

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}\left(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi(x)}\right)T^\sigma\varphi(x)+\mathrm{i}\varphi^+(x)T^\sigma\left(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi^+(x)}\right)+\widetilde{\mathrm{D}}_{\sigma\mu}^a\left(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta A_\mu^a(x)}\right)+\\&\mathrm{i}(T_\sigma)_b^a\,\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta C^a(x)}C^b(x)-\mathrm{i}\,\overline{C}^b(x)(T_\sigma)_b^a\,\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\,\overline{C}^a(x)}+\\&\int\mathrm{d}^3y\,\widetilde{N}_\sigma^a(x)\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\,\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\,\overline{C}_{,\mu}^a}\right)\Delta_0(y,\ x)\right]=\frac{1}{\alpha}\widetilde{\mathrm{D}}_{\sigma\mu}^a\,\partial^\mu(\partial^\nu A_\nu^a)\end{aligned} \tag{4-12-50}$$

式中

$$\widetilde{N}_\sigma^a(x)=\partial_\mu[\overline{C}^b(x)(T_\sigma)_b^a\,\partial^\mu] \tag{4-12-51}$$

$$\widetilde{\mathrm{D}}_{\sigma\mu}^a=-\delta_\sigma^a\,\partial_\mu+f_{\sigma c}^aA_\mu^c \tag{4-12-52}$$

在规范约束下，利用系统的量子运动方程，由式(4-12-35)得量子守恒荷

$$Q=\int \mathrm{d}^2x\int \mathrm{d}^3y\,\overline{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\,\partial_{x_0}\left[\partial_{y_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\overline{C}^a_{,y_\nu}}\right)\Delta_0(y,x)\right]\tag{4-12-53}$$

将式(4-12-47)代入式(4-12-53)，得

$$Q=\int \mathrm{d}^2x\int \mathrm{d}^3y\,\overline{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b(\partial^\nu D^a_{e\nu}C^e)\,\partial_{x_0}\Delta_0(y,x)\tag{4-12-54}$$

导出此量子守恒荷的方法有别于量子 Noether(第一)定理.

4-13　高阶微商系统的量子 Poincaré-Cartan(PC)积分不变量

高阶微商理论与非定域场论、相对论性粒子动力学、引力理论、修改的 KdV 方程、超对称、弦模型以及其他问题等密切相关[1]. 描述系统的 Lagrange 量含高阶微商情形的研究日益受到人们的广泛关注. 下面讨论高阶微商系统的量子 PC 积分不变量[28].

4-13-1　量子 PC 积分不变量

以下先考虑用高阶微商正规 Lagrange 量描述的系统

$$L[\psi^a_{(0)},\psi^a_{(1)},\cdots,\psi^a_{(N)}]=\int\mathscr{L}(\psi^a,\psi^a_{,\mu},\cdots,\psi^a_{,\mu(N)})\,\mathrm{d}^3x$$
$$(\alpha=1,2,\cdots,n)\tag{4-13-1}$$

其中 $\psi^a_{(0)}=\psi^a$；$\psi^a_{(1)}=\dot{\psi}^a$，…，$\psi^a_{,\mu}=\partial_\mu\psi^a$；$\psi^a_{,\mu(m)}=\underbrace{\partial_\mu\,\partial_\nu\cdots\partial_\rho}_{m}\psi^a$，时空平坦度规为 $\eta_{\mu\nu}=(1,\ -1,\ -1,\ -1)$. 由 Ostrogradsy 变换引进正则动量

$$\pi^{(N-1)}_a=\frac{\delta L}{\delta\psi^a_{(N)}}\tag{4-13-2}$$

$$\left.\begin{aligned}\pi^{(s-1)}_a&=\frac{\delta L}{\delta\psi^a_{(s)}}-\pi^s_a\quad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)\\ \pi^{(s-1)}_a&=\sum_{j=0}^{N-s}(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\frac{\delta L}{\delta\psi^a_{(j+s)}}\quad(s=1,2,\cdots,N-1)\end{aligned}\right\}\tag{4-13-3}$$

利用此关系，可将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述. 广义正则 Hamilton 量为

$$H_c(\psi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a)=\int\mathscr{H}_c\mathrm{d}^3x=\int(\pi^{(s)}_a\psi^a_{(s+1)}-\mathscr{L})\mathrm{d}^3x\tag{4-13-4}$$

重复指标代表求和，$\mathscr{H}_c$ 由式(4-13-2)消去最高阶微商 $\psi^a_{(N)}$ 而得. 该系统在相空间的 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\psi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{\alpha}_{(s)}\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J^s_\alpha\psi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_s\pi^{(s)}_\alpha)\right]\right\}\tag{4-13-5}$$

式中：$I^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}^4x(\pi^{(s)}_\alpha\psi^\alpha_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})$；$J^s_\alpha(x)$，$K^\alpha_s(x)$ 分别为 $\psi^\alpha_{(s)}(x)$ 和其正则动量 $\pi^{(s)}_\alpha(x)$ 的外源. 将空间变量 x_i 视为固定参量，此时相空间的曲线可表示为

$$\psi^\alpha_{(s)}=\psi^\alpha_{(s)}(t,\theta),\quad \pi^{(s)}_\alpha=\pi^{(s)}_\alpha(t,\theta)\tag{4-13-6}$$

式中：θ 为参量．考虑由于参量 θ 变化而形成的增广相空间中的变换(x_i 固定)：

$$\left.\begin{aligned}&t\to t'=t+\Delta t(\theta)\\&\psi^\alpha_{(s)}(t,\ x_i)\to\psi'^\alpha_{(s)}(t',\ x_i)=\psi^\alpha_{(s)}(t,\ x_i)+\Delta\psi^\alpha_{(s)}(t,\ x_i,\ \theta)\\&\pi^{(s)}_\alpha(t,\ x_i)\to\pi^{(s)\prime}_\alpha(t',x_i)=\pi^{(s)}_\alpha(t,x_i)+\Delta\pi^{(s)}_\alpha(t,x_i,\theta)\end{aligned}\right\}\tag{4-13-7}$$

式中：θ 适合

$$\psi'^\alpha_{(s)}(t,x_i,0)=\psi^\alpha(t,x_i),\quad \pi^{(s)\prime}_\alpha(t,x_i,0)=\pi_\alpha(t,x_i)\tag{4-13-8}$$

在式(4-13-7)变换下，正则作用量的变分

$$\begin{aligned}\Delta I^{\mathrm{p}}=&\int\mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^\alpha_{(s)}}\delta\psi^\alpha_{(s)}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}\delta\pi^{(s)}_\alpha\right)+\\&\int\mathrm{d}^4x\left\{\partial_\mu[(\pi^{(s)}_\alpha\psi^\alpha_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^\mu]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_\alpha\delta\psi^\alpha_{(s)})\right\}\end{aligned}\tag{4-13-9}$$

其中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^\alpha_{(s)}}=-\dot{\pi}^{(s)}_\alpha-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\psi^\alpha_{(s)}},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}=\dot{\psi}^\alpha_{(s)}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}\tag{4-13-10}$$

H_{c} 为广义正则 Hamilton 量．而

$$\delta\psi^\alpha_{(s)}=\Delta\psi^\alpha_{(s)}-\psi^\alpha_{(s),\mu}\Delta x^\mu=\Delta\psi^\alpha_{(s)}-\psi^\alpha_{(s),0}\Delta x^0\tag{4-13-11}$$

$$\delta\pi^{(s)}_\alpha=\Delta\pi^{(s)}_\alpha-\pi^{(s)}_{\alpha,\mu}\Delta x^\mu=\Delta\pi^{(s)}_\alpha-\pi^{(s)}_{\alpha,0}\Delta x^0\tag{4-13-12}$$

设在式(4-13-7)变换下的 Jacobi 行列式 $\overline{J}(\theta)$ 不为 1，并记 $\overline{J}(\theta)=1+J_1(\theta)$ ($\overline{J}(0)=1$). 光滑函数 $J_1(\theta)$ 总可表示为一函数 $Q(\theta)$ 的全微商形式，即 $J_1(\theta)=\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$. 根据生成泛函式在式(4-13-7)变换下的不变性，有

$$\begin{aligned}Z[J,K]=&\int\mathscr{D}\psi^\alpha_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha\left\{1+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^\alpha_{(s)}}+J^s_\alpha\right)\delta\psi^\alpha_{(s)}+\right.\right.\\&\left.\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_\alpha}+K^\alpha_s\right)\delta\pi^{(s)}_\alpha\right]+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\{\partial_\mu[(\pi^{(s)}_\alpha\psi^\alpha_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^\mu]+\\&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_\alpha\delta\psi^\alpha_{(s)})\}\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J^s_\alpha\psi^\alpha_{(s)}+K^\alpha_s\pi^{(s)}_\alpha)\right]\right\}\end{aligned}\tag{4-13-13}$$

即
$$\int \mathscr{D}\psi^{\beta}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\left\{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\beta}_{(s)}}+J^{s}_{\alpha}\right)\delta\psi^{\beta}_{(s)}+\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}+K^{\alpha}_{s}\right)\delta\pi^{(s)}_{\alpha}\right]+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\{\partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{\alpha}\psi^{\alpha}_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^{\mu}]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_{\alpha}\delta\psi^{\beta}_{(s)})\}\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J^{s}_{\alpha}\psi^{\alpha}_{(s)}+K^{\alpha}_{s}\pi^{(s)}_{\alpha})\right]\right\}=0 \tag{4-13-14}$$

将式(4-13-14)关于 J^{0}_{α} 求 n 次泛函微商,得

$$\int \mathscr{D}\psi^{\beta}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\left(\left\{\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}-\int \mathrm{d}^4x\left[\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\beta}_{(s)}}+J^{s}_{\alpha}\right)\delta\psi^{\beta}_{(s)}+\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}+K^{\alpha}_{s}\right)\delta\pi^{(s)}_{\alpha}\right]-\int \mathrm{d}^4x\{\partial_{\mu}[(\pi^{(s)}_{\alpha}\psi^{\alpha}_{(s+1)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\Delta x^{\mu}]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_{\alpha}\delta\psi^{\beta}_{(s)})\}\right\}\cdot \psi^{\beta}_{(0)}(x_1)\psi^{\beta}_{(0)}(x_2)\cdots\psi^{\beta}_{(0)}(x_n)+\mathrm{i}\sum_{j}\psi^{\alpha}_{(0)}(x_1)\cdots\cdot \psi^{\beta}_{(0)}(x_{j-1})\psi^{\beta}_{(0)}(x_{j+1})\cdots\psi^{\beta}_{(0)}(x_n)N^{\alpha}_{0}(x,\theta)\right)\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\left[I^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J^{s}_{\alpha}\psi^{\alpha}_{(s)}+K^{\alpha}_{s}\pi^{(s)}_{\alpha})\right]\right\}=0 \tag{4-13-15}$$

其中

$$N^{\alpha}_{0}(x,\theta)=\delta\psi^{\beta}_{(0)}=\Delta\psi^{\beta}_{(0)}-\psi^{\beta}_{(0),0}\Delta x^{0} \tag{4-13-16}$$

在式(4-13-15)中让 $J^{s}_{\alpha}=K^{\alpha}_{s}=0$, 可得

$$\langle 0\mid T^{*}\left[-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}+\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\beta}_{(s)}}\delta\psi^{\beta}_{(s)}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}\delta\pi^{(s)}_{\alpha}\right)+\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{D}\int_{V}\mathrm{d}^3x(\pi^{(s)}_{\alpha}\Delta\psi^{\beta}_{(0)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\right]\cdot \psi^{\beta}_{(0)}(x_1)\psi^{\beta}_{(0)}(x_2)\cdots\psi^{\beta}_{(0)}(x_n)\mid 0\rangle- \mathrm{i}\langle 0\mid\left[\sum_{j}\psi^{\alpha}_{(0)}(x_1)\cdots\psi^{\beta}_{(0)}(x_{j-1})\psi^{\beta}_{(0)}(x_{j+1})\cdots \psi^{\beta}_{(s)}(x_n)N^{\alpha}_{0}(x,\theta)\right]\mid 0\rangle=0 \tag{4-3-17}$$

T^{*} 为一种特定形式的编时乘积.

固定 t,并让

$$t_1,t_2,\cdots,t_m\rightarrow+\infty;\quad t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_n\rightarrow-\infty$$

由式(4-13-16),θ 的光滑函数可表为全微商形式,于是式(4-13-17)可写为

$$\langle \mathrm{out},m\mid T^{*}\left[\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\psi^{\beta}_{(s)}}\delta\psi^{\beta}_{(s)}+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_{\alpha}}\delta\pi^{(s)}_{\alpha}\right)\right]\mid n-m,\mathrm{in}\rangle+ \langle \mathrm{out},m\mid T^{*}\left[\int_{V}\mathrm{d}^3x(\pi^{(s)}_{\alpha}\Delta\psi^{\beta}_{(s)}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}\Delta t)\right]\mid n-m,\mathrm{in}\rangle\mid_{t_1}-$$

$$\langle \text{out}, m \mid T^* \left[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_\alpha^{(s)} \Delta \psi_{(s)}^\alpha - \mathscr{H}_c \Delta t)\right] \mid n-m, \text{in}\rangle \mid_{t_2} =$$

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta} \tag{4-13-18}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \langle \text{out}, m \left| T^* \left[\mathrm{i} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}\right] \right| n-m, \text{in}\rangle \tag{4-13-19}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} = J_1(\theta) \qquad (\bar{J}(\theta) = 1 + J_1(\theta)) \tag{4-13-20}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta} = \langle \text{out}, m \mid T^* [\sum N(j)] \mid n-m, \text{in}\rangle \tag{4-13-21}$$

下面先导出系统的量子正则方程. 由于对任意态 $|\psi'^\alpha_{(s)}, t'\rangle$ 和 $|\psi^\alpha_{(s)}, t\rangle$，有

$$\langle \psi'^\alpha_{(s)}, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^\alpha_{(s)}} \right| \psi^\alpha_{(s)}, t\rangle = \int \mathscr{D}\psi^\alpha_{(s)} \mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^\alpha_{(s)}} \exp\{\mathrm{i} I^{\mathrm{p}}\} \tag{4-13-22}$$

$$\langle \psi'^\alpha_{(s)}, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi^{(s)}_\alpha} \right| \psi^\alpha_{(s)}, t\rangle = \int \mathscr{D}\psi^\alpha_{(s)} \mathscr{D}\pi^{(s)}_\alpha \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi^\alpha_{(s)}} \exp\{\mathrm{i} I^{\mathrm{p}}\} \tag{4-13-23}$$

从经典正则方程$\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^\alpha_{(s)}} = 0, \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi^{(s)}_\alpha} = 0\right)$，可得

$$\langle \psi^{\alpha\prime}, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^\alpha_{(s)}} \right| \psi^\alpha, t\rangle = \langle \psi'^\alpha, t' \left| \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi^{(s)}_\alpha} \right| \psi^\alpha, t\rangle = 0 \tag{4-13-24}$$

由于 $|\psi^{\alpha\prime}, t'\rangle$，$|\psi^\alpha, t\rangle$ 的任意性，量子正则方程为

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \psi^\alpha_{(s)}} = 0, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta \pi^{(s)}_\alpha} = 0 \tag{4-13-25}$$

在变量 t，$\psi^\alpha_{(s)}$，$\pi^{(s)}_\alpha$ 所张成的增广相空间中任取一条闭曲线 C_1，该曲线以 θ 为参数来描述，$\theta=0$ 和 $\theta=l$ 代表闭曲线 C_1 上同一点. 过 C_1 上的每一点量子动力学“轨线”构成“轨线管”. 在此“轨线管”上取另一条闭曲线 C_2 使它包围此“轨线管”并与“轨线管”的母线仅相交一次. 将式(4-13-21)对 θ 沿 C_1 和 C_2 由 $\theta=0$ 到 $\theta=l$ 积分，并利用量子正则方程式(4-13-25)，得

$$\oint_{C_1} \langle \text{out}, m \mid T^* \left[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_\alpha^{(s)} \Delta \psi_{(s)}^\alpha - \mathscr{H}_c \Delta t)\right] \mid n-m, \text{in}\rangle \mid_{t_1} -$$

$$\oint_{C_2} \langle \text{out}, m \mid T^* \left[\int_V \mathrm{d}^3 x (\pi_\alpha^{(s)} \Delta \psi_{(s)}^\alpha - \mathscr{H}_c \Delta t)\right] \mid n-m, \text{in}\rangle \mid_{t_2} =$$

$$\oint_{C_k} \left\{\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}\right\} \tag{4-13-26}$$

因 $\theta=0$ 和 $\theta=l$ 代表闭曲线上同一点，故对$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}$和$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}$沿闭曲线积分后，其值

必为 0. 由于 m 和 n 任意性，故有

$$\oint_{C_1} T^* \left[\int_V d^3 x(\pi_a^{(s)} \Delta\psi_{(s)}^a - \mathscr{H}_c \Delta t)\right] - \oint_{C_2} T^* \left[\int_V d^3 x(\pi_a^{(s)} \Delta\psi_{(s)}^a - \mathscr{H}_c \Delta t)\right] = 0 \tag{4-13-27}$$

由式(4-13-27)，可得

$$W = T^* \oint_C \int_V d^3 x(\pi_a^{(s)} \Delta\psi_{(s)}^a - \mathscr{H}_c \Delta t) = \text{inv} \tag{4-13-28}$$

于是得到，对增广相空间中任一封闭曲线 C，C 沿系统的“轨线管”移动和变形时，式(4-13-28)沿 C 的积分是一不变量，并称式(4-13-28)为高阶微商正规 Lagrange 量系统的广义量子 PC 积分不变量.

对高阶微商的奇异 Lagrange 量系统，该系统在相空间存在固有约束. 设 $\Lambda_k(\psi_{(s)}^a, \pi_a^{(s)}) \approx 0(k=1, 2, \cdots, a)$为第一类约束，$\theta_i(\psi_{(s)}^a, \pi_a^{(s)}) \approx 0(i=1, 2, \cdots, b)$为第二类约束. 按照 FS 量子化方案，对每一个第一类约束选取规范条件 $\Omega_l(\psi_{(s)}^a, \pi_a^{(s)}) \approx 0(l=1, 2, \cdots, a)$. 该奇异 Lagrange 量系统在相空间 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\psi_{(s)}^a \mathscr{D}\pi_a^{(s)} \prod_{i,k,l} \delta(\theta_i)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l) \det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}| \cdot [\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2} \exp\left\{i\left[I^p + \int d^4 x(J_a^s\psi_{(s)}^a + K_s^a\pi_a^{(s)})\right]\right\} \tag{4-13-29}$$

利用 δ-函数和 Grassmann 变量 $C_a(x)$和$\overline{C}_a(x)$的积分性质，式(4-13-29)可写成

$$Z[J,K,\eta^m,\bar{j},\bar{k},j,k] = \int \mathscr{D}\psi_{(s)}^a \mathscr{D}\pi_a^{(s)} \mathscr{D}\lambda_m \mathscr{D}\overline{C}_a \mathscr{D}\pi^a \mathscr{D}C_a \mathscr{D}\bar{\pi}^a \cdot \exp\left\{i\int d^3 x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^p + J_a^s\psi_{(s)}^a + K_s^a\pi_a^{(s)} + \eta^m\lambda_m + \bar{j}^a C_a + \overline{C}_a j^a + \bar{k}_a\pi^a + \bar{\pi}^a k_a)\right\} \tag{4-13-30}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^p = \mathscr{L}^p + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{gh} \tag{4-13-31}$$

$$\mathscr{L}^p = \pi_a^{(s)} \dot{\psi}_{(s)}^a - \mathscr{H}_c \tag{4-13-32}$$

$$\mathscr{L}_m = \lambda_i\theta_i + \lambda_k\Lambda_k + \lambda_l\Omega_l \tag{4-13-33}$$

$$\mathscr{L}_{gh} = \int d^4 y\left[\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x),\Omega_l(y)\}C_l(y) + \frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}C_j(y)\right] \tag{4-13-34}$$

$\boldsymbol{\lambda}_m=(\lambda_k, \lambda_l, \lambda_i)$. λ_k，λ_i 和λ_l 分别为与约束 Λ_k，Ω_l 和 θ_i 相联系的乘子场；

$\bar{\pi}^a(x)$和$\pi^a(x)$分别为$C_a(x)$和$\bar{C}_a(x)$的共轭动量；对λ_m，C_a，π^a，$\bar{C}_a$和$\bar{\pi}^a$分别引入外源η^m，$\bar{j}^a$，$\bar{k}_a$，j^a和k_a．可见，对于奇异 Lagrange 量系统，其量子正则方程由$\mathscr{H}_{\text{eff}}=\pi_a^{(s)}\dot{\psi}_{(s)}^a-\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{P}}$决定．类似地可得到在式(4-13-7)变换下，Jacobi 行列式不为 1 情况下，含高阶微商奇异 Lagrange 量系统的量子 PC 积分不变量

$$W'=T^*\oint_C\int_V \mathrm{d}^3x(\pi_a^{(s)}\Delta\psi_{(s)}^a-\mathscr{H}_{\text{eff}}\Delta t)=\text{inv} \qquad (4\text{-}13\text{-}35)$$

闭曲线C应适合所有的约束条件．可见，当I^{P}用有效正则作用量$I_{\text{eff}}^{\text{P}}$代替时可得到高阶微商奇异 Lagrange 量系统的量子 PC 积分不变量.

4-13-2 量子 PC 积分不变量和量子正则方程

在经典理论中，已经证明了 PC 积分不变量和经典运动方程等价[14]．下面证明这种等价性关系在量子水平下仍然成立．现在先将系统离散化．把整个空间区域V分成许多小格子，将第i个格子体积元记为ΔV_i，场量$\psi_{(s)}^a(x)$在ΔV_i中的平均值为$\psi_{(s)i}^a$，对应$\psi_{(s)i}^a$的正则共轭动量记为$p_a^{(s)i}(t)$．由于$p_a^{(s)i}(t)=\pi_a^{(s)i}\Delta V_i$(对$i$不求和)．于是，这样离散后，式(4-13-28)可表示为

$$W=T^*\oint_C(p_a^{(s)i}\Delta\psi_{(s)i}^a-H_c\Delta t)=\text{inv} \qquad (4\text{-}13\text{-}36)$$

在$\Delta V_i\to 0$时，$\psi_{(s)i}^a(t)\to\psi_{(s)}^a(\boldsymbol{x},t)$，$\pi_a^{(s)i}\to\pi_a^{(s)}(\boldsymbol{x},t)$，式(4-13-36)就过渡到式(4-13-28)．这样就不难将离散系统的结果推广到场论中来.

由上面讨论可见，从相空间生成泛函导出量子 PC 积分不变量，现在反过来研究其逆命题，即从正规/奇异 Lagrange 量系统的量子 PC 积分不变量出发导出该系统的量子正则方程．设在相空间中量子系统的运动适合[仿式(4-13-22)～式(4-13-25)的分析可从算符形式过渡到经典的数]

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi}_{(s)i}^a&=\frac{\mathrm{d}\psi_{(s)i}^a}{\mathrm{d}t}=Q_{(s)i}^a(\psi_{(s)i}^a,p_a^{(s)i})\\ \dot{p}_a^{(s)i}&=\frac{\mathrm{d}p_a^{(s)i}}{\mathrm{d}t}=P_a^{(s)i}(\psi_{(s)i}^a,p_a^{(s)i})\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}13\text{-}37)$$

由式(4-13-36)，可得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W=\oint_C\left(\frac{\mathrm{d}p_a^{(s)i}}{\mathrm{d}t}\Delta\psi_{(s)i}^a+p_a^{(s)i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\psi_{(s)i}^a-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}\Delta t-H_c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t\right)=$$

$$\oint_C\Big[\frac{\mathrm{d}p_a^{(s)i}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi_a^{(s)i}+\dot{\psi}_{(s)i}^a\Delta x^0)+$$

$$p_{\alpha}^{(s)i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi_{\alpha}^{(s)i}+\dot{\psi}_{(s)i}^{\alpha}\Delta x^{0})-\frac{\mathrm{d}H_{c}}{\mathrm{d}t}\Delta t\Big] \tag{4-13-38}$$

对式(4-13-38)的有关项作分部积分，得

$$0=\oint_{C}\Big[\frac{\mathrm{d}p_{\alpha}^{(s)i}}{\mathrm{d}t}\delta\psi_{(s)i}^{\alpha}+p_{\alpha}^{(s)i}\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{(s)i}^{\alpha}-\frac{\mathrm{d}H_{c}}{\mathrm{d}t}\Delta t\Big]=$$

$$\oint_{C}\Big[\frac{\mathrm{d}p_{\alpha}^{(s)i}}{\mathrm{d}t}\delta\psi_{(s)i}^{\alpha}-\frac{\mathrm{d}\psi_{(s)i}^{\alpha}}{\mathrm{d}t}\delta p_{\alpha}^{(s)i}-\frac{\mathrm{d}H_{c}}{\mathrm{d}t}\Delta t\Big]=0 \tag{4-13-39}$$

根据方程式(4-13-37)可得

$$\oint_{C}\Big[P_{\alpha}^{(s)i}\delta\psi_{(s)i}^{\alpha}-Q_{(s)i}^{\alpha}\delta p_{\alpha}^{(s)i}-\frac{\mathrm{d}H_{c}}{\mathrm{d}t}\Delta t\Big]=0 \tag{4-13-40}$$

由于积分轮廓是任意的，那么被积量乃是某个量$-H_{c}(\psi_{(s)i}^{\alpha},\ p_{\alpha}^{(s)i})$的变化，

$$P_{\alpha}^{(s)i}\delta\psi_{(s)i}^{\alpha}-Q_{(s)i}^{\alpha}\delta p_{\alpha}^{(s)i}-\frac{\mathrm{d}H_{c}}{\mathrm{d}t}\Delta t=-\delta H_{c}(\psi_{(s)i}^{\alpha},p_{\alpha}^{(s)i}) \tag{4-13-41}$$

即
$$P_{\alpha}^{(s)i}=-\frac{\partial H_{c}}{\partial\psi_{(s)i}^{\alpha}},\quad Q_{(s)i}^{\alpha}=\frac{\partial H_{c}}{\partial p_{\alpha}^{(s)i}} \tag{4-13-42}$$

类似地，可证明奇异 Lagrange 量系统的量子正则方程与其量子 PC 积分不变量等价．但此时 $\psi_{(s)i}^{\alpha}$和 $p_{\alpha}^{(s)i}$应被($\psi_{(s)i}^{\alpha}$，C_{α}^{i}，$\overline{C}_{\alpha}^{i}$，$\eta_{i}^{m}$)和($p_{\alpha}^{(s)i}$，$p_{i}^{\alpha}$，$\overline{p}_{i}^{\alpha}$)代替，而 H_{eff}应代替 H_{c}.

当 $\Delta V_{i}\rightarrow 0$，式(4-13-42)就过渡到式(4-13-25)，这样离散系统的量子 PC 积分不变量和量子正则方程的等价性，就被过渡到场论中相应的等价关系．这就证明了含高阶微商正规/奇异 Lagrange 量系统的量子正则方程和广义量子 PC 积分不变量之间的等价性.

4-13-3 量子 PC 积分不变量和正则变换

下面讨论量子水平下高阶微商场论中系统的正则变换．设系统的量子运动方程为式(4-13-25)，正则变换可由变量 $\psi_{(s)}^{\alpha}$，$\pi_{\alpha}^{(s)}$的变换来确定，即

$$\psi_{(s)}^{\alpha *}=Q'^{\alpha}_{(s)}(\psi_{(s)}^{\alpha},\ \pi_{\alpha}^{(s)}),\qquad \pi_{\alpha}^{(s)*}=P'^{(s)}_{\alpha}(\psi_{(s)}^{\alpha},\ \pi_{\alpha}^{(s)}) \tag{4-13-43}$$

它使系统的量子正则方程式(4-13-25)的形式不变．如果在式(4-13-43)变换下，存在两个量 $H_{c}^{*}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\mathscr{H}_{c}^{*}$（对奇异 Lagrange 量系统，$H_{\mathrm{eff}}$应替代 H_{c}）和 G 使得

$$\int_{V}\mathrm{d}^{3}x(\pi_{\alpha}^{(s)}\Delta\psi_{(s)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{c}\Delta t)=$$

$$\int_{V}\mathrm{d}^{3}x(\pi_{\alpha}^{(s)*}\Delta\psi_{(s)}^{\alpha *}-\mathscr{H}_{c}^{*}\Delta t)+\Delta G \tag{4-13-44}$$

那么变换式(4-13-43)是正则的.事实上,取增广相空间中的任意封闭曲线,由式(4-13-44)有

$$\oint_C\left[\int_V d^3x(\pi_\alpha^{(s)}\Delta\psi_{(s)}^\alpha-\mathscr{H}_c\Delta t)-\right.$$
$$\left.\int_V d^3x(\pi_\alpha^{(s)*}\Delta\psi_{(s)}^{\alpha*}-\mathscr{H}_c^*\Delta t)\right]=0 \qquad (4\text{-}13\text{-}45)$$

设 C^* 为 C 经过变换式(4-13-43)而得到的封闭曲线,由式(4-13-45)有

$$\oint_C\int_V d^3x(\pi_\alpha^{(s)}\Delta\psi_{(s)}^\alpha-\mathscr{H}_c\Delta t)=$$
$$\oint_{C^*}\int_V d^3x(\pi_\alpha^{(s)*}\Delta\psi_{(s)}^{\alpha*}-\mathscr{H}_c^*\Delta t)\Big] \qquad (4\text{-}13\text{-}46)$$

由于 $\psi_{(s)}^\alpha$ 和 $\pi_\alpha^{(s)}$ 适合正则方程式(4-13-25),式(4-13-46)左端在封闭曲线 C 沿式(4-13-25)的解所确定的动力学"轨线管"上移动(和变形)时不变,左端恰为PC积分不变量.于是式(4-13-46)的右端也在沿式(4-13-43)变换后 C^* 所得的"轨线管"上移动时不变.也就是说,式(4-13-46)的右端对变换后的新变量而言仍为PC积分不变量.变换后的"轨线"必适合系统的量子运动方程,即变换式(4-13-43)为正则变换.

4-13-4 量子PC积分不变量和Hamilton-Jacobi方程[28]

下面讨论量子水平下PC积分不变量与Hamilton-Jacobi方程的联系.仿4-13-3的分析,式(4-13-46)的离散情形可写成

$$\oint_C(p_\alpha^{i(s)}\Delta\psi_{i(s)}^\alpha-H_c\Delta t)=\oint_{C^*}(p_\alpha^{i(s)*}\Delta\psi_{i(s)}^{\alpha*}-H_c^*\Delta t) \qquad (4\text{-}13\text{-}47)$$

θ 的光滑量 $\Lambda(\theta)$ 可表示为全微分形式,即

$$\Lambda(\theta)=\frac{dS(\psi_{i(s)}^\alpha,\psi_{i(s)}^{\alpha*},t)}{dt}\Delta t(\theta)=\frac{d\Omega(\theta)}{d\theta} \qquad (4\text{-}13\text{-}48)$$

$\Lambda(\theta)$ 沿曲线 C^* 的积分必为零。式(4-13-48)可添加到式(4-13-47)的右端,即

$$\oint_C(p_\alpha^{i(s)}\Delta\psi_{i(s)}^\alpha-H_c\Delta t)=\oint_{C^*}(p_\alpha^{i(s)*}\Delta\psi_{i(s)}^{\alpha*}-H_c^*\Delta t)+$$
$$\oint_{C^*}\left(\frac{dS(\psi_{i(s)}^\alpha,\psi_{i(s)}^{\alpha*},t)}{dt}\right)\Delta t \qquad (4\text{-}13\text{-}49)$$

由于 C 和 C^* 是增广相空间中包围量子运动"轨线"的任意曲线,所以有

$$p_\alpha^{i(s)}\Delta\psi_{i(s)}^\alpha-p_\alpha^{i(s)*}\Delta\psi_{i(s)}^*-$$
$$\left(H_c-H_c^*+\frac{dS(\psi_{i(s)}^\alpha,\psi_{i(s)}^{\alpha*},t)}{dt}\right)\Delta t=0 \qquad (4\text{-}13\text{-}50)$$

由式(4-13-47)(仿式(4-13-22) ~ 式(4-13-25) 的分析可从算符形式过渡到经典的数),有

$$\left(p_{\alpha}^{i(s)}-\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial \psi_{i(s)}^{\beta}}\right)\Delta\psi_{i(s)}^{\beta}-\left(p_{\alpha}^{i(s)*}+\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial \psi_{i(s)}^{\beta *}}\right)\Delta\psi_{i(s)}^{\beta *}+$$

$$\left[H_{c}^{*}-\left(H_{c}+\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial t}\right)\right]\Delta t=0 \tag{4-13-51}$$

因为 $\Delta\psi_{i(s)}^{\beta}$,$\Delta\psi_{i(s)}^{\beta *}$ 和 Δt 是独立的,所以有

$$p_{\alpha}^{i(s)}=\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial \psi_{i(s)}^{\beta}},\quad -p_{\alpha}^{i(s)*}=\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial \psi_{i(s)}^{\beta *}} \tag{4-13-52}$$

$$H_{c}^{*}=H_{c}+\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial t} \tag{4-13-53}$$

选择 S,使得 $H_{c}^{*}=0$,由(4-13-53),可得

$$H_{c}\left[\psi_{i(s)}^{\beta},\frac{\partial S}{\partial \psi_{i(s)}^{\beta}},t\right]+\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial t}=0 \tag{4-13-54}$$

式(4-13-54)即为量子水平的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程. 因为

$$\dot{\psi}_{i(s)}^{\beta *}=\frac{\partial H_{c}^{*}}{\partial p_{\alpha}^{i(s)}}=0 \tag{4-13-55}$$

所以有

$$\psi_{i(s)}^{\beta *}=\text{const} \tag{4-13-56}$$

通过以下方式可得到满足 Hamilton-Jacobi 方程 S 的解, 即

$$\frac{\mathrm{d}S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial \psi_{i(s)}^{\beta}}\dot{\psi}_{i(s)}^{\beta}+\frac{\partial S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)}{\partial t}=$$

$$p_{\alpha}^{i(s)}\dot{\psi}_{i(s)}^{\alpha}-H_{c} \tag{4-13-57}$$

那么

$$S(\psi_{i(s)}^{\beta},\psi_{i(s)}^{\beta *},t)=\int L^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t+\gamma=I^{\mathrm{p}}+\gamma \tag{4-13-58}$$

γ 为任意常量. 对高阶微商奇异 Lagrange 量系统的量子 Hamilton-Jacobi 方程, H_{c} 将被 H_{eff} 替代. 当 $\Delta V_{i}\to 0$ 时, 上述分析就被过渡到高阶微商场论系统中.

4-14 高阶微商场论中规范系统的量子变换性质

对称性是现代场论中的基本概念. 整体对称(变换依赖李群参数)导致的经典守恒律通常可由 Noether 第一定理给出, Noether 第二定理涉及定域

对称(变换依赖于任意函数)，定域对称导致经典的 Noether 恒等式，它对应于量子理论中的 Ward 恒等式(理论可重整化的基础). 众所周知，经典 Noether 定理和 Ward 恒等式一般是在位形空间中用 Lagrange 变量给出的. 动力学系统也可以在相空间中用正则变量来描述. 而众多的物理系统在相空间中描述时其正则变量间存在固有约束，为约束 Hamilton 系统或约束正则系统. 例如，相对论运动粒子满足的"质壳"条件，电磁场和杨-Mills 中的 Gauss 约束，弦理论中的 Virasor 条件等. 所有规范不变(具有定域不变性)的系统(描述系统的 Lagrange 量是奇异的)均为约束 Hamilton 系统. 至今对约束 Hamilton 系统的经典和量子正则对称性开展了系统的研究，建立了该系统正则形式的经典 Noether 定理、正则 Noether 恒等式和 PC 积分不变量[1]. 在量子理论方面，建立了正则形式的 Ward 恒等式[20]、量子水平的 Noether 定理[24]、量子水平的 Noether 恒等式[26,27]和量子水平的 PC 积分不变量[28]，并给出了若干应用.

规范(不变)系统在相空间中存在正则约束，无论是算符形式的正则量子化还是路径积分量子化，均是通过相空间正则变量来实现的. 由于存在约束在量子化中分析和处理其中的约束至关重要. 对约束 Hamilton 系统的量子化，通常可用 Dirac 括号量子化和相空间路径积分(泛函积分)量子化. 路径积分中出现的数均为 C-数，这为研究系统的量子对称性提供了方便. 然而，规范系统的量子化通常也可以采用比较直观和方便的 FP 技巧在位形空间中写出其路径积分量子化. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本. 在某些情形下，按约束 Hamilton 系统的相空间中路径积分量子化的结果，作出对正则动量的路径积分后，可将其化为用 FP 技巧给出的位形空间路径积分量子化的结果，如电磁场、杨-Mills 场. 尽管 FP 路径积分量子化技巧不十分严格，但该技巧简便和适用地给出了规范系统在位形空间的路径积分量子化，从而可方便地在位形空间中研究该系统的量子对称性.

在由整体对称性导致守恒律的研究中，无论是经典理论还是量子理论，均要求在对称变换下，系统的 Lagrange 量密度不变或改变一四维散度项(作用量不变). 这里将讨论一般情形，即系统的作用量在位形空间中的整体变换下改变的情形，系统在量子水平下的变换性质，并且讨论高阶微商系统(研究更具普遍性，当系统仅含一阶微商的情形，可作为这里结果的特例). 系统的 Lagrange 量含场量高阶微商，与粒子相对论动力学、引力理论、广义 KdV 方程、超对称和弦模型等问题有关. 高阶微商理论可改善相应的 Feymann 图的收敛性，日益受到人们的关注. 在经典理论中，已研究了动力学系统的变换性质[3]，将其结果用于质点力学，对于位势依赖于空间坐标

的系统，平移变换将导致动量定理，空间转动变换将导致动量矩定理，这个结果在量子力学中也适用[30]；用于经典电磁场，说明了光在介质分界上反射和折射时，能量中心在垂直于入射面方向会发生移动(横移效应)[31]. 这个结果在量子水平尚须修正[32].

本节基于用 FP 技巧写出高阶微商规范系统在位形空间中 Green 函数的生成泛函，研究了在位形空间中整体变换下该系统作用量变更的情形，系统量子水平的变换性质，得到了量子变换性质方程，给出了存在量子守恒律的条件和量子守恒律的表达式. 用于高阶微商非 Abel CS 理论，求出了量子 BRST 守恒荷及其他量子守恒荷；在量子水平讨论了共形变换，导出了该系统的量子守恒角动量，表明了系统在量子水平下仍可具有分数自旋性质，但经典理论中对称性所决定的守恒律，在量子水平下不一定再保持.

4-14-1 量子变换性质方程

设场由场量 $\varphi^\alpha(x)$ 描述($\alpha=1, 2, \cdots, n$)，其中，$x=(x_0, x_i)(x_0=t$, $i=1, 2, 3)$，场的规范不变的含高阶微商的 Lagrange 量为

$$L = L[\varphi^\alpha_{(0)}, \varphi^\alpha_{(1)}, \cdots, \varphi^\alpha_{(N)}] = \int_V \mathscr{L}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_{,\mu}, \cdots, \varphi^\alpha_{,\mu(N)}) \mathrm{d}^3 x \tag{4-14-1}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \varphi^\alpha_{(0)} &= \varphi^\alpha \\ \varphi^\alpha_{(1)} &= \mathrm{D}\varphi^\alpha = \dot{\varphi}^\alpha, \cdots, \varphi^\alpha_{,\mu} = \partial_\mu \varphi^\alpha = \\ &\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi^\alpha, \cdots, \varphi^\alpha_{,\mu(m)} = \underbrace{\partial_\mu \cdots \partial_\nu}_{m} \varphi^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4-14-2}$$

对规范不变系统，按 FP 技巧，选取规范条件，通过泛函积分的变换可以写出该系统量子化后在位形空间中 Green 函数的生成泛函

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\phi^\alpha \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + J_a \phi^a)\right\} \tag{4-14-3}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\mathrm{f}} + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{4-14-4}$$

$\mathscr{L}$ 为原始规范不变的 Lagrange 量密度；$\mathscr{L}_{\mathrm{f}}$ 为规范固定项，它取决于规范条件；$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 为鬼粒子项；ϕ^a 代表所有场(包括鬼场)；J_a 为相应的外源.

考虑系统在整体变换下的量子变换性质，设在位形空间中的无穷小整体变换

$$
\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x, \cdots, \phi^a_{,\mu(m)}, \cdots) \\
\phi^{a\prime}(x') &= \phi^a(x) + \Delta\phi^a(x) = \\
&\phi^a(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{a\sigma}(x, \cdots, \phi^a_{,\mu(m)}, \cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{4-14-5}
$$

下，有效作用量 $I_{\text{eff}} = \int d^4 x \mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的变更为

$$
\delta I_{\text{eff}} = \varepsilon_\sigma \int d^4 x [\, \partial_\mu W^{\mu\sigma}(x, \phi^a, \cdots, \phi^a_{,\mu(m)}, \cdots) + R^\sigma(x, \phi^a, \cdots, \phi^a_{,\mu(m)}, \cdots)] \tag{4-14-6}
$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, r)$ 为无穷小任意参数. 将整体变换式(4-14-5) 定域化，即考虑如下定域变换：

$$
\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma(x) \tau^{\mu\sigma}(x, \cdots, \phi^a_{,\mu(m)}, \cdots) \\
\phi^{a\prime}(x') &= \phi^a(x) + \Delta\phi^a(x) = \\
&\phi^a(x) + \varepsilon_\sigma(x) \xi^{a\sigma}(x, \cdots, \phi^a_{,\mu(m)}, \cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{4-14-7}
$$

式中：$\varepsilon_\sigma(x)(\sigma = 1, 2, \cdots, r)$ 为无穷小任意函数，其值和其各级微商值在时空区域边界上为零. 在式(4-14-7) 变换下，有效作用量的变更为[14]

$$
\begin{aligned}
\Delta I_{\text{eff}} = &\int d^4 x \varepsilon_\sigma(x) \left\{ \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \phi^a} (\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\mu} \tau^{\mu\sigma}) + \right. \\
&\left. \partial_\mu \left[\mathscr{L}_{\text{eff}} \tau^{\mu\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_a^{\mu\nu(n)}\, \partial_{\nu(n)} (\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho} \tau^{\rho\sigma}) \right] \right\} + \\
&\int d^4 x \left\{ \left[\mathscr{L}_{\text{eff}} \tau^{\mu\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_a^{\mu\nu(n)}\, \partial_{\nu(n)} (\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho} \tau^{\rho\sigma}) \right] \partial_\mu \varepsilon_\sigma(x) \right\}
\end{aligned} \tag{4-14-8}
$$

式中

$$
\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta \phi^a} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^m\, \partial_{\mu(m)} \mathscr{L}_{a\text{eff}}^{\mu(m)} \tag{4-14-9}
$$

$$
\mathscr{L}_{a\text{eff}}^{\mu(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{\text{指标 } \mu(m) \\ \text{的所有排列}}} \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \phi^a_{,\mu(m)}} \tag{4-14-10}
$$

$$
\Pi_a^{\mu\nu(m)} = \sum_{l=0}^{N-(m+1)} (-1)^l\, \partial_{\lambda(l)} \mathscr{L}_{a\text{eff}}^{\mu\nu(m)\lambda(l)} \tag{4-14-11}
$$

按假设，有效作用量 I_{eff} 在整体变换式(4-14-5)下的改变由式(4-14-6)给出. 可见，式(4-14-8)中的第一个积分可用式(4-14-6)来表达. 对式(4-14-8)第二个积分作分部积分，并利用 $\varepsilon_\sigma(x)$ 的边界条件，可将式(4-14-8)化为

$$
\begin{aligned}
\Delta I^{\text{p}}_{\text{eff}} = &\int d^4 x \varepsilon_\sigma(x) \left\{ \partial_\mu [W^{\mu\sigma} - \mathscr{L}_{\text{eff}} \tau^{\mu\sigma} - \right. \\
&\left. \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_a^{\mu\nu(n)}\, \partial_{\nu(n)} (\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho} \tau^{\rho\sigma})] + R^\sigma \right\}
\end{aligned} \tag{4-14-12}
$$

记变换式(4-14-7)的 Jacobi 行列式为$\overline{J}[\phi^a, \cdots \phi^a_{,\mu(m)}, \cdots, \varepsilon^\sigma]$，生成泛函式(4-14-3)在式(4-14-7)变换下不变，表明$\frac{\delta Z}{\delta \varepsilon_\sigma(x)}=0$. 将式(4-14-7)和式(4-14-12)代入式(4-14-3)，并对$\varepsilon_\sigma(x)$求泛函微商，得

$$\int \mathscr{D}\phi^a \Big\{ \partial_\mu \Big[W^{\mu\sigma} - \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} - \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_a^{\mu\nu(n)} \partial_{\nu(n)} (\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) \Big] + R^\sigma + J_0^\sigma + M^\sigma \Big\} \exp\{ \mathrm{i} I_{\text{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J_a \phi^a \} = 0 \tag{4-14-13}$$

式中

$$J_0^\sigma = -i \frac{\delta \overline{J}}{\delta \varepsilon_\sigma(x)} \Big|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} \tag{4-14-14}$$

$$M^\sigma = J_a(\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \tag{4-14-15}$$

对式(4-14-13) 关于 $J_a(x)$ 求 n 次泛函微商,得

$$\begin{aligned} &\int \mathscr{D}\phi^a \Big(\Big\{ \partial_\mu \Big[W^{\mu\sigma} - \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} - \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_a^{\mu\nu(n)} \partial_{\nu(n)} (\xi^{a\sigma} - \varphi^a_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) \Big] + \\ &R^\sigma + J_0^\sigma + M^\sigma \Big\} \phi^e(x_1)\cdots\phi^f(x_n) - \\ &\mathrm{i} \sum_j \phi^e(x_1)\cdots\phi^c(x_{j-1})\phi^d(x_{j+1})\cdots\phi^f(x_n) N^{a\sigma}\delta(x-x_j) \Big) \cdot \\ &\exp\Big\{ \mathrm{i} I_{\text{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J_a \phi^a \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{4-14-16}$$

式中

$$N^{a\sigma} = \xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} \tag{4-14-17}$$

在式(4-14-16) 中令 $J_a=0$,得

$$\begin{aligned} &\langle 0 \mid T^* \Big\{ \partial_\mu \Big[W^{\mu\sigma} - \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} - \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_a^{\mu\nu(n)} \partial_{\nu(n)} (\xi^{a\sigma} - \varphi^a_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) \Big] + \\ &R^\sigma + J_0^\sigma \Big\} \phi^e(x_1)\cdots\phi^f(x_n) \mid 0 \rangle = \mathrm{i} \sum_j \langle 0 \mid T^* [\phi^e(x_1)\cdots \cdot \\ &\phi^c(x_{j-1})\phi^d(x_{j+1})\cdots\phi^f(x_n) N^{a\sigma}] \mid 0 \rangle \delta(x-x_j) \end{aligned} \tag{4-14-18}$$

式中:T^* 代表一种特定的编时乘积[19]. 固定 t,并让

$$t_1, t_2, \cdots, t_k \rightarrow +\infty; \quad t_{k+1}, t_{k+2}, \cdots, t_n \rightarrow -\infty$$

利用约化公式[19],由式(4-14-18),得

$$\begin{aligned} &\langle \text{out}, k \mid \Big\{ \partial_\mu \Big[W^{\mu\sigma} - \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} - \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_a^{\mu\nu(n)} \partial_{\nu(n)} (\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) \Big] + \\ &R^\sigma + J_0^\sigma \Big\} \mid n-k, \text{in} \rangle = 0 \end{aligned} \tag{4-14-19}$$

由于 k,n 任意,从而有

$$\partial_\mu j^{\mu\sigma} + R^\sigma + J_0^\sigma = 0 \tag{4-14-20}$$

$$j^{\mu\sigma} = W^{\mu\sigma} - \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} - \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_a^{\mu\nu(n)}\,\partial_{\nu(n)}(\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) \quad (4\text{-}14\text{-}21)$$

式(4-14-20)给出了高阶微商规范系统量子水平变换性质方程. 对式(4-14-20)作3维空间积分，假设场在无穷远处迅速趋于零，利用Gauss定理，得

$$\mathrm{D}\int_V \mathrm{d}^3x\Big[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_a^{0\nu(n)}\,\partial_{\nu(n)}(\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho}\tau^{\rho\sigma})$$

$$W^{0\sigma}\Big] = \int_V \mathrm{d}^3x(R^\sigma + J_0^\sigma) \quad (4\text{-}14\text{-}22)$$

这样就得到下列结果：如果高阶微商规范系统量子化后的有效Lagrange量密度式(4-14-4)在整体变换式(4-14-5)下仅改变一个四维散度项($R^\sigma=0$)，且相应变换式(4-14-7)的Jacobi行列式与$\varepsilon_\sigma(x)$无关($J_0^\sigma=0$)，那么该系统在量子水平存在守恒量

$$Q^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3x\Big[\mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma} + \sum_{n=0}^{N-1}\Pi_a^{0\nu(n)}\,\partial_{\nu(n)}(\xi^{a\sigma} - \phi^a_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) - W^{0\sigma}\Big]$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \quad (4\text{-}14\text{-}23)$$

此结果与高阶微商规范系统的量子Noether第一定理结果一致.

当$R^\sigma+J_0^\sigma=0$(场量变换时路径积分测度的变化结果与有效作用量变更相消)，由式(4-14-22)，系统仍存在式(4-14-23)所示的量子守恒量，尽管此时系统没有对应的经典守恒量.

4-14-2 高阶微商非Abel CS理论中的BRST量子守恒荷

CS理论与任意子(Anyon)理论密切相关，它们可应用于分数量子Hall效应和高温超导的理论研究中. 含Abel CS项或非Abel CS项与物质场耦合的若干系统均呈现出分数自旋和分数统计性质[24,33]. 下面进一步来讨论高阶微商非Abel CS理论的量子对称性和分数自旋问题.

(2+1)维高阶微商非Abel CS规范场A_μ^a与旋量场ψ耦合的Lagrange量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{c^2}{4\pi}\mathrm{D}_\rho F^a_{\mu\nu}\mathrm{D}^\rho F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} +$$

$$\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A^a_\nu A^a_\rho + \frac{1}{3}f^{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho\right) + \mathrm{i}\,\bar{\psi}\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu\psi \quad (4\text{-}14\text{-}24)$$

其中

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu \quad (4\text{-}14\text{-}25)$$

而D_μ代表协变微商，f^a_{bc}为规范群的结构常数，γ^μ为Dirac γ-矩阵. 采用FP技巧在位形空间中对系统进行路径积分量子化. 选取规范条件

$$\partial^{\mu}A_{\mu}^{a}=\lambda^{a} \tag{4-14-26}$$

式中：λ^a 为不依赖于 $A_\mu^a(x)$ 的函数. 利用 FP 技巧可写出此系统在位形空间中 Green 函数的生成泛函，即

$$Z[J]=\int \mathscr{D}A_{\mu}^{a}\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}\delta(\partial^{\mu}A_{\mu}^{a}-\lambda^{a})\cdot \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{3}x(\mathscr{L}+J_{a}^{\mu}A_{\mu}^{a})\right] \tag{4-14-27}$$

其中 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=[M_{\mathrm{L}}^{ab}]$，而

$$M_{\mathrm{L}}^{ab}=(\delta^{ab}\partial_{\mu}\partial^{\mu}-f_{bc}^{a}A_{\mu}^{c}\partial^{\mu})\delta^{4}(x-y) \tag{4-14-28}$$

根据 Grassmann 变量$\overline{C}_a(x)$和 $C_b(y)$的积分性质，有

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=\int \mathscr{D}\overline{C}_{a}(x)\mathscr{D}C_{b}(y)\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{3}x\mathrm{d}^{3}y\overline{C}_{a}(x)M_{\mathrm{L}}^{ab}C_{b}(y)\right] \tag{4-14-29}$$

用因子(B^a 为 C- 数辅助标量场，a_0 为参数)$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{3}x\left[\lambda_{a}B^{a}+\frac{a_{0}}{2}(B^{a})^{2}\right]\right\}$乘式(4-14-27)，然后对 λ^a 和 B^a 作路径积分，不计归一化因子，得

$$Z[J,\overline{\xi},\xi]=\int \mathscr{D}A_{\mu}^{a}\mathscr{D}\overline{C}_{a}\mathscr{D}C_{a}\mathscr{D}B^{a}\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{3}x[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_{a}^{\mu}A_{\mu}^{a}+\overline{\xi}^{a}C_{a}+\overline{C}_{a}\xi^{a}]\right\} \tag{4-14-30}$$

式中：$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 为量子化后的有效 Lagrange 量密度，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}+B^{a}\partial^{\mu}A_{\mu}^{a}+\frac{\alpha_{0}}{2}(B^{a})^{2}-\partial^{\mu}\overline{C}_{a}\mathrm{D}_{b\mu}^{a}C_{b} \tag{4-14-31}$$

$$\mathrm{D}_{b\mu}^{a}=\delta_{b}^{a}\partial_{\mu}+f_{cb}^{a}A_{\mu}^{c} \tag{4-14-32}$$

$\mathscr{L}$为式(4-14-24) 所示原始 Lagrange 量密度；$\overline{C}_a(x)$ 和 $C_a(x)$ 为鬼场；ξ^a 和$\overline{\xi}^a$ 分别为$\overline{C}_a$ 和 C_a 的外源.

显然，式(4-14-31) 在下列变换下是不变的：

$$C^{a}\rightarrow \mathrm{e}^{\theta}C^{a},\quad \overline{C}^{a}\rightarrow \mathrm{e}^{-\theta}\overline{C}^{a} \tag{4-14-33}$$

其中θ为参数. 此变换的Jacobi行列式为1，由量子 Noether第一定理的结果式(4-14-23) 有量子守恒量

$$Q_{\mathrm{c}}=\int \mathrm{d}^{2}xJ_{\mathrm{c}}^{0} \tag{4-14-34}$$

$$J_{\mathrm{c}}^{\mu}=\overline{C}^{a}\mathrm{D}_{b}^{a\mu}C^{b} \tag{4-14-35}$$

Q_c 为鬼粒子数. 可见，量子水平鬼粒子数守恒.

1. BRST 对称

式(4-14-31)所示有效 Lagrange 量密度在下列 BRST 变换

$$
\left.\begin{aligned}
\delta A_\mu^a &= -\tau D_{b\mu}^a C^b, \quad \delta B^a = 0 \\
\delta\psi &= \mathrm{i}\tau T^a C^a \psi, \quad \delta\bar{\psi} = -\mathrm{i}\tau\bar{\psi}T^a C^a \\
\delta C^a &= \frac{1}{2}\tau f_{bc}^a C^b C^c, \quad \delta\bar{C}^a = \tau B^a
\end{aligned}\right\} \tag{4-14-36}
$$

下的改变为

$$
\delta\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\tau\,\partial^\mu G_\mu, \quad G_\mu = B^a D_{b\mu}^a C^b \tag{4-14-37}
$$

式中：T^a 为规范群的生成元；τ 为 Grassmann 参数．BRST 变换式(4-14-36)的 Jacobi 行列式为 1．此时系统存在量子守恒流($\partial_\nu j^\nu=0$)

$$
\begin{aligned}
j^\nu = &\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A_{\mu,\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A_{\mu,\nu\rho}^a}\right)\right] D_{b\mu}^a C^b + \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A_{\mu,\nu\rho}^a}\,\partial_\rho(D_{b\mu}^a C^b) + \\
&\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial C_{,\nu}^a}\delta C^a + \left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\bar{C}_{,\nu}^a}\right)\delta\bar{C}^a + B^a D_b^{a\nu} C^b + \\
&\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\psi_{,\nu}}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\bar{\psi}_{,\nu}}\delta\bar{\psi}
\end{aligned} \tag{4-14-38}
$$

相应的 BRST 量子守恒量为

$$
\begin{aligned}
Q = \int \mathrm{d}^2 x(&P_a^\mu \delta A_\mu^a + Q_a^\mu \delta B_\mu^a + \pi\delta\psi + \delta\bar{\psi}\bar{\pi} + \\
&\bar{R}_a \delta C^a + \delta\bar{C}^a R_a + B^a D_b^{a0} C^b)
\end{aligned} \tag{4-14-39}
$$

式中

$$
B_\mu^a = \dot{A}_\mu^a \tag{4-14-40}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{a\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\dot{A}_\mu} - 2\,\partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\dot{A}_{\mu,k}^a}\right) - \partial_0\,\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\ddot{A}_\mu^a} = \\
&F^{a\mu 0} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{0\mu\nu}A_\nu^a - \frac{c^2}{4\pi}D_i D^i F^{a\mu 0} - \\
&D_0 Q^{a\mu} - \frac{c^2}{\pi}D_i D_0 F^{a\mu i} + f_{bc}^a A_0^c Q^{b\mu}
\end{aligned} \tag{4-14-41}
$$

$$
Q_a^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\ddot{A}_\mu^a} = \frac{c^2}{\pi}D_0 F_a^{\mu 0} \tag{4-14-42}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\pi} &= -\mathrm{i}\,\bar{\psi}\gamma^0, \quad \pi = 0 \\
R_a &= -\dot{\bar{C}}^a, \quad \bar{R}_a = D_b^{a0} C^b
\end{aligned} \tag{4-14-43}
$$

这样导出量子守恒量的方法比从约束 Hamilton 系统相空间路径积分的方法更简便．在上述 BRST 变换中，如果仅考虑场 A_μ^a，ψ 和 $\bar{\psi}$ 的变换，鬼场 C^a 和 $\bar{C}^a$ 以及附加标量场 B^a 均不变，

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta A_\mu^a = -\tau D_{b\mu}^a C^b \\
&\delta\psi = \mathrm{i}\tau T^a C^a \psi, \quad \delta\bar{\psi} = -\mathrm{i}\tau\bar{\psi} T^a C^a \\
&\delta C^a = \delta\bar{C}^a = \delta B^a = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4-14-44}
$$

在式(4-14-44)变换下，式(4-14-31)所示有效 Lagrange 量密度的变更为

$$
\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = U_a \varepsilon^a(x) + f_{bc}^a [(\partial^\mu \bar{C}^a C^c - B^a A^{c\mu})\partial_\mu \varepsilon^b + B^b \partial^2 \varepsilon^b] \tag{4-14-45}
$$

式中：$U_a(\theta)$ 为不依赖于 $\varepsilon^a(x)(\varepsilon^a = C^a\tau)$ 的微商. 此时相应于式(4-14-20)中 $R^\sigma \neq 0$，不能由量子 Noether 第一定理的式(4-14-23)得量子守恒量. 但可应用量子水平的 Noether 第二定理(量子 Noether 恒等式)导致的结果，求得另一量子守恒量，即

$$
Q_{\mathrm{P}} = \int \mathrm{d}^2 x [P_a^\mu \delta A_\mu^a + Q_a^\mu \delta B_\mu^a + \bar{\pi}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\pi + f_{bc}^a (\dot{\bar{C}}^a C^c C^b - B^a A^{c0} C^b) + B^a C^a] \tag{4-14-46}
$$

2. 共形对称

特殊共形群为含 15 个参数的李群，它除了含 Poincaré 群(时空平移和 Lorentz 变换)外，还含时空膨胀和时空反演. 有效 Lagrange 量密度式(4-14-31)有 Poincaré 群下的不变性，且变换的 Jacobi 行列式为 1，按式(4-14-23)可求得系统量子水平的广义能量、动量守恒，它们分别为

$$
H = \int \mathrm{d}^2 x \{ P_a^\mu \dot{A}_\mu^a + Q_a^\mu \dot{B}_\mu^a + \bar{\pi}\dot{\bar{\psi}} + \pi\dot{\psi} + R_a \dot{C}^a + \bar{R}_a \dot{\bar{C}}^a - \mathscr{L}_{\mathrm{eff}} \} \tag{4-14-47}
$$

$$
P_i = \int \mathrm{d}^2 x \{ P_a^\mu \partial_i A_\mu^a + Q_a^\mu \partial_i \dot{A}_\mu^a + \bar{\pi}\partial_i \bar{\psi} + \pi \partial_i \psi + R_a \partial_i C^a + \bar{R}_a \partial_i \bar{C}^a \} \tag{4-14-48}
$$

在 (x_1, x_2) 平面内的转动变换下，场量变换的 Jacobi 行列式为 1. 由式(4-14-23)得系统量子水平的守恒的广义角动量为

$$
\begin{aligned}
J_{12} = \int \mathrm{d}^2 x \Big\{ & P_a^\mu \left(x_2 \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x_2} \right) + Q_a^\mu \left(x_2 \frac{\partial B_\mu^a}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial B_\mu^a}{\partial x_2} \right) + \\
& P_a^\mu \Big(\big(\sum_{12} \big)_{\mu\nu} \Big) A_a^\nu + \bar{\pi}_a \left(x_2 \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x_2} \right) + \\
& \left(x_2 \frac{\partial \bar{\psi}^\beta}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \bar{\psi}^\beta}{\partial x_2} \right) \pi_a + \bar{\pi} S_{12} \psi + \bar{R}_a \left(x_2 \frac{\partial C^a}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial C^a}{\partial x_2} \right) + \\
& \left(x_2 \frac{\partial \bar{C}^a}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \bar{C}^a}{\partial x_2} \right) R_a \Big\}
\end{aligned} \tag{4-14-49}
$$

式中

$$
\big(\sum_{\rho\sigma} \big)_{\mu\nu} = \eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu} \tag{4-14-50}
$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{4-14-51}$$

式(4-14-47)所示量子水平的广义能量、式(4-14-48)所示动量和式(4-14-49)所示角动量与经典的广义能量、动量和角动量是不同的，对非 Abel 理论在量子水平下还须计及鬼粒子对能量、动量和角动量的贡献.

(2+1)维 CS 项与物质场耦合的系统，呈现出的分数自旋性，在量子场论方面的研究远不如在经典场论和量子力学方面的研究取得的进展. 近来对 Abel CS 理论的众多系统以及非 Abel CS 理论中的个别系统存在分数自旋，从一阶微商量子场论的角度开展了研究[20,33]. 对上述高阶微商非 Abel CS 系统，尽管存在鬼粒子场和式(4-14-49)所示高阶 CS 规范场对角动量的贡献，但出现鬼粒子的项和出现 CS 规范场高阶微商的项中均不含 CS 系数 κ，因而不会改变系统分数自旋性质. 这表明式(4-14-24)描述的系统仍具有分数自旋和分数统计性质[33].

式(4-14-31)所示有效 Lagrange 量密度有 Poincaré 群下的不变性，但不具有时空膨胀和时空反演下的不变性，有效 Lagrange 量不具有共形对称性，在量子水平不存在经典理论相应的守恒量. 尽管式(4-14-31)所示有效 Lagrange量密度不具有时空膨胀和时空反演下的不变性，没有相应的量子守恒量，但仍可从式(4-14-22)导出相应的量子水平的变换性质方程. 经典理论中的对称性所决定的守恒律在量子理论中不一定再保持.

对高阶微商规范不变系统可用 FP 技巧实现该系统在位形空间的路径积分量子化，可得到 Green 函数生成泛函中(量子化后)有效 Lagrange 量. 考虑整体变换下有效 Lagrange 量变更的情况，由生成泛函出发导出了系统的量子变换性质方程，给出了系统存在量子守恒律的条件和守恒量的表达式(量子 Noether 第一定理). 将结果用于高阶微商非 Abel CS 理论，由量子 Noether 第一定理，导出了系统量子 BRST 守恒荷，又由量子 Noether 第二定理，导出了另一守恒荷，同时还研究了共形变换下，系统的变换性质，导出了该系统量子守恒角动量，尽管需记及鬼粒子对角动量的贡献，系统仍可能具有分数自旋性质，这里就不再详细论述了. 在共形变换下，量子水平有效 Lagrange 量不具有不变性，经典理论中对称性与守恒律的联系，在量子理论中一般不再保持.

本节在位形空间中讨论了高阶微商规范场的量子对称性质. 出现在路径积分中的量均为经典 C-数，因而路径积分提供了研究系统的量子对称性的有力工具. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本，当作出前者对正则动量的路径积分后可化为位形空间的路径积分(在实际问题要作出对动

量的路径积分常常是十分困难的，甚至是不可能的）．对非规范系统，一般 FP 量子化技巧不再适用，必须从相空间路径积分来讨论．

分数自旋与任意子场论受到广泛关注．从量子场论研究非 Abel CS 理论中的分数自旋起步不久，高阶微商非 Abel CS 系统在量子水平的分数自旋尚需深入分析．上述系统量子化的有效 Lagrange 量在共形群下是变更的，导出的共形群下其量子变换性质方程并给出的应用有待进一步研究．

参考文献

［1］ 李子平．约束哈密顿系统及其对称性质．北京：北京工业大学出版社，1999．

［2］ De Leon M，Rodrigues P. Generalized classical mechanics and field theory. Amsterdam：North-Holland，1985.

［3］ 李子平．约束系统的变换和推广的 Killing 方程．物理学报，1984，33（6）：814-825.

［4］ Li Ziping，Xie Yicheng. Gauge generator in Dirac theory of constrained system with singular high-order Lagrangian. Commun Theor Phys，1994，21：247-252.

［5］ 李爱民，张晓沛，李子平．高阶微商系统 Dirac 猜想的反例．物理学报，2003，52（5）：1057-1060.

［6］ Gitman D M，Tyutin I V. Quantization of fields with constraints. Berlin：Springer-Verlag，1990.

［7］ Li Ziping. Ward identities in canonical formalism for a system with singular higher-order Lagrangian. Europhys Lett，1994，27：563-567.

［8］ 李子平．广义 QCD 中正则形式的 Ward 恒等式．高能物理与核物理，1995，19（5）：405-412.

［9］ 李子平．高阶微商场论中奇异拉氏量系统的量子正则对称性．物理学报，1996，45（8）：1255-1263.

［10］ Li Ziping. Symmetry in a constrained Hamiltonian system with singular higher-order Lagrangian. J Phys，1991，A24：4261-4274.

［11］ 李子平．高阶微商场论中奇异系统正则形式 Noether 定理和 Poincaré-Cartan 积分不变量．中国科学，1992，22（9）：977-986.

［12］ Li Ziping. Symmetry in phase space for a system with a singular higher-order Lagrangian. Phys Rev，1994，E50（2）：876-887.

［13］ Jin Xiaoyue，Li Ziping. On the invalidity of Dirac's conjecture for a system with a singular higer-order Lagrangian. J Phys，2001，A34：10201-10207.

［14］ 李子平，经典和量子约束系统及其对称性质．北京：北京工业大学出版社，1993.

[15] Li Ziping, Bao Jun. Quantal conserved laws in the non-Abelian higher-derivative Chern-Simons theories. Europhys Lett, 1997, 39 (6): 599-604.
[16] Li Ziping. Canonical symmetry of a constrained Hamiltonian system and canonical Ward identity. Int J Theor Phys, 1995, 34: 523-543.
[17] Li Ziping, Long Zhenwen. Quantal symmety for a system with a singular higher-order Lagrangian. J Phys, 1999, A32: 6391-6407.
[18] 隆正文，李子平. 高阶微商系统中正则 Ward 恒等式和 Abel 规范理论中动力学质量产生. 物理学报，2004，53 (7)：2100-2106.
[19] Young B L. Introduction to quantum field theories. Beijing: Science Press, 1987.
[20] Li Ziping, Jiang Jinhuan. Symmetries in constrained canonical systems. Beijing: Science Press, 2002.
[21] Li Ziping. Generalized Noether theorems in canonical formalism for field theories and their applications. Int J Theor Phys, 1993, 32 (1): 201-215.
[22] Li Ziping, Li Aimin, Jiang Jinhuan. On Dirac's conjecture. Commun Theor Phys, 2005, 43 (6): 1115-1116.
[23] Li Ziping. Transformation properties of constrained Hamiltonian system and PBRST charge. Int J Theor Phys, 1994, 33 (6): 1207-1215.
[24] Li Ziping. Global canonical symmetry in a quantum system. Sci in China, 1996, A39: 739-747.
[25] Li Ziping. Canonical global symmetry in the functional integral formalism of the system and conservation laws. Z Phys, 1997, C76: 181-189.
[26] 李子平. 量子水平的 Noether 恒等式. 高能物理与核物理，2002，26 (3)：230-238.
[27] Li Ruijie, Li Ziping. Quantal Noether identities and their applications. Int J Theor Phys, 2006, 45 (12): 2449-2469.
[28] Zhang Ying, Li Ziping. The quantal Poincaré-Cartan integral invariant for singular higher-Order Lagrangian in field theories. Euro Phys J, 2005, C41: 257-263.
[29] Li Ziping, Long Zhenwen. Quantum Noether identities for non-local transformation in higher-order derivatives theories. Euro Phys J, 2003, C30: 263-272.
[30] Jiang Jinhuan, Li Ziping. Transformation properties of dynamical system at the quantum level. Int J Theor Phys, 2007, 46 (6): 1738-1746.
[31] Li Ziping, Wu Bichu. On the transverse shift of the reflection and refraction of electromagnetic wave of the interface of dielectric media. Commun Theor Phys, 1995, 24 (2): 251-254.
[32] 李爱民，李子平. 约束奇异系统量子水平的变换性质及其应用. 物理学报，2008，57：7570-7575.
[33] 张莹，李子平. 非 Abel Chern-Simons 理论中量子水平的分数自旋性质. 物理学报，2006，54：2611-2613.

第 5 章

附加约束奇异 Lagrange 量系统

本章论述含附加约束并用奇异 Lagrange 量描述的动力学系统(简称约束奇异系统)的经典和量子对称性质，经典对称性质是量子对称性质的基础. 奇异 Lagrange 量系统在相空间中含固有(内在)约束，在某些情况下，当系统受的外在约束可转化为相空间约束并与内在正则约束相容时，可通过修改的 Dirac-Bergmann 算法计算约束奇异系统在相空间中的所有约束，并将约束分类，从而将该系统纳入约束 Hamilton 系统的理论框架．本章研究了该系统的对称性质，包括外在约束不含场量的时间微商和含场量时间微商情形下的正则 Noether 定理和 PC 积分不变量的多种推广(有限自由度和场论中的一阶微商以及高阶微商理论)；给出了该系统的路径积分量子化和量子正则对称性，如量子正则 Noether 定理，以及非线性 σ-模型中量子水平下的分数自旋等. 对规范不变约束奇异系统，研究了该系统量子水平下的变换性质，并讨论了电磁场在介质分界面上反射和折射时的能量中心沿垂直于入射面方向的“横移效应”的量子修正等.

5-1　完整约束奇异系统的正则对称性

对称性是物理系统的基本属性. 对称性概念总是和某种变换下的不变性相联系的. 对称性分析是极其重要的研究方法. 一方面，对称性与守恒律密切相关，一般来说，一种整体对称性就对应着一种守恒律；另一方面，对称性不仅导致新的理论产生，而且可使计算简化. 对动力学系统的描述有位形空间中的 Lagrange 体制和相空间中的 Hamilton 体制 2 种形式，后者在量子理论中起更重要的作用. 在对称性分析中，传统的研究是在位形空间中讨论的，且未考虑系统受约束的情况. 而实际上，物理系统的运动往往受到约束的限制，其约束分为两类：一类是在位形空间中存在的附加条件，称为外在约束；另一类是由于描述系统运动的 Lagrange 量奇异，在过渡到相空间描述时，正则变量间存在的某种关系，称为固有约束或内在约束. 对于外在约束，在力学系统中，如果约束只是时间和广义坐标的函数，则为完整外在约束；如果约束不仅是时间和广义坐标的函数，还是广义速度的函数(不可积分的微分约束)，则为非完整外在约束. 本节将讨论完整外在

约束有限自由度含一阶微商的奇异 Lagrange 量系统的正则对称性. 在同时考虑外在约束与系统的固有约束的基础上，导出该完整约束奇异系统的正则方程，分析该系统在相空间中的对称性质，同时导出相应的正则 Noether 定理及逆定理，以及该完整约束奇异系统的 PC 积分不变量，并证明该不变量与完整约束奇异 Lagrange 量系统的正则方程等价.

5-1-1 正则方程

对一个受完整外在约束的有限自由度动力学系统，描述该系统运动的 Lagrange 量记为 $L=L(q, \dot{q}^i)$，其中 $q^i(i=1, 2, \cdots, n)$为广义坐标，$\dot{q}^i=\mathrm{D}q^i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^i$ 为广义速度，这里假设 Lagrange 量不显含时间. 利用Legendre变换，将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述，引入广义坐标 q^i 的正则共轭动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{5-1-1}$$

和正则 Hamilton 量

$$H_c=\sum p_i \dot{q}^i-L(q, \dot{q})=p_i \dot{q}^i-L \tag{5-1-2}$$

式中重复指标代表求和. 系统的 Hess 矩阵的矩阵元为

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{5-1-3}$$

当 $\det|H_{ij}|\neq 0$ 时，根据隐函数存在定理，由式(5-1-1)可将解出的所有$\dot{q}^i$作为q^i 和 p_i 的函数，Hess 矩阵是非退化的，其 Lagrange 量称为正规 Lagrange 量；当 $\det|H_{ij}|=0$ 时，Hess 矩阵是退化的，则 Lagrange 量称为奇异 Lagrange 量. 对奇异 Lagrange 量系统，由于 Hess 矩阵$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right]$是退化的，这表明该系统在相空间中正则变量间存在内在约束，称为固有约束．设 Hess 矩阵的秩为 R，该系统的初级内在约束为[1]

$$\phi_a^0(q, p)\approx 0 \quad (a=1, 2, \cdots, n-R) \tag{5-1-4}$$

设系统所受的完整外在约束为

$$G_w(q^i)\approx 0 \qquad (w=1, 2, \cdots, m<n) \tag{5-1-5}$$

该系统的 EL 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}=\lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i} \tag{5-1-6}$$

式中：λ^w 为 Lagrange(约束)乘子，$\lambda^w=\lambda^w(t)$. 考虑正则 Hamilton 量 H_c 的变分，有

$$\delta H_c = p_i \delta \dot{q}^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i = \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i \tag{5-1-7}$$

无论是正规 Lagrange 量系统还是奇异 Lagrange 量系统均有$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}^i}=0$，$H_c$ 仅为 q^i 和 p_i 的函数，故

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i \tag{5-1-8}$$

联合式(5-1-7)与式(5-1-8)，有

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0 \tag{5-1-9}$$

利用 EL 方程式(5-1-6)得

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{p}_i + \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i} \tag{5-1-10}$$

将式(5-1-10)代入式(5-1-9)，有

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i} + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0 \tag{5-1-11}$$

对固有初级约束变分得

$$\delta \phi_a^0 = \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \tag{5-1-12}$$

引入约束乘子 $\lambda^a(t)$，并与式(5-1-12)相乘，所得结果与式(5-1-11)结合，可得完整外在约束奇异 Lagrange 量系统的正则方程，即

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \tag{5-1-13a}$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i} \tag{5-1-13b}$$

由于完整约束 G_w 中不含 p_i，式(5-1-13a)和式(5-1-13b)又可写成

$$\dot{q}^i \approx \{q^i,\ H'_T\} \tag{5-1-14a}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i,\ H'_T\} \tag{5-1-14b}$$

式中：$H'_T = H_T + \lambda^w G_w = H_c + \lambda^a \phi_a^0 + \lambda^w G_w$，$\{\cdot\ ,\ \cdot\}$代表 Poisson 括号.

力学量 $F(t;\ q,\ p)$随时间的变化，由式(5-1-14a)和式(5-1-4b)得

$$\dot{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t;\ q,\ p) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{q}_i =$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,\ H'_{\mathrm{T}}\} \tag{5-1-15}$$

将式(5-1-5)所示外在完整约束作为初级约束，将它与式(5-1-4)所示奇异 Lagrange 量在相空间的初级约束一起记为 $\Phi^0_{a'}=(G_w,\ \phi^0_a)$，$\Phi^0_{a'}$ 的自恰性要求 $\dot{\Phi}^0_{a'}\approx 0$，也许可导致其他的次级约束，如果由它导致的所有约束彼此是相容的，则此外在完整约束显含时间的奇异 Lagrange 量系统，略加修改可求得系统全部约束的 Dirac-Bergmann 算法为

$$\Phi^1_{a'}(t;\ q,\ p)=\frac{\partial \Phi^0_{a'}}{\partial t}+\{\Phi^0_{a'},\ H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{5-1-16a}$$

$$\Phi^k_{a'}=\frac{\partial \Phi^{k-1}_{a'}}{\partial t}+\{\Phi^{k-1}_{a'},\ H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{5-1-16b}$$

直至满足

$$\Phi^{m+1}_{a'}=\frac{\partial \Phi^m_{a'}}{\partial t}+\{\Phi^m_{a'},\ H'_{\mathrm{T}}\}=C^k_{a'b}\Phi^b_k \qquad (k\leqslant m) \tag{5-1-16c}$$

并且设所有 $\Phi^k_{a'}(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 彼此相容. 与通常不含外在约束的奇异 Lagrange 量系统求约束算法的区别在于将原有 H_{T} 改为了 H'_{T}[2].

将全部约束 $\Phi^k_{a'}$ 分为第一类约束 $\Lambda_\alpha\approx 0$ 和第二类约束 $\theta_i\approx 0$，第一类约束满足 $\{\Lambda_\alpha,\ \Lambda_\beta\}\approx 0$，否则为第二类约束. 这样就可将上述完整外在约束奇异系统纳入约束 Hamilton 系统的理论框架，研究其正则方程的其他形式(见 1-5 节)和规范变换的生成以及 Driac 猜想.

由此可以看出，当把系统所受的完整外在约束与系统的内在约束一起考虑时，可以得到与不受外在约束的奇异系统完全相同的正则方程形式(H_{T} 换为 H'_{T})，只是这里的约束彼此相容(完整外在约束以及其自洽性要求所产生的约束与所有内在约束相容).

对完整外在约束奇异系统还可以如下处理，引入约束乘子 λ^w，将有效 Lagrange 量写为 $L^*=L+\lambda^w(t)G_w$，用 Dirac-Bergmann 求约束的方法求出 L^* 的所有约束，然后，将全部约束分为第一类约束和第二类约束 . 这 2 种方法给出的约束其结果是一致的. 因为 $p^*_{\lambda^w}=\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{\lambda}^w}=0$，$p^*_{\lambda^w}$ 为初级约束，如果其他的初级约束仍记为 $\phi^0_a(t;\ q,\ p)\approx 0$，则总 Hamilton 量为 $H''_{\mathrm{T}}=H^*_c+\lambda^a\phi^0_a+\lambda^w p^*_{\lambda^w}$. 由 Dirac-Bergmann 算法有

$$G^1_w=\frac{\partial p^*_{\lambda^w}}{\partial t}+\{p^*_{\lambda^w},\ H''_{\mathrm{T}}\}=G_w\approx 0 \tag{5-1-17}$$

这里，完整外在约束 $G_w(t, q^i)\approx 0$ 成为 L^* 相应的次级约束. 两种处理外在约束的方法给出的全部约束可分为第一类约束和第二类约束，其结果相同. 由此可以看出，当把系统所受的完整外在约束与系统的内在约束一起考虑时，可以得到与不受外在约束的奇异 Lagrange 量系统完全相似的正则方程形式，只是这里的约束彼此相容(完整外在约束以及其自洽性要求所产生的约束与所有约束相容).

5-1-2 正则 Noether 定理

对受外在完整约束并用奇异 Lagrange 量描述的力学系统，取增广相空间中的无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned} t' &= t+\Delta t = t+\varepsilon_\sigma\tau^\sigma(t, q^i, p_i) \\ q^{i\prime}(t') &= q^i(t)+\Delta q^i(t) = q^i(t)+\varepsilon_\sigma\xi^{i\sigma}(t, q^i, p_i) \\ p'_i(t') &= q_i(t)+\Delta p_i(t) = q_i(t)+\varepsilon_\sigma\eta_i^\sigma(t, q^i, p_i) \end{aligned}\right\} \tag{5-1-18}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, r)$为任意无穷小参量；$\tau^\sigma$，$\xi^{i\sigma}$ 和 η_i^σ 为时间和正则变量的函数；重复指标代表求和. 在式(5-1-18)的变换下，假设正则 Lagrange 量 $L^{\mathrm{p}}=p_i\dot{q}^i-H_c(q^i, p_i)$改变一个时间的全微分项 $\Delta L^{\mathrm{p}}=\mathrm{D}\Omega=\varepsilon_\sigma\mathrm{D}\Omega^\sigma$. 这样正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2}[p_i\dot{q}^i - H_c(t;q,p)]\mathrm{d}t$$

在式(5-1-18)的变换下的变更为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)\delta q^i\right]\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i + (p_i\dot{q}^i - H_c)\Delta t]\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{5-1-19}$$

假设内在约束式(5-1-4)和外在约束式(5-1-5)均在式(5-1-18)确定的等时变分 δq^i，δp_i 下不变，即

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \tag{5-1-20}$$

$$\delta G_w = \frac{\partial G_w}{\partial q^i}\delta q^i = 0 \tag{5-1-21}$$

式中

$$\delta q^i = \Delta q^i - \dot{q}^i\Delta t,\quad \delta p_i = \Delta p_i - \dot{p}_i\Delta t$$

用 λ^a 乘式(5-1-20)，并用 μ^w 乘式(5-1-21)，然后与式(5-1-19)合并，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta p_i\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H_c}{\partial p_i}-\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\right)+\right.$$

$$\left.\delta q^i\left(-\dot{p}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i}-\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial q^i}\right)\right\}\mathrm{d}t+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_c)\Delta t-\Omega]\mathrm{d}t=0 \tag{5-1-22}$$

沿着约束 Hamilton 系统运动的轨线，由正则方程式(5-1-13a)和式(5-1-13b)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_c)\Delta t-\Omega]=0 \tag{5-1-23}$$

由李群参数 ε_σ 的独立性，利用式(5-1-18)，式(5-1-23)又可写为

$$p_i\xi^{i\sigma}-H_c\tau^\sigma-\Omega^\sigma=\text{const}\quad(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{5-1-24}$$

这样就得到完整外在约束一阶微商奇异 Lagrange 量系统在相空间中的正则 Noether 定理：如果在式(5-1-18)的变换下，系统的正则 Lagrange 量改变一个时间的全微分项，且约束条件式(5-1-4)和式(5-1-5)在式(5-1-18)所确定的等时变分下不变，那么该完整外在约束奇异 Lagrange 量系统在相空间中必存在 r 个运动守恒量，如式(5-1-24)所示. 根据约束的自洽性条件，约束在等时变分(δq^i, δp_i)下不变，必然就有约束在总变分(Δq^i, Δp_i)下不变，而式(5-1-21)为完整外在约束加在虚位移上的条件.

5-1-3 PC 积分不变量

PC 积分不变量在经典力学和场论中有很重要的地位，它可以作为动力学的基本原理. 对正规 Lagrange 量描述的系统，该不变量与系统的正则方程等价[3-4]；对于用奇异 Lagrange 量描述的系统，Benavent 等人已给出该系统的 PC 积分不变量[5-7]，Sugano 等人讨论了该不变量在杨-Mills 场论等方面的应用[7-8]. PC 积分不变量也推广到了非完整约束系统[9]. 下面从正则形式的作用量出发，并考虑到系统的约束条件(完整外在约束、内在约束)导出完整外在约束奇异 Lagrange 量系统的 PC 积分不变量，证明该不变量与完整外在约束奇异 Lagrange 量系统的正则方程等价.

对 Lagrange 量显含时间 t 的一般情形，设动力学系统由奇异 Lagrange 量 $L(t;q^i,\dot{q}^i)$来描述，系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}}=\int_{t_2}^{t_1}L^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\int_{t_2}^{t_1}[p_i\dot{q}^i-H_c(t;q^i,p_i)]\mathrm{d}t \tag{5-1-25}$$

式中：$H_c(t;q^i,p_i)$为系统的正则 Hamilton 量. 取增广相空间中的无穷小

变换

$$\left.\begin{aligned}&t\to t'=t+\Delta t=t(\alpha)\\&q^i(t)\to q^{i\prime}(t')=q^i(t)+\Delta q^i(t,\ \alpha)\\&q_i(t)\to p'_i(t')=p_i(t)+\Delta p_i(t,\ \alpha)\end{aligned}\right\}\tag{5-1-26}$$

式中：α 为任意参数，它适合

$$q^i(t,\ 0)=q^i(t),\ p_i(t,\ 0)=p_i(t)\tag{5-1-27}$$

在式(5-1-26)的变换下，正则作用量 I^{p} 的变更

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha)\Delta\alpha=\int_{t_2}^{t_1}\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}\delta q^i+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}\delta p_i+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_c)\Delta t]\right\}\mathrm{d}t\tag{5-1-28}$$

式中：δq^i 和 δp_i 为等时变分，它们与总变分 Δq^i 和 Δp_i 的关系为

$$\delta q^i=\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t,\qquad \delta p_i=\Delta p_i-\dot{p}_i\Delta t$$

而 I^{p} 的泛函导数分别为

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}=-\dot{p}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i},\ \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}=\dot{q}^i-\frac{\partial H_c}{\partial p_i}$$

引入 Lagrange 乘子 λ^a 乘式(5-1-20)，用 λ^w 乘式(5-1-21)，在$[t_1,\ t_2]$上积分后与式(5-1-28)合并，得

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha)\Delta\alpha=$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}-\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q^i}-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial q^i}\right)\delta q^i+\right.$$

$$\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}-\lambda^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\right)\delta p_i+$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta\dot{q}^i+(p_i\dot{q}^i-H_c)\Delta t]\right\}\mathrm{d}t\tag{5-1-29}$$

沿着约束系统运动的轨线，利用完整约束奇异系统的运动方程式(5-1-13a)、式(5-1-13b)，由式(5-1-29)可得

$$I^{\mathrm{p}}=\Delta I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha)\Delta\alpha=[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_c\Delta t)]_1^2=$$

$$[p_i\Delta q^i-H_c\Delta t]_1^2\tag{5-1-30}$$

式中

$$[p_i\Delta q^i-H_c\Delta t]_1^2\equiv(p_i\Delta q^i-H_c\Delta t)_{t=t_2}-$$

$$(p_i\Delta q^i-H_c\Delta t)_{t=t_1}\tag{5-1-31}$$

在 t，q^i，p_i 所张成的增广相空间中，取一条适合约束条件 $\phi_a^0(t; q, p)\approx 0$，$G_w(t, q^i)\approx 0$ 的闭曲线 C_1，该闭曲线以 α 为参数来描述，并设闭曲线 C_1 的方程为

$$t=t^1(\alpha), \quad q^i=q_1^i(\alpha), \quad p_i=p_i^1(\alpha) \tag{5-1-32}$$

式中：$\alpha=0$ 和 $\alpha=l$ 代表曲线 C_1 上的同一点．过 C_1 上任一点存在一条系统的运动轨线，过 C_1 上每一点的运动"轨线"构成轨线管，即

$$q^i=q^i(t, \alpha), \quad p_i=p_i(t, \alpha) \tag{5-1-33}$$

式中：$q^i(t, 0)=q^i(t, l)$，$p_i(t, 0)=p_i(t, l)$．取轨线管上另一条闭曲线 C_2，它包围轨线管并与轨线管母线仅相交一次．设闭曲线 C_2 的方程为

$$t=t^2(\alpha), \quad q^i=q_2^i(\alpha), \quad p_i=p_i^2(\alpha) \tag{5-1-34}$$

将式(5-1-31)分别沿闭曲线 C_1 和 C_2 积分，可得

$$J=\oint_{C_k}(p_i\Delta q^i-H_c\Delta t)=\mathrm{inv} \quad (k=1,2) \tag{5-1-35}$$

式(5-1-35)称为完整外在约束奇异系统的 PC 积分不变量．它表明，在增广相空间中外在约束和内在初级约束确定的超曲面 Γ_p 上，取一条闭曲线 C，如果约束条件(完整外在约束和内在初级约束)在式(5-1-26)所确定的总变分下不变(或适合式(5-1-20)和式(5-1-21))，那么沿着约束系统运动的"轨线"，PC 积分式(5-1-35)沿闭曲线 C 的积分为不变量．

上面从正则形式作用量出发，利用完整外在约束奇异系统的正则方程，导出了该完整外在约束奇异系统的 PC 积分不变量．下面从该系统的 PC 积分不变量出发，证明该系统的运动方程是正则方程．假设一个动力学系统满足以下条件：

(1) 该系统受完整外在约束的限制，并且由于描述其运动的 Lagrange 量奇异，在相空间中存在内在约束，用略加修改的 Dirac-Bergmann 算法求出所有约束，设它们彼此相容，并将所有的约束分为第一类约束 Λ_a 和第二类约束 θ_i，所有约束决定的相空间中的超曲面随时间的演化是稳定的．

(2) 在相空间中系统的动力学"轨线"由一组微分方程，即由

$$\dot{q}^i\approx f^i(t; q^i, p_i, u_a), \quad \dot{p}_i\approx g_i(t; q^i, p_i, u_a) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{5-1-36a}$$

确定．式中：$u_a(t)$ 为任意函数．

(3) 存在函数 H_c，且具有

$$\frac{\partial\Lambda_a}{\partial t}+\{\Lambda_a, H_c\}\approx 0 \tag{5-1-36b}$$

的性质.

PC 积分式(5-1-35)，在式(5-1-36a)的解所确定的“轨线管”上，沿包围“轨线管”的闭曲线，它在“轨线管”上移动和变形下的 PC 积分为不变量. 由此可以证明，系统的运动方程必定为正则方程式(5-1-13a)和式(5-1-13b).

引入一个辅助参量 μ

$$\frac{\mathrm{d}q^1}{f^1}=\cdots=\frac{\mathrm{d}q^n}{f^n}=\frac{\mathrm{d}p_i}{g_i}=\cdots=\frac{\mathrm{d}p_n}{g_n}=\mathrm{d}t=\pi\mathrm{d}\mu \tag{5-1-37}$$

式中：π 为增广相空间中的任意函数. 对每一个给定的 u_a，将式(5-1-36a)积分，可得

$$\left.\begin{aligned} q^i &= q^i(\mu;q_0^i,p_i^0,t_0) \\ p_i &= p_i(\mu;q_0^i,p_i^0,t_0) \\ t &= t(\mu;q_0^i,p_i^0,t_0) \end{aligned}\right\} \tag{5-1-38}$$

这里，q_0^i，p_i^0，t_0 为初值，它们对应于 $\mu=0$，在所有外在约束和内在初级约束所确定的超曲面 Γ_p 上. 为了得到动力学轨线式(5-1-38)确定的轨线管，可取初始点在一闭曲线上，该曲线位于 Γ_p 中，并用 α 参数来表征. 也就是说，应当将式(5-1-38)中的 q_0^i，p_i^0，t_0 分别代之以 $q_0^i(\alpha)$，$p_i^0(\alpha)$，$t_0(\alpha)$，这样，便可以得到组成给定的那些“轨线管”的参数方程，即

$$q^i=q^i(\mu,\ \alpha),\quad p_i=p_i(\mu,\ \alpha),\quad t=t(\mu,\ \alpha)\quad (0\leqslant\alpha\leqslant l) \tag{5-1-39}$$

对于一个给定的 α 值，它相当于一确定的轨线管母线，而参数 μ 的值则决定了这条母线上的一定点. 令 $\mu=\text{const}$，式(5-1-39)确定了轨线管上的一条闭曲线 C. 当 PC 积分式(5-1-35)中的 q^i，p_i，t 已用式(5-1-39)代入，沿闭曲线 C 积分，便得 J 为参数 μ 的函数，即 $J=J(\mu)$. 根据 PC 积分 J 的不变性，得

$$\mathrm{d}J=0 \tag{5-1-40}$$

式中字母 d 表示对参数 μ 的微分，用字母 Δ 表示对 α 的微分，在积分号下取微分，得到

$$\mathrm{d}J=\oint_C(\mathrm{d}p_i\Delta q^i+p_i\mathrm{d}\Delta q^i-\mathrm{d}H_c\Delta t-H_c\mathrm{d}\Delta t)=0 \tag{5-1-41}$$

将式(5-1-41)中的 $\mathrm{d}\Delta q^i$ 和 $\mathrm{d}\Delta t$ 分别改写成 $\Delta\mathrm{d}q^i$ 和 $\Delta\mathrm{d}t$(因为运算 d 和运算 Δ 是对不同的独立变量 μ 和 α 取微分，因此它们彼此可交换)，并沿闭合曲线 C 分部积分，则得

$$\oint_C (\mathrm{d}p_i \Delta q^i - \Delta p_i \mathrm{d}q^i - \mathrm{d}H_c \Delta t + \Delta H_c \mathrm{d}t) =$$

$$\oint_C \Big[\Big(\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i}\mathrm{d}t \Big) \Delta q^i + \Big(-\mathrm{d}q^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\mathrm{d}t \Big) \Delta p_i +$$

$$\Big(-\mathrm{d}H_c + \frac{\partial H_c}{\partial t}\mathrm{d}t \Big) \Delta t \Big] \tag{5-1-42}$$

利用式(5-1-36a)，将式(5-1-42)逐项除以 $\mathrm{d}\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\pi}$，可得

$$\oint_C \Big[\Big(g_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i} \Big) \Delta q^i + \Big(-f^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \Big) \Delta p_i +$$

$$\Big(-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H_c}{\partial t} \Big) \Delta t \Big] \pi = 0 \tag{5-1-43}$$

因为 π 是任意因子，因而可得

$$\Big(g_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i} \Big) \Delta q^i + \Big(-f^i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \Big) \Delta p_i +$$

$$\Big(-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H_c}{\partial t} \Big) \Delta t = 0 \tag{5-1-44}$$

由于系统受完整外在约束和内在约束的限制，变分 Δq^i，Δp_i 是不独立的. 假设由 Δq^i 和 Δp_i 决定的等时变分 δq^i 和 δp_i 分别适合式(5-1-20)和式(5-1-21)，用 Lagrange 乘子 λ^a 乘式(5-1-20)、λ^w 乘式(5-1-21)，结合式(5-1-44)，可得

$$\dot{q}^i \approx f^i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \tag{5-1-45}$$

$$\dot{p}_i \approx g_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i} \tag{5-1-46}$$

式(5-1-45)和式(5-1-46)即为完整外在约束奇异 Lagrange 量系统的正则方程. 可见，对完整外在约束奇异系统，如果在相空间有相应的运动微分方程，当沿动力学轨线管上闭曲线 C 的 PC 积分为不变量时，该运动方程具有完整外在约束奇异系统正则方程的形式.

下面将讨论受完整外在约束并用奇异 Lagrange 量(Lagrange 量含广义坐标的高阶微商)描述的高阶微商广义力学系统(简称为完整约束高阶微商奇异系统)的正则对称性.

5-2 完整约束高阶微商奇异系统的正则对称性

动力学系统的高阶微商理论的研究已经有很长时间了，它在规范场理

论、引力场理论、修正 KdV 方程、超对称、非线性 σ-模型等问题中有广泛的讨论. 近来，对高阶微商理论的研究越来越受到人们的关注[2]. 正规 Lagrange 量广义力学系统、外在约束正规 Lagrange 量广义动力学系统(无内在约束)的动力学方程和位形空间的对称性以及无外在约束的高阶微商奇异 Lagrange 系统的相空间正则对称性均开展了讨论[1]. 这里将进一步研究同时含内在约束和完整外在约束的有限自由度高阶微商系统在相空间的正则对称性质，即研究有完整外在约束的奇异 Lagrange 量广义力学系统的正则对称性质.

5-2-1 广义正则方程

如果描述广义动力学系统运动的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商，则称该系统为高阶微商系统，记该系统的 Lagrange 量为

$$L=L(t;\ q_{(0)}^i(t),\ q_{(1)}^i(t),\ \cdots,\ q_{(N)}^i(t))$$

其中 $q_{(s)}^i=\dfrac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}q^i=\mathrm{D}^s q^i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 设系统的运动受完整外在约束的限制，其约束条件为

$$G_w(t,\ q^i)=0 \qquad (w=1,\ 2,\ \cdots,\ l) \tag{5-2-1}$$

系统在位形空间的 EL 方程为

$$(-1)^k\ \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{D}^k q^i)}=\lambda^w\ \frac{\partial G_w}{\partial q^i} \tag{5-2-2}$$

式中：λ^w 为 Lagrange 乘子，重复指标代表求和. 用 Ostrogradsky 变换引入广义正则动量，即

$$p_i^{(N-1)}=\frac{\partial L}{\partial q_{(N)}^i} \tag{5-2-3a}$$

$$p_i^{(s-1)}=\frac{\partial L}{\partial q_{(s)}^i}-\dot{p}_i^{(s)} \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1) \tag{5-2-3b}$$

系统的广义正则 Hamilton 量为(重复指标求和，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；$s=0,\ 1,\ \cdots,N-1$)

$$H_c=p_i^{(s)}q_{(s+1)}^i-L(t_i;q_{(s)}^i,\cdots,q_{(N)}^i) \tag{5-2-4}$$

对高阶微商奇异 Lagrange 系统，当广义 Hess 矩阵 $\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial q_{(N)}^i\ \partial q_{(N)}^j}\right]$ 退化时，由式(5-2-3a)不能解出所有 $q_{(N)}^i$，表明该系统在相空间存在固有(内在)约束. 设系统的初级内在约束为

$$\phi_a^0(t_i,\ q_{(s)}^i,\ p_i^{(s)})=0 \quad (a=1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{5-2-5}$$

这里假设外在约束 $G_w=0(w=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 与内在约束 $\phi_a^0=0(a=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 及其导出的次级约束均是相容的.

对受完整外在约束的奇异 Lagrange 量广义力学系统，完整外在约束加在虚位移上的条件为

$$\delta G_w=\frac{\partial G_w}{\partial q^i}\delta q^i=0 \tag{5-2-6}$$

对内在约束 $\phi_a^0(t_i,\ q_{(s)}^i,\ p_i^{(s)})=0$ 变分，其正则变量的变分适合

$$\frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\delta q_{(s)}^i+\frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)}=0 \tag{5-2-7}$$

分别引入约束乘子 $\mu^a(t)$ 和 $\lambda^w(t)$，用 μ^a 乘式(5-2-7)并用 λ^w 乘式(5-2-6)，对 H_c 变分，并结合 EL 方程式(5-2-2)得

$$\left(\dot{q}_{(s)}^i-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}-\mu^a\frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\right)\delta p_i^{(s)}+$$

$$\left(-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial q_{(s)}^i}-\mu^a\frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial q_{(s)}^i}\right)\delta q_{(s)}^i=0 \tag{5-2-8}$$

于是得到完整约束高阶微商奇异系统的广义正则方程，即

$$\dot{q}_{(s)}^i=\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}+\mu^a\frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ s=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1) \tag{5-2-9a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)}=-\frac{\partial H_c}{\partial q_{(s)}^i}-\mu^a\frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial q_{(s)}^i}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ s=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1) \tag{5-2-9b}$$

当系统不存在外在约束时，式(5-2-9)可化为高阶微商奇异系统的广义正则方程[1]. 对完整外在约束还可以像 5-1 节中那样，引入约束乘子 λ^w，将有效 Lagrange 量写为 $L^*=L+\lambda^w(t)G_w$，求出 L^* 的所有约束. 这里 G_w 为次级约束，在求出所有次级约束后，将全部约束分为第一类约束和第二类约束，将其纳入约束 Hamilton 系统的理论框架，仿 1-4 节中的讨论，可将完整约束高阶微商奇异 Lagrange 量系统的广义正则方程化为其他形式.

5-2-2 广义正则 Noether 定理

下面讨论受外在完整约束并用奇异 Lagrange 量描述的广义力学系统在相空间中的经典正则对称性质，建立该系统的正则 Noether 定理. 取广义增广相空间中的无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned}
&t'=t+\Delta t=t+\varepsilon_\sigma\tau^\sigma(t,\ q^i_{(s)},\ p^{(s)}_i)\\
&q^{i\prime}_{(s)}(t')=q^i_{(s)}(t)+\Delta q^i_{(s)}(t)=\\
&\qquad q^i_{(s)}(t)+\varepsilon_\sigma\xi^{i\sigma}_{(s)}(t,\ q^i_{(s)},\ p^{(s)}_i)\\
&p^{(s)\prime}_i(t')=p^{(s)}_i(t)+\Delta p^{(s)}_i(t)=\\
&\qquad p^{(s)}_i(t)+\varepsilon_\sigma\eta^{(s)\sigma}_i(t,\ q^i_{(s)},\ p^{(s)}_i)
\end{aligned}\right\}\tag{5-2-10}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$为任意无穷小参量；$\tau^\sigma$，$\xi^{i\sigma}_{(s)}$和$\eta^{(s)\sigma}_i$为正则变量的函数；重复指标代表求和. 在式(2-2-10)变换下假设广义正则 Lagrange 量 $L_p=p^{(s)}_i q^i_{(s+1)}-H_c(t;\ q^i_{(s)},\ p^{(s)}_i)$改变一个时间的全微分项 $\Delta L^p=\varepsilon_\sigma D\Lambda^\sigma$，$\Lambda^\sigma=\Lambda^\sigma(t;q^i_{(s)},\ p^{(s)}_i)$. 又假定决定系统运动方程的约束条件式(5-2-1)和式(5-2-5)在式(5-2-10)所确定的等时变分下不变，即它们分别适合式(5-2-6)和式(5-2-7)，正则作用量

$$I^p=\int_{t_1}^{t_2}(p^{(s)}_i q^i_{(s+1)}-H_c)\mathrm{d}t$$

在式(5-2-10) 变换下有

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot q^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i}\right)\delta p^{(s)}_i+\left(-\dot p^{(s)}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}\right)\delta q^i_{(s)}+\right.\\
&\qquad\left.D[p^{(s)}_i\delta q^i_{(s)}+(p^{(s)}_i q^i_{(s+1)}-H_c)\Delta t]\right\}\mathrm{d}t=\\
&\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\sigma D\Lambda^\sigma\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{5-2-11}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\left(\dot q^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i}\right)\delta p^{(s)}_i+\left(-\dot p^{(s)}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}\right)\delta q^i_{(s)}+\\
&\qquad D[p^{(s)}_i\delta q^i_{(s)}+(p^{(s)}_i q^i_{(s+1)}-H_c)\Delta t]=\varepsilon_\sigma D\Lambda^\sigma
\end{aligned}\tag{5-2-12}$$

用$\lambda^w(t)$乘式(5-2-6)、$\mu^a(t)$乘式(5-2-7)并与式(5-2-12)相加，并利用系统的运动方程式(5-2-9)，即沿着系统运动的轨线，得

$$D[p^{(s)}_i\delta q^i_{(s)}+(p^{(s)}_i q^i_{(s+1)}-H_c)\Delta t]=\varepsilon_\sigma D\Lambda^\sigma\tag{5-2-13}$$

利用式(5-2-10)，由式(5-2-13)，有

$$p^{(s)}_i\xi^{i\sigma}_{(s)}-H_c\tau_\sigma-\Lambda^\sigma=\mathrm{const}\quad(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)\tag{5-2-14}$$

这就得到了外在完整约束高阶微商奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义正则 Noether 定理：如果在式(5-2-10)的变换下，系统的正则 Lagrange 量改变一个时间的全微分项，且内在约束和外在约束条件在式(5-2-10)确定的等时

变分下不变，则该约束奇异广义力学系统在相空间中存在式(5-2-14)所示的 r 个正则形式的守恒量．根据约束的自洽性条件，不难看出，约束在正则变量的等时变分下不变，也必在其总变分下不变．

5-2-3 广义正则 Noether 定理的逆定理

如果完整外在约束高阶微商奇异系统在相空间中存在 r 个线性独立的运动守恒量，那么，就能找到相应的无穷小变换式(5-2-10)，在该式变换下系统的正则作用量不变．假设该广义力学系统在相空间中存在 r 个线性独立的运动守恒量

$$D^{\sigma}(t;\ q_{(s)}^{i},\ p_{i}^{(s)})=C^{\sigma}\quad(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)\tag{5-2-15}$$

系统的任意轨线均应满足运动方程式(5-2-9)，因而有

$$\left(\dot{q}_{(s)}^{i}-\frac{\partial H_{c}}{\partial p_{i}^{(s)}}-\mu^{a}\frac{\partial\phi_{a}^{0}}{\partial p_{i}^{(s)}}\right)\bar{\eta}_{i}^{(s)\sigma}+\left(-\dot{p}_{i}^{(s)}-\frac{\partial H_{c}}{\partial q_{(s)}^{i}}-\mu^{a}\frac{\partial\phi_{a}^{0}}{\partial q_{(s)}^{i}}-\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial q_{(s)}^{i}}\right)\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}=0\tag{2-2-16}$$

其中

$$\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}=\xi_{(s)}^{i\sigma}-\dot{q}_{(s)}^{i}\tau^{\sigma},\qquad\bar{\eta}_{i}^{(s)\sigma}=\eta_{i}^{(s)\sigma}-\dot{p}_{i}^{(s)}\tau^{\sigma}\tag{5-2-17}$$

将式(5-2-15)对时间求导，再与式(5-2-16)合并，得

$$\frac{\partial D^{\sigma}}{\partial t}+\frac{\partial D^{\sigma}}{\partial q_{(s)}^{i}}\dot{q}_{(s)}^{i}+\frac{\partial D^{\sigma}}{\partial p_{i}^{(s)}}\dot{p}_{i}^{(s)}+\left(\dot{q}_{(s)}^{i}-\frac{\partial H_{c}}{\partial p_{i}^{(s)}}-\mu^{a}\frac{\partial\phi_{a}^{0}}{\partial p_{i}^{(s)}}\right)\bar{\eta}_{i}^{(s)\sigma}+\left(-\dot{p}_{i}^{(s)}-\frac{\partial H_{c}}{\partial q_{(s)}^{i}}-\mu^{a}\frac{\partial\phi_{a}^{0}}{\partial q_{(s)}^{i}}-\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial q_{(s)}^{i}}\right)\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}=0\tag{5-2-18}$$

式中：$\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r$，这些关系式沿任意轨线恒满足，所有 $\dot{p}_{i}^{(s)}$ 的系数应为零，有

$$\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}=\frac{\partial D^{\sigma}}{\partial p_{i}^{(s)}}\tag{5-2-19}$$

取

$$D^{\sigma}=p_{i}^{(s)}\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}+L^{p}\tau^{\sigma}-\Lambda^{\sigma}\tag{5-2-20}$$

那么

$$\tau^{\sigma}=(L^{p})^{-1}(-p_{i}^{(s)}\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}+D^{\sigma}+\Lambda^{\sigma})\tag{5-2-21}$$

当 $\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}$，$\tau^{\sigma}$ 求出后，可求得 $\xi_{(s)}^{i\sigma}=\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}+\dot{q}_{(s)}^{i}\tau^{\sigma}$，而 $\bar{p}_{i}^{(s)}$ 可由 $\xi_{(s)}^{i\sigma}$，τ^{σ}确定，从而 $\eta_{i}^{(s)\sigma}$ 可由 $\xi_{(s)}^{i\sigma}$ 和 τ^{σ} 给出．于是，这样求出的 τ^{σ}，$\xi_{(s)}^{i\sigma}$，$\eta_{i}^{(s)\sigma}$ 作为增广相空间

的无穷小变换式(5-2-10)的生成函数，只要它们适合条件

$$\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}(\xi_{(s)}^{i\sigma}-\dot{q}_{(s)}^i\tau^\sigma)+\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}(\eta_i^{(s)\sigma}-p_i^{(s)}\tau^\sigma)=0 \tag{5-2-22}$$

和

$$\frac{\partial G_w}{\partial q^i}(\xi^{i\sigma}-\dot{q}^i\tau^\sigma)=0 \tag{5-2-23}$$

那么，在该生成函数 τ^σ，$\xi_{(s)}^{i\sigma}$，$\eta_i^{(s)\sigma}$ 确定的无穷小变换式(5-2-10)的变换下，受完整外在约束高阶微商奇异 Lagrange 广义力学系统的正则作用量是不变的. 事实上，将式(5-2-19)～式(5-2-23)代入式(5-2-18)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i^{(s)}\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}-L^{\mathrm{p}}\tau^\sigma)+\left(\dot{q}_{(s)}^i-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}\right)\bar{\eta}_i^{(s)\sigma}+$$

$$\left(-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial q_{(s)}^i}\right)\bar{\xi}_{(s)}^{i\sigma}=\mathrm{D}\Lambda^\sigma \tag{5-2-24}$$

用 ϵ^σ 乘式(5-2-24)，求和，然后在$[t_1,\ t_2]$上积分，可以得到式(5-2-12). 可见，受外在完整约束奇异 Lagrange 广义力学系统的正则作用量是不变的. 于是得到广义正则 Noether 定理的逆定理：如果已知含外在完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义正则方程的 r 个独立的运动守恒量，那么由式(5-2-19)～式(5-2-21)及其所确定的 τ^σ，$\xi_{(s)}^{i\sigma}$ 和 $\eta_i^{(s)\sigma}$ 生成的变换式(5-2-10)，只要决定系统运动方程的内在初级约束条件 $\phi_a^0=0$ 和外在约束 $G_w=0$ 在式(5-2-10)确定的等时变分分别满足式(5-2-22)和式(5-2-23)，则该系统的正则作用量在式(5-2-10)的变换下是不变的(或正则 Lagrange 量在式(5-2-10)的变换下改变一个全微分项).

5-2-4 广义 PC 积分不变量

下面从奇异 Lagrange 量广义力学系统正则形式的作用量出发，导出用高阶微商奇异 Lagrange 量描述的并受完整外在约束的系统的广义 PC 积分不变量，证明该不变量与约束奇异广义力学系统的广义正则方程等价.

对完整外在约束高阶微商奇异系统，完整外在约束条件由式(5-2-1)表示，决定系统运动方程的内在约束条件由式(5-2-5)表示，这里假设完整外约束条件 $G_w(t;\ q^i)=0\ (w=1,\ 2,\ \cdots,\ l;\ l<n)$和内在初级约束条件 $\phi_a^0=0$ 及其次级约束均是相容的. 取增广相空间中的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} t'&=t+\Delta t(\theta)\\ q'^i_{(s)}(t')&=q_{(s)}^i(t)+\Delta q_{(s)}^i(t,\ \theta)\\ p'^{(s)}_i(t')&=p_i^{(s)}(t)+\Delta p_i^{(s)}(t,\ \theta)\end{aligned}\right\} \tag{5-2-25}$$

式中：θ 为任意参数，它满足

$$q^{i\prime}_{(s)}(t,\ 0)=q^{i}_{(s)}(t)；\ p^{(s)\prime}{}_{i}(t,\ 0)=p_{i}^{(s)}(t) \tag{5-2-26}$$

对受外在完整约束的广义力学系统，假定约束条件式(5-2-1)在式(5-2-25)所确定的总变分下不变，即

$$\Delta G_{w}=\frac{\partial G_{w}}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial G_{w}}{\partial q^{i}}\Delta q^{i}=0 \tag{5-2-27}$$

由完整外在约束的自洽性条件，有

$$\dot{G}_{w}=\frac{\partial G_{w}}{\partial t}+\frac{\partial G_{w}}{\partial q^{i}}\dot{q}^{i}=0 \tag{5-2-28}$$

根据总变分 $\Delta q^{i}_{(s)}$ 与等时变分 $\delta q^{i}_{(s)}$ 的关系式 $\Delta q^{i}_{(s)}=\delta q^{i}_{(s)}+\dot{q}^{i}_{(s)}\Delta t$，由式(5-2-27)、式(5-2-28)，可以得此外在完整约束加在虚位移(等时变分)上的条件：

$$\delta G_{w}=\frac{\partial G_{w}}{\partial q^{i}}\delta q^{i}=0 \tag{5-2-29}$$

又假定内在约束条件式(5-2-5)在式(5-2-25)所确定的总变分下不变，由总变分与等时变分的关系以及约束的自洽性条件可以推得

$$\delta\phi^{0}_{a}=\frac{\partial\phi^{0}_{a}}{\partial q^{i}_{(s)}}\delta q^{i}_{(s)}+\frac{\partial\phi^{0}_{a}}{\partial p_{i}^{(s)}}\delta p_{i}^{(s)}=0 \tag{5-2-30}$$

正则作用量

$$I^{\mathrm{p}}=\int_{t_{1}}^{t_{2}}(p_{i}^{(s)}q^{i}_{(s+1)}-H_{\mathrm{c}})\mathrm{d}t$$

在式(5-2-25) 变换下有

$$\begin{aligned}\Delta I^{\mathrm{p}}&=I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta\\&=\int_{t_{1}}^{t_{2}}\left\{\left(\dot{q}^{i}_{(s)}-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_{i}^{(s)}}\right)\delta p_{i}^{(s)}+\left(-\dot{p}_{i}^{(s)}-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^{i}_{(s)}}\right)\delta q^{i}_{(s)}+\right.\\&\left.\quad\mathrm{D}\left[p_{i}^{(s)}\delta q^{i}_{(s)}+(p_{i}^{(s)}\delta q^{i}_{(s+1)}-H_{\mathrm{c}})\Delta t\right]\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5-2-31}$$

用 $\lambda^{w}(t)$乘式(5-2-29)、$\mu^{a}(t)$乘式(5-2-30)并求和，结合式(5-2-31)有

$$\begin{aligned}\Delta I^{\mathrm{p}}=I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta=\int_{t_{1}}^{t_{2}}&\left\{\left[\dot{q}^{i}_{(s)}-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_{i}^{(s)}}-\mu^{a}(t)\frac{\partial\phi^{0}_{a}}{\partial p_{i}^{(s)}}\right]\delta p_{i}^{(s)}+\right.\\&\left[-\dot{p}_{i}^{(s)}-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^{i}_{(s)}}-\mu^{a}(t)\frac{\partial\phi^{0}_{a}}{\partial q^{i}_{(s)}}-\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial q^{i}_{(s)}}\right]\delta q^{i}_{(s)}+\\&\left.\mathrm{D}\left[p_{i}^{(s)}\delta q^{i}_{(s)}+(p_{i}^{(s)}q^{i}_{(s+1)}-H_{\mathrm{c}})\Delta t\right]\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5-2-32}$$

利用系统的广义正则运动方程式(5-2-9)，即沿着约束系统运动的轨线，得

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta = \left[p_i^{(s)}\delta q_{(s)}^i + (p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_{\mathrm{c}})\Delta t\right]_1^2 = \left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_{\mathrm{c}}\Delta t\right]_1^2 \tag{5-2-33}$$

式中

$$\left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_{\mathrm{c}}\Delta t\right]_1^2 \equiv \left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_{\mathrm{c}}\Delta t\right]_{t=t_2} - \left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_{\mathrm{c}}\Delta t\right]_{t=t_1} \tag{5-2-34}$$

在 t，$q_{(s)}^i$，$p_i^{(s)}$ 所张成的增广相空间由约束确定的子空间 Γ_{p} 中，取一条满足约束条件的任意闭曲线 C_1，该曲线以 θ 为参数来描述，并设闭曲线 C_1 的方程为

$$t=t_1(\theta),\quad q_{(s)}^i = q_{(s)1}^i(\theta),\quad p_i^{(s)} = p_{i1}^{(s)}(\theta) \tag{5-2-35}$$

式中，$\theta=0$ 和 $\theta=l$ 代表曲线 C_1 上同一点．过 C_1 上任一点存在一条系统的运动轨线，过 C_1 上每一点的运动轨线构成轨线管，即

$$q_{(s)}^i = q_{(s)1}^i(t,\ \theta),\quad p_i^{(s)} = p_{i1}^{(s)}(t,\ \theta) \tag{5-2-36}$$

式中：$q_{(s)}^i(t,\ 0) = q_{(s)}^i(t,\ l)$，$p_i^{(s)}(t,\ 0) = p_i^{(s)}(t,\ l)$．取轨线管另一条闭曲线 C_2，让它包围轨线管并与轨线管母线仅相交一次．设闭曲线 C_2 的方程为

$$t=t_2(\theta),\quad q_{(s)}^i = q_{(s)2}^i(\theta),\quad p_i^{(s)} = p_{i2}^{(s)}(\theta) \tag{5-2-37}$$

将式(5-2-33)分别沿闭曲线 C_1 和 C_2 积分，可得

$$J = \oint_{C_k}\left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_{\mathrm{c}}\Delta t\right] = \mathrm{inv}\quad (k=1,2) \tag{5-2-38}$$

J 为外在完整约束奇异广义力学系统的广义 PC 积分．它表明，在增广相空间中所有约束(外在完整约束和内在约束)确定的超曲面 Γ_{p} 上，取一条闭曲线 C，如果外在约束和初级内在约束条件在式(5-2-25)确定的总变分(或等时变分)下不变，那么沿着约束奇异广义力学系统运动的"轨线"，上述广义 PC 积分沿闭曲线 C 的积分为不变量．

上面利用完整约束奇异广义力学系统的广义正则方程导出了该系统的广义 PC 积分不变量．现在从完整约束奇异广义动力学系统的广义 PC 积分不变量出发，说明完整约束奇异广义动力学系统的运动方程是该系统的广义正则方程．对于含有高阶微商的完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统，由于 Lagrange 量是奇异的，系统的运动被限制在相空间的约束超曲面 Γ_{p} 上，系统的运动受到初级内在约束的限制，其约束条件为 $\phi_a^0=0(a=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，同时，系统的运动受到完整外在约束的限制，其约束条件为 $G_w(t;$

$q^i)=0(w=1, 2, \cdots, l)$. 这里同样假设外在约束 $G_w(t; q^i)=0$ 和内在约束 $\phi_a^0=0$，以及由它们导致的次级约束均是相容的. 设约束奇异广义力学系统在相空间中的动力学轨线由下列一组微分方程确定，即

$$\dot{q}_{(s)}^i=f^i(t; q_{(s)}^i, p_{(s)}^i, v_{a'}) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{5-2-39a}$$

$$\dot{p}_{(s)}^i=g^i(t; q_{(s)}^i, p_{(s)}^i, v_{a'}) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{5-2-39b}$$

式中：$v_{a'}(t)(a=1, 2, \cdots, k')$为任意函数. 设在式(5-2-39a)和式(5-2-39b)的解所确定的轨线管上，沿包围此轨线管的闭曲线 C 的广义 PC 积分为不变量. 与一阶微商类比，用 $q^i\to q_{(s)}^i$，$p^i\to p_{(s)}^i$，通过类似的推导，可以证明，该约束奇异广义力学系统在相空间的运动方程是广义正则方程.

综合上面的讨论得到了受完整外在约束奇异系统(包括高阶微商系统)在相空间的正则对称性质. 对受完整外在约束的奇异广义动力学系统(包括高阶微商系统)，保持系统的正则作用量及外在约束和内在约束条件均不变的对称变换能够导致正则 Noether 定理的守恒量，因为对于受完整外在约束的奇异系统(包括高阶微商系统)，对称变换保证了完整外在约束加在虚位移上的条件，对该系统能得到无外在约束情形下的正则 Noether 形式的守恒量. 在保持系统的所有约束条件均不变的变换下，导出了该系统的 PC 积分不变量，并证明了完整外在约束奇异系统的广义 PC 积分不变量和该系统的广义正则方程等价.

从前面的讨论知道，与第一类内在约束相联系的约束乘子是不定的，且具有任意性，正因为如此，才有 Dirac 猜想；还知道，完整外在约束奇异系统(包括高阶微商系统)，用扩展 Hamilton 量描述时与第一类完整约束相联系的约束乘子也许是不确定的，也可能具有任意性，因而可以把 Dirac 猜想推广到完整外在约束奇异系统(包括高阶微商系统)[10-11].

5-3 非完整约束奇异系统的正则对称性

一个动力学系统所受到的附加(外在)约束除几何约束及可积分的微分约束外，还受到不能积分的微分约束，这个系统就叫非完整系统，该系统受到的附加(外在)约束就叫做非完整约束. 由于非完整约束系统动力学方程的积分十分困难，甚至系统的运动微分方程不可积，因此，对该系统运动守恒量的研究对于了解该系统的物理状态就更加重要. 非完整约束奇异动力学系统不仅受非完整附加(外在)约束，而且由于描述该系统运动的 Lagrange 量奇异，在相空间还存在固有(内在)约束，因而研究其对称性与守恒量的关系就更加复杂[12].

本节基于非完整外在约束所满足的 Apell-Четаев 条件，并考虑到系统的固有约束，导出了非完整外在约束奇异动力学系统的正则方程；分析该系统在相空间中的对称性质，导出了相应的正则 Noether 定理；在考虑非完整外在约束与系统的固有约束的基础上，导出了该非完整约束奇异动力学系统的 PC 积分不变量，证明了该不变量与该系统的广义正则方程等价.

对受非完整外在约束并用奇异 Lagrange 量描述的动力学系统(简称为非完整约束奇异系统)，因其非完整外在约束不仅是时间、广义坐标的函数，还是广义速度的函数. 因此，对其约束条件的处理与对完整外在约束条件的处理完全不同. 本节利用非完整外在约束所满足的 Apell-Четаев 条件，先讨论非完整约束奇异系统的运动方程.

5-3-1 正则方程

对非完整约束奇异 Lagrange 量力学系统，设描写系统的 Lagrange 量为 $L(t;q,\dot{q})$，相应的广义坐标为 $q^i(i=1,2,\cdots,n)$，且系统所受的非完整外在约束记为

$$G_w(t;q^i,\dot{q}^i)=0 \tag{5-3-1}$$

位形空间方程中系统的运动方程(Четаев 型)为

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}=\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}\qquad (\lambda^w=\lambda^w(t)) \tag{5-3-2}$$

利用 Legendre 变换，引入正则共轭动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{5-3-3}$$

和正则 Hamilton 量(重复指标代数求和)

$$H_c=p_i\dot{q}^i-L(t;q,\dot{q})=p_i\dot{q}^i-L \tag{5-3-4}$$

可将系统在位形空间中的 Lagrange 量描述过渡到相空间中的 Hamilton 描述. 对于奇异 Lagrange 量系统，当 Hess 矩阵 $\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}\right]$ 退化时，由式(5-3-3)不能解出所有的 $\dot{q}^i$ 作为 q^i 和 p_i 的函数，表明该系统在相空间存在固有约束(内在约束)，设决定系统运动方程的固有初级约束记为

$$\phi_a^0(t;q^i,p_i)=0\quad (a=1,2,\cdots,k) \tag{5-3-5}$$

这里假设外在约束 $G_w=0(w=1,2,\cdots,l)$ 与内在约束 $\phi_a^0=0(a=1,2,\cdots,k)$ 是相容的，对受非完整外在约束的力学系统，非完整外在约束应满足 Apell-Четаев 条件，即

$$\frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i=0 \tag{5-3-6}$$

内在约束的等时变分应满足

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \qquad (5\text{-}3\text{-}7)$$

分别引入约束乘子 $\mu^a(t)$ 和 $\lambda^w(t)$，用 $\mu^a(t)$ 乘式(5-3-7)并用 $\lambda^w(t)$ 乘式(5-3-6)式，结合对 H_c 变分的结果并利用运动方程式(5-3-2)可得

$$\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\right)\delta p_i +$$

$$\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i = 0 \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

根据 Lagrange 乘子法则，由式(5-3-8)可得非完整约束奇异系统的运动方程：

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}3\text{-}9a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}3\text{-}9b)$$

如果非完整约束式(5-3-1)关于 $\dot{q}^i$ 是线性的，式(5-3-9a)和式(5-3-9b)即为该系统的正则方程. 一般来说，式(5-3-9b)还不是完全用正则变量 q^i 和 p_i 表示的，因为其中可能含广义速度 $\dot{q}^i$.

下面研究某种情况，即将式(5-3-3)解出的 $\dot{q}^i$ 代入式(5-3-1)时，可使式(5-3-1)变为相空间约束(外在约束可正则化)，并记为 $G_w^0(q^i, p_i)=0$. 假设约束 ϕ_a^0 和 G_w^0 相容，并且由 ϕ_a^0 和 G_w^0 导致的所有次级约束也彼此相容，此时，$\frac{\partial G_w^0}{\partial \dot{q}^i}$ 变为正则变量 q^i 和 p_i 的函数，并记 $\frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i} \equiv G_{wi}^0(q^i, p_i)$，由式(5-3-9a)和式(5-3-9b)，可将该非完整约束奇异系统的正则方程表示为

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}3\text{-}10a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i} - \lambda^w G_{wi}^0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}3\text{-}10b)$$

由式(5-3-10a)和式(5-3-10b)得到力学量 $F(t;q,p)$ 随时间的变化，即

$$\dot{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t;q,p) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p^i}\dot{p}_i =$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left\{F, H_T + \lambda^w G_{wi}^0 \frac{\partial F}{\partial p_i}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}11)$$

式中：$H_T = H_c + \lambda^a \phi_a^0$. 将 ϕ_a^0 和 G_w^0 作为初级约束，并统一记为 $\Phi_{a'}^0 = (G_w^0, \phi_a^0)$，初级约束的自洽性要求 $\dot{\Phi}_{a'}^0 = \frac{d\Phi_{a'}^0}{dt} = 0$，也许可确定乘子 $\mu^a(t)$，$\lambda^w(t)$，也许可能导致次级约束

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{a'}^1(t;q,p) &= \frac{\partial \Phi_{a'}^0}{\partial t} + \left\{\Phi_{a'}^0, H_T + \lambda^w G_{wi}^0 \frac{\partial \Phi_{a'}^0}{\partial p_i}\right\} \approx 0 \\ \Phi_{a'}^k(t;q,p) &= \frac{\partial \Phi_{a'}^{k-1}}{\partial t} + \left\{\Phi_{a'}^{k-1}, H_T + \lambda^w G_{wi}^0 \frac{\partial \Phi_{a'}^{k-1}}{\partial p_i}\right\} \approx 0 \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}12)$$

直至满足

$$\Phi_a^{m+1}(t;q,p) = \frac{\partial \Phi_a^m}{\partial t} + \left\{\Phi_{a'}^m, H_T + \lambda^w G_{wi}^0 \frac{\partial \Phi_a^m}{\partial p_i}\right\} = C_{a'k}^b \Phi_b^k \quad (k \leqslant m) \qquad (5\text{-}3\text{-}13)$$

为止. 设所有 $\Phi_{a'}^k (k = 0,1,\cdots,m)$ 彼此相容. 这就是上述可正则化的非完整约束奇异 Lagrange 量系统求其全部约束修改的 Dirac-Bergmann 算法. 求出此系统的全部约束后，可将约束分类，当第一类约束与系统的规范自由度相联系时，对系统量子化，需固定规范，这样上述非完整约束奇异系统也可像完整约束奇异系统那样纳入约束 Hamilton 系统的理论框架.

由此可以看出，对非完整外在约束奇异系统正则形式的研究比完整约束奇异系统更复杂，如果能将式(5-3-1)用式(5-3-3)消去式(5-3-1)中的 $\dot{q}^i$，使其化为用正则变量来表达，则非完整外在约束条件的处理可像 5-2 节完整外在约束条件那样类似处理；如果不能从式(5-3-3)解出的 $\dot{q}^i$(对奇异 Lagrange 量，一般不能全部解出 $\dot{q}^i$)并代入式(5-3-1)使其化为正则约束，则不能够把非完整外在约束条件像完整外在约束条件那样化为相空间约束来处理. 当非完整外在约束条件满足 Apell-Четаев 条件时，导出的该系统的正则方程的形式也不像完整外在约束奇异 Lagrange 量系统的正则方程那样形式.

5-3-2 正则 Noether 定理

对受外在非完整约束并用奇异 Lagrange 量描述的动力学系统，取增广相空间中的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} t' &= t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t, q^i, p_i) \\ q^{i\prime}(t') &= q^i(t) + \Delta q^i(t) = q^i(t) + \varepsilon_\sigma \xi^{i\sigma}(t, q^i, p_i) \\ p_i'(t') &= p_i(t) + \Delta p_i(t) = p_i(t) + \varepsilon_\sigma \eta_i^\sigma(t, q^i, p_i) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}14)$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, r)$为任意无穷小参量；$\tau^\sigma$，$\xi^{i\sigma}$和 η_i^σ 为正则变量的函数. 在式(5-3-14)的变换下假设正则 Lagrange 量$L^P = p_i\dot{q}^i - H_c(q^i, p_i)$改变一

个时间的全微分项 $\delta L^{\mathrm{p}}=\varepsilon_\sigma \mathrm{D}\Omega^\sigma$. 又假定内在约束条件式(5-3-5)在式(5-3-14)所确定的总变分下不变，利用总变分与等时变分的关系及约束的自洽性条件可以推得内在约束条件应满足式(5-3-7)，且假定在式(5-3-14)的变换下，非完整外在约束在式(5-3-14)确定的等时变分 δq^i 满足 Apell-Четаев 条件式(5-3-6).根据正则作用量

$$I^{\mathrm{p}}=\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\mathrm{d}t \tag{5-3-15}$$

在式(5-3-14)变换下有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i}\right)\delta p_i+\left(-\dot{p}_i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i}\right)\delta q^i+\mathrm{D}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t]\right\}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\sigma\mathrm{D}\Omega^\sigma\mathrm{d}t \tag{5-3-16}$$

从而

$$\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i}\right)\delta p_i+\left(-\dot{p}_i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i}\right)\delta q^i+\mathrm{D}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t]=\varepsilon_\alpha\mathrm{D}\Omega^\alpha \tag{5-3-17}$$

用 $\lambda^w(t)$乘式(5-3-6)、$\mu^a(t)$乘式(5-3-7)结合式(5-3-17)，并利用系统的运动方程式(5-3-9a)和式(5-3-9b)，即沿着系统运动的轨线，得到

$$\mathrm{D}[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t]=\varepsilon_\alpha\mathrm{D}\Omega^\alpha \tag{5-3-18}$$

根据 ε_σ 的任意性，利用式(5-3-14)有

$$p_i\xi^{i\sigma}-H_{\mathrm{c}}\tau_\sigma-\Omega^\sigma=\mathrm{const}\qquad(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{5-3-19}$$

这就得到受非完整约束奇异系统的正则 Noether 定理：如果在式(5-3-14)的变换下，非完整外在约束奇异动力学系统的正则 Lagrange 量改变一个时间的全微分项，且内在初级约束条件 $\phi_a^0=0$ 在式(5-3-14)确定的总变分下不变，以及非完整外在约束条件 $G_w=0$ 在式(5-3-14)确定的等时变分满足 Apell-Четаев 条件式(5-3-6)，那么，该非完整约束奇异系统在相空间中存在式(5-3-19)所示 r 个正则形式的守恒量. 类似地，可以讨论上述非完整约束奇异系统的正则 Noether 定理的逆定理[13].

例如：考虑一有限自由度力学系统，其 Lagrange 量为[13]

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}z^2(x^2+y^2)-z(x\dot{y}-y\dot{x}) \tag{5-3-20}$$

系统所受的非完整外在约束为

$$G=a^2\dot{x}^2-\dot{x}\dot{y}-\dot{y}^2=0 \tag{5-3-21}$$

式中：a 为常数. x，y，z 相应的正则共轭动量分别为

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\dot{x}+zy,\ p_y=\dot{y}-zx,\ p_z=0 \tag{5-3-22}$$

系统的固有初级约束为

$$\phi^0 = p_z = 0 \tag{5-3-23}$$

正则 Hamilton 量为

$$H_c = p_i \dot{q}^i - L =$$
$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + z(xp_y - yp_x) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{5-3-24}$$

将式(5-3-22)中解出的 $\dot{y}$，$\dot{x}$ 代入外在非完整约束式(5-3-21)，可将该外在非完整约束化为用正则变量表达的相空间约束

$$G^0 = a^2 (p_x - yz)^2 - (p_x - yz)(p_y + xz) -$$
$$(p_y + xz)^2 = 0 \tag{5-3-25}$$

将式(5-3-23)和式(5-3-25)视为相空间的初级约束，按上述非完整约束奇异系统修改的 Dirac-Bergmann 算法，它们的自洽性条件 $\dot{\phi}^0 = 0$ 和 $\dot{G}^0 = 0$ 分别导致确定约束乘子(Lagrange 乘子)$\mu(t)$和 $\lambda(t)$的方程，不产生任何次级约束，并且

$$\{\phi^0, G^0\} = 2a^2 y(p_x - yz) + x_1 p_1 -$$
$$x_2 p_2 - 2xyz + 2x(p_y + xz) \tag{5-3-26}$$

可见，$\phi^0 = 0$ 和 $G^0 = 0$ 均为第二类约束.

显然在时间平移变换下，式(5-3-20)所示系统的 Lagrange 量和式(5-3-23)所示固有初级约束均不变，注意到式(5-3-21)所示非完整约束是广义速度 $\dot{y}$，$\dot{x}$ 的二次齐次函数，记 $q^i = (x,\ y,\ z)$，在时间平移变换式 $t' = t - \varepsilon$ 下，不难看出

$$\frac{\partial G^0}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i = \frac{\partial G^0}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \varepsilon = 2\varepsilon G^0 = 0 \tag{5-3-27}$$

该式表明此时非完整约束满足式(5-3-6)Apell-Четаев 条件. 时间平移变换下，在式(5-3-14)中 $\tau^\sigma = 1$，$\xi^{i\sigma} = 0$，$\eta_i^\sigma = 0$. 根据非完整约束奇异系统的正则 Noether 定理，由式(5-3-19)，此非完整约束奇异 Lagrange 量系统存在能量守恒，即

$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + z(xp_y - yp_x) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const} \tag{5-3-28}$$

此结果也可从非完整约束系统的积分理论导出[14].

上述建立非完整约束奇异 Lagrange 量系统正则 Noether 定理的推导，完全可以移植到非完整约束正规 Lagrange 量系统中去. 相空间的正则对称性研究，实际上给出了另一形式的非完整系统的积分理论.

5-3-3 PC积分不变量

非完整系统的 PC 积分不变量在分析力学中占有基本地位. 它的重要性在于它和该系统的正则方程等价. 对 PC 积分不变量的研究已由正规 Lagrange 量系统推广到了奇异 Lagrange 量系统，其中包括高阶微商系统[9]. 下面研究非完整外在约束奇异 Lagrange 量系统的 PC 积分不变量. 设动力学系统由奇异 Lagrange 量$L(t;\ q^i,\ \dot{q}^i)$来描述，由于 Lagrange 量的奇异性，所以在相空间描述时系统存在式(5-3-5)所示固有约束，且该系统还存在式(5-3-1)所示的非完整外在约束. 系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}}=\int_{t_2}^{t_1} L^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\int_{t_2}^{t_1}\left[p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}}(t;q^i,p_i)\right]\mathrm{d}t \tag{5-3-29}$$

式中：$H_{\mathrm{c}}(t;\ q^i,\ p_i)$为系统的正则 Hamilton 量. 现在来考察正则作用量在增广相空间中的变换性质. 设在增广相空间中取

$$\left.\begin{aligned} t\rightarrow t'&=t+\Delta t=t(\alpha)\\ q^i(t)\rightarrow q^{i\prime}(t')&=q^i(t)+\Delta q^i(t,\alpha)\\ p_i(t)\rightarrow p_i'(t')&=p_i(t)+\Delta p_i(t,\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{5-3-30}$$

变换，式中 α 为参数，它适合

$$q^i(t,0)=q^i(t),p_i(t,0)=p_i(t) \tag{5-3-31}$$

在式(5-3-30)的变换下，正则作用量 I^{p} 的变更为

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha)\Delta\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}\delta q^i+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}\delta p_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p_i\delta q^i+(p_i\dot{q}^i-H_{\mathrm{c}})\Delta t\right]\right\}\mathrm{d}t \tag{5-3-32}$$

式中 I^{p} 的泛函导数分别为

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^i}=-\dot{p}_i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q^i} \tag{5-3-33}$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}=\dot{q}^i-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_i} \tag{5-3-34}$$

在式(5-3-30)的变换下，设非完整外在约束$G_w(t;\ q^i,\ \dot{q}^i)=0$满足式(5-3-6)所示 Apell-Четаев 条件，固有内在约束满足式(5-3-7)，引入 Lagrange 乘子，用$\lambda^w(t)$乘式(5-3-6)，μ^a 乘式(5-3-7)，并在$[t_1,\ t_2]$上积分后与式(5-3-32)合并，得

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=I^{\mathrm{p}\prime}(\alpha)\Delta\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta p_i}-\mu^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\right)\delta p_i+\right.$$

$$\left(\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta q^{i}}-\mu^{a}\frac{\partial\phi_{a}^{0}}{\partial q^{i}}-\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial\dot{q}^{i}}\right)\delta q^{i}+$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_{i}\delta\dot{q}^{i}+(p_{i}\dot{q}^{i}-H_{\mathrm{c}})\Delta t]\Big\}\mathrm{d}t \qquad (5\text{-}3\text{-}35)$$

沿着约束系统运动的轨线，利用约束系统的运动方程式(5-3-9)可得

$$\Delta I^{\mathrm{p}}=I^{\mathrm{p}'}(\alpha)\Delta\alpha=[p_{i}\delta q^{i}+(p_{i}\dot{q}^{i}-H_{\mathrm{c}}\Delta t)]_{1}^{2}=$$

$$[p_{i}\Delta q^{i}-H_{\mathrm{c}}\Delta t]_{1}^{2} \qquad (5\text{-}3\text{-}36)$$

式中

$$[p_{i}\Delta q^{i}-H_{\mathrm{c}}\Delta t]_{1}^{2}\equiv(p_{i}\Delta q^{i}-H_{\mathrm{c}}\Delta t)_{t=t_{2}}-$$

$$(p_{i}\Delta q^{i}-H_{\mathrm{c}}\Delta t)_{t=t_{1}} \qquad (5\text{-}3\text{-}37)$$

与 5-1-3 小节中讨论相仿，在 t，q^{i}，p_{i} 所张成的增广相空间中，取一条适合所有约束条件的闭曲线 C，将式(5-3-37)沿闭曲线 C 积分，可得

$$J=\oint_{C}(p_{i}\Delta q^{i}-H_{\mathrm{c}}\Delta t)=\mathrm{inv} \qquad (5\text{-}3\text{-}38)$$

J 称为非完整外在约束奇异系统的 PC 积分. 式(5-3-38)称为该系统的 PC 积分不变量. 它表明，在增广相空间中的约束(非完整外在约束和内在约束)所确定的超曲面 Γ_{p} 上，取一条闭曲线 C，如果非完整外在约束在式(5-3-30)确定的等时变分变换下，它满足式(5-3-6)Apell-Четаев 条件，且内在约束条件在式(5-3-30)所确定的等时变分(或总变分)下不变，那么沿着约束系统运动的轨线，沿闭曲线 C 的 PC 积分为不变量.

上面从正则形式作用量出发，利用非完整约束奇异系统的运动方程，导出了该非完整外在约束奇异系统的 PC 积分不变量. 从该系统的 PC 积分不变量出发也可以证明，该系统的运动方程是式(5-3-9a)和式(5-3-9b). 对非完整约束奇异系统，由于 Lagrange 量是奇异的，该系统有内在约束 $\phi_{a}^{0}=0$；同时，系统的运动又受非完整外在约束式(5-3-1)的限制. 这里同样假设外在非完整约束为 $G_{w}=0$ 和内在约束 $\phi_{a}^{0}=0$ 是相容的. 设非完整外在约束奇异系统的 PC 积分式在该系统运动方程组的解所确定的轨线管上，沿包围轨线管的闭曲线的积分为不变量. 与 5-1-3 小节类似的讨论可以证明，系统的运动方程必为式(5-3-9a)和式(5-3-9b). 表明，非完整约束奇异系统的 PC 积分不变量与该系统的运动方程等价.

5-4 非完整约束高阶微商奇异系统的正则对称性

动力学系统的高阶微商理论的研究已经有很长时间了，它在规范场理

论、引力场理论、修正 KdV 方程、超对称、非线性 σ -模型等问题中有广泛的讨论. 近来，对高阶微商理论的研究越来越受到人们的关注. 对于正规 Lagrange 量广义力学系统、外在约束正规 Lagrange 量广义力学系统(无内在约束)的动力学方程和位形空间的对称性以及无外在约束的高阶微商奇异 Lagrange 系统的相空间正则对称性均开展了讨论[1]. 在 5-2 节中已经研究了有完整外在约束的有限自由度高阶微商奇异系统的正则对称性质，这里将进一步研究非完整外在约束(含广义速度的高阶微商)的有限自由度高阶微商奇异 Lagrange 量系统(简称含非完整约束高阶微商奇异系统)在相空间的正则对称性质.

本节基于广义 Apell-Четаев 条件，导出了非完整外在约束高阶微商奇异系统的广义正则方程，分析了该系统在相空间中的对称性质，导出了相应的广义正则 Noether 定理及其逆定理；且基于高阶微商外在约束的广义 Apell-Четаев 条件，从奇异系统的正则形式的作用量出发，导出了该系统的广义 PC 积分不变量. 这说明该不变量与非完整约束高阶微商奇异系统的广义运动方程等价.

5-4-1 广义正则方程

广义力学系统的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商，记系统的 Lagrange 量为

$$L = L(t; q^i_{(0)}(t), q^i_{(1)}(t), \cdots, q^i_{(N)}(t))$$

其中 $q^i_{(s)} = \dfrac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s} q^i = \mathrm{D}^s q^i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 设系统的运动受高阶非完整外在约束的限制，其约束条件为[12]

$$G_w(t; q^i_{(0)}(t), q^i_{(1)}(t), \cdots, q^i_{(M)}(t)) = 0 \quad (w = 1, 2, \cdots, l; M \leqslant N) \tag{5-4-1}$$

位形空间中系统的广义 EL 方程为

$$(-1)^{(s)} \frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}} = \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}} \tag{5-4-2}$$

用 Ostrogradsky 变换引入广义正则动量

$$p_i^{(N-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(N)}} \tag{5-4-3a}$$

$$p_i^{(s-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}} - \dot{p}_i^{(s)} \quad (s = 1, 2, \cdots, N-1) \tag{5-4-3b}$$

系统的广义正则 Hamilton 量为

$$H_c = p_i^{(s)} q^i_{(s+1)} - L(t_i; q^i_{(s)}, \cdots, q^i_{(N)}) \tag{5-4-4}$$

对高阶微商奇异 Lagrange 系统，当广义 Hess 矩阵$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial q^i_{(N)}\partial q^j_{(N)}}\right]$退化时，由式(5-4-3a)不能解出所有 $q^i_{(N)}$ 作为 $q^i_{(s)}$ 和 $p^{(s)}_i$ 的函数($s=1$，2，…，$N-1$)，这表明该系统在相空间存在固有(内在)约束．设决定系统运动方程的内在约束记为

$$\phi^0_a(t;q^i_{(s)},p^{(s)}_i)=0\quad(a=1,2,\cdots,k)\tag{5-4-5}$$

这里假设外在约束 $G_w=0(w=1,2,\cdots,l)$ 与内在约束 $\phi^0_a=0(a=1,2,\cdots,k)$是相容的．对奇异 Lagrange 量系统，$q^i_{(s)}$，$p^{(s)}_i$ 彼此间是不独立的，它们之间要受到内在约束条件式(5-4-5)的限制，正则变量的变分适合

$$\left(\frac{\partial\phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}\delta q^i_{(s)}+\frac{\partial\phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i}\right)\delta p^{(s)}_i=0\tag{5-4-6}$$

对同时受外在约束的广义力学系统，外在约束加在 M 阶速度空间的广义 Apell-Четаев 条件[15]是

$$\delta G_w=\frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}}\delta q^i_{(M-1)}=0$$
$$(w=1,2,\cdots,l;M\leqslant N)\tag{5-4-7}$$

分别引入 Lagrange 乘子 $\mu^a(t)$ 和 $\lambda^w(t)$，用 μ^a 乘式(5-4-6)，并用 $\lambda^w(t)$ 乘式(5-4-7)，对广义正则 Hamilton 量的变分(并利用广义 EL 方程式(5-4-2))，得[12]

$$\begin{aligned}&\left(\dot q^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i}-\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i}\right)\delta p^{(s)}_i+\\&\left(-\dot p^{(s)}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}-\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}\right)\delta q^i_{(s)}+\\&\left(-\dot p^{(M-1)}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(M-1)}}-\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial q^i_{(M-1)}}-\right.\\&\left.\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}}\right)\delta q^i_{(M-1)}=0\end{aligned}\tag{5-4-8}$$

其中式(5-4-8)第二项对 s 求和中不含 $s=M-1$ 的项．根据 Lagrange 乘子法则，由式(5-4-8)得系统的运动方程：

$$\dot q^i_{(s)}=\frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i}+\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,n;\quad s=0,1,2,\cdots,N-1)\tag{5-4-9a}$$

$$\dot p^{(s)}_i=-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}-\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}$$
$$(i=1,2,\cdots,n;\quad s=1,2,\cdots,N-1,\quad s\neq M-1)\tag{5-4-9b}$$

$$\dot{p}_i^{(M-1)} = -\frac{\partial H_c}{\partial q_{(M-1)}^i} - \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_{(M-i)}^i} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q_{(M)}^i}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n; \quad M \leqslant N) \qquad (5\text{-}4\text{-}9c)$$

当系统不存在外在约束时，式(5-4- 9)可化为奇异 Lagrange 量广义力学系统的运动方程[16-17].

5-4-2 广义正则 Noether 定理

下面先讨论受外在非完整约束并用奇异 Lagrange 量描述的广义力学系统在相空间中的经典正则对称性质. 取广义增广相空间中连续群下的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} t' &= t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t, q_{(s)}^i, p_i^{(s)}) \\ q_{(s)}^i{}'(t') &= q_{(s)}^i(t) + \Delta q_{(s)}^i(t) = \\ &\quad q_{(s)}^i(t) + \varepsilon_\sigma \xi_{(s)}^{i\sigma}(t, q_{(s)}^i, p_i^{(s)}) \\ p_i^{(s)}{}'(t') &= p_i^{(s)}(t) + \Delta p_i^{(s)}(t) = \\ &\quad p_i^{(s)}(t) + \varepsilon_\sigma \eta_i^{(s)\sigma}(t, q_{(s)}^i, p_i^{(s)}) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}4\text{-}10)$$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,r)$ 为任意无穷小参量，$\tau^\sigma, \xi_{(s)}^{i\sigma}$ 和 $\eta_i^{(s)\sigma}$ 为正则变量的函数. 在式(5-4-10)变换下假设广义正则 Lagrange 量

$$L^{\mathrm{p}} = p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_c(t; q_{(s)}^i, p_i^{(s)})$$

改变一个时间的全微分项 $\delta L^{\mathrm{p}} = \varepsilon_\sigma \mathrm{D}\Lambda^\sigma, \Lambda^\sigma = \Lambda^\sigma(t; q_{(s)}^i, p_i^{(s)})$. 假定外在约束在式(5-4-10)所确定的 M 阶速度空间的等时变分适合广义 Apell-Четаев 条件式(5-4-7)，又假定内在约束条件式(5-4-5)在式(5-4-10)所确定的总变分下不变，即

$$\Delta \phi_a^0 = \frac{\partial \phi_a^0}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\Delta q_{(s)}^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\Delta p_i^{(s)} = 0 \qquad (5\text{-}4\text{-}11)$$

总变分与等时变分的关系可表示为

$$\Delta q_{(s)}^i = \delta q_{(s)}^i + \dot{q}_{(s)}^i \Delta t, \quad \Delta p_i^{(s)} = \delta p_i^{(s)} + \dot{p}_i^{(s)} \Delta t \qquad (5\text{-}4\text{-}12)$$

由约束的自洽性条件有

$$\dot{\phi}_a^0 = \frac{\partial \phi_a^0}{\partial t} + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\dot{q}_{(s)}^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\dot{p}_i^{(s)} = 0 \qquad (5\text{-}4\text{-}13)$$

由式(5-4-11)～式(5-4-13)可以推得

$$\delta \phi_a^0 = \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_{(s)}^i}\delta q_{(s)}^i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)} = 0 \qquad (5\text{-}4\text{-}14)$$

反过来，由式(5-4-14)可导出式(5-4-11). 正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} (p_i^{(s)} q_{(s+1)}^i - H_c)\mathrm{d}t$$

在式(5-4-10)变换下有[17]

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\Big(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}\Big)\delta p_i^{(s)}+\Big(-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}\Big)\delta q^i_{(s)}+$$

$$\mathrm{D}[p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}+(p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-H_c)\Delta t]\Big\}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\sigma \mathrm{D}\Lambda^\sigma \mathrm{d}t \quad (5\text{-}4\text{-}15\mathrm{a})$$

从而有

$$\Big(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}\Big)\delta p_i^{(s)}+\Big(-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}\Big)\delta q^i_{(s)}+$$

$$\mathrm{D}[p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}+(p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-H_c)\Delta t]=\varepsilon_\sigma \mathrm{D}\Lambda^\sigma \quad (5\text{-}4\text{-}15\mathrm{b})$$

用 $\lambda^w(t)$ 乘式(5-4-7)、$\mu^a(t)$ 乘式(5-4-14)，结合式(5-4-15b)，并利用系统的运动方程式(5-4-9a)～式(5-4-9c)，即沿着系统运动的轨线，由式(5-4-9)得

$$\mathrm{D}[p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}+(p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-H_c)\Delta t]=\varepsilon_\sigma \mathrm{D}\Lambda^\sigma \quad (5\text{-}4\text{-}16)$$

利用式(5-4-10)、式(5-4-12)，由式(5-4-16)有

$$p_i^{(s)}\xi^{i\sigma}_{(s)}-H_c\tau_\sigma-\Lambda^\sigma=\mathrm{const}\quad(\sigma=1,2,\cdots,r) \quad (5\text{-}4\text{-}17)$$

于是得到受非完整外在约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义正则 Noether 定理：如果在式(5-4-10)的变换下，非完整约束奇异广义力学系统的正则 Lagrange 量改变一个时间的全微分项，且内在约束条件 $\phi^0_a=0$ 在式(5-4-10)确定的总变分下不变，以及外在约束条件 $G_w=0$ 在式(5-4-10)确定的等时变分适合广义 Apell-Четаев 条件式(5-4-7)，那么，该非完整外在约束奇异广义力学系统在相空间中存在 r 个正则形式的守恒量式(5-4-17).

5-4-3 广义正则 Noether 定理的逆定理

如果非完整外在约束奇异 Lagrange 量广义力学系统在相空间中存在 r 个独立的运动守恒量，那么，就能找到相应的无穷小变换式(5-4-10)，使系统的正则作用量不变.

假设该广义力学系统在相空间中存在 r 个独立的运动守恒量，即

$$\mathrm{D}^\sigma(t;q^i_{(s)},p_i^{(s)})=C^\sigma\quad(\sigma=1,2,\cdots,r) \quad (5\text{-}4\text{-}18)$$

系统的任意轨线均满足运动方程式(5-4-9a)～式(5-4-9c)，因而有

$$\Big(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p_i^{(s)}}-\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial p_i^{(s)}}\Big)\bar{\eta}_i^{(s)\sigma}+\Big(-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}-\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}\Big)\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}+$$

$$\Big(-\dot{p}_i^{(M-1)}-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(M-1)}}-\mu^a\frac{\partial\phi^0_a}{\partial q^i_{(M-1)}}-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}}\Big)\bar{\xi}^{i\sigma}_{(M-1)}=0 \quad (5\text{-}4\text{-}19)$$

其中式(5-4-19)第二项对 s 的求和中不含 $s=M-1$ 的项，且

$$\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}=\xi^{i\sigma}_{(s)}-\dot{q}^i_{(s)}\tau^\sigma,\quad \bar{\eta}_i^{(s)\sigma}=\eta_i^{(s)\sigma}-\dot{p}_i^{(s)}\tau^\sigma \quad (5\text{-}4\text{-}20)$$

将式(5-4-18)对时间求导，再与式(5-4-19)合并得

$$\frac{\partial D^\sigma}{\partial t}+\frac{\partial D^\sigma}{\partial q^i_{(s)}}\dot{q}^i_{(s)}+\frac{\partial D^\sigma}{\partial p^{(s)}_i}\dot{p}^{(s)}_i+(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i}-\mu^a\frac{\partial \phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i})\bar{\eta}^{(s)\sigma}_i+$$
$$(-\dot{p}^{(s)}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}-\mu^a\frac{\partial \phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}})\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}+$$
$$(-\dot{p}^{(M-1)}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(M-1)}}-\mu^a\frac{\partial \phi^0_a}{\partial q^i_{(M-1)}}-$$
$$\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}})\bar{\xi}^{i\sigma}_{(M-1)}=0 \tag{5-4-21}$$

式中：$\sigma=1$，2，…，r，这些关系式沿任意轨线恒满足，所有 $\dot{p}^{(s)}_i$ 的系数应为零，则有

$$\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}=\frac{\partial D^\sigma}{\partial p^{(s)}_i} \tag{5-4-22}$$

取
$$D^\sigma=p^{(s)}_i\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}-L^p\tau^\sigma-\Lambda^\sigma \tag{5-4-23}$$

则
$$\tau^\sigma=(L^p)^{-1}(-p^{(s)}_i\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}+D^\sigma+\Lambda^\sigma) \tag{5-4-24}$$

当 $\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}$，$\tau^\sigma$ 求出后，可求得 $\xi^{i\sigma}_{(s)}=\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}+\dot{q}^i_{(s)}\tau^\sigma$，而 $p^{(s)\prime}_i$ 可由 $\xi^{i\sigma}_{(s)}$，τ^σ 确定，从而 $\eta^{(s)\sigma}_i$ 可由 $\xi^{i\sigma}_{(s)}$ 和 τ^σ 给出．于是，这样求出的 τ^σ，$\xi^{i\sigma}_{(s)}$，$\eta^{(s)\sigma}_i$ 可作为增广相空间的无穷小变换式(5-4-10)的生成函数，只要它们适合条件

$$\frac{\partial \phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}(\xi^{i\sigma}_{(s)}-\dot{q}^i_{(s)}\tau^\sigma)+\frac{\partial \phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i}(\eta^{(s)\sigma}_i-\dot{p}^{(s)}_i\tau^\sigma)=0 \tag{5-4-25}$$

$$\frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}}(\xi^{i\sigma}_{(M-1)}-\dot{q}^i_{(M-1)}\tau^\sigma)=0 \tag{5-4-26}$$

那么，在该生成函数 τ^σ，$\xi^{i\sigma}_{(s)}$，$\eta^{(s)\sigma}_i$ 确定的无穷小变换式(5-4-10)的变换下，受非完整外在约束奇异 Lagrange 广义力学系统的正则作用量是不变的．事实上，将式(5-4-23)～式(5-4-26)代入式(5-4-21)，可得

$$\frac{d}{dt}(p^{(s)}_i\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}-L^p\tau^\sigma)+(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i})\bar{\eta}^{(s)\sigma}_i+$$
$$(-\dot{p}^{(s)}_i-\frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}})\bar{\xi}^{i\sigma}_{(s)}=\dot{\Lambda}^\sigma \tag{5-4-27}$$

用 ϵ^σ 乘式(5-4-27)，并求和，然后在$[t_1,\ t_2]$上积分，可以得到式(5-4-15b)．可见，受非完整外在约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的正则作用量是不变的．于是得到广义正则 Noether 定理的逆定理：如果已知含非完整外在约束奇异 Lagrange 量广义力学系统运动方程的 r 个线性独立的运动守恒量，那么由式(5-4-22)、式(5-4-24)及其所确定的 τ^σ，$\xi^{i\sigma}_s$ 和 $\eta^{(s)\sigma}_i$ 生成的变换式(5-4-10)，只要内在约束条件 $\phi^0_a=0$ 和外在约束条件 $G_w=0$ 在式(5-4-10)确定的等时变分分别满足式(5-4-25)和式(5-4-26)，那么，该系统的正则作用

量在式(5-4-10)的变换下是不变的(或正则 Lagrange 量在式(5-4-10)的变换下改变一个时间的全微分项).

5-4-4 广义 PC 积分不变量

本小节基于高阶微商非完整外在约束的广义 Apell-Четаев 条件，从该约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的正则形式的作用量出发，导出了用高阶微商奇异 Lagrange 量描述的并受外在非完整约束的广义力学系统的广义 PC 积分不变量，指出了该不变量与非完整约束奇异广义力学系统的运动方程等价.

设广义力学系统的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商，记系统的 Lagrange 量为

$$L=L(t;\ q^i_{(0)}(t),\ q^i_{(1)}(t),\ \cdots,\ q^i_{(N)}(t))$$

其中 $q^i_{(s)}=\dfrac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}q^i=D^s q^i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 设系统的运动受高阶非完整外在约束的限制，其约束条件为

$$G_w(t;q^i_{(0)}(t),q^i_{(1)}(t),\cdots,q^i_{(M)}(t))=0$$
$$(w=1,2,\cdots,l;M\leqslant N) \tag{5-4-28}$$

将 Ostrogradsky 变换引入广义正则动量式(5-4-3a)、式(5-4-3b)和广义正则 Hamilton 量式(5-4-4)，就可将对系统的 Lagrange 量描述过渡到 Hamilton 量描述.

对高阶微商奇异 Lagrange 系统，当广义 Hess 矩阵 $\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^i_{(N)}\partial q^j_{(N)}}\right]$ 退化时，由式(5-4-3a)不能解出所有 $q^i_{(N)}$ 作为 $t,q^i_{(s)}$ 和 $p_i^{(s)}$ 的函数($s=0,1,\cdots,N-1$)，这表明该系统在相空间存在固有(内在)约束. 设决定系统运动方程的内在约束记为

$$\phi^0_a(t;q^i_{(s)},p_i^{(s)})=0\quad (a=1,2,\cdots,k) \tag{5-4-29}$$

这里假设外在非完整约束为 $G_w=0(w=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$和内在约束 $\phi^0_a=0(a=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$彼此是相容的. 受外在非完整约束奇异 Lagrange 量的广义力学系统的运动方程为式(5-4-9). 取增广相空间中的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} t' &= t+\Delta t(\theta) \\ q^{i\prime}_{(s)}(t') &= q^i_{(s)}(t)+\Delta q^i_{(s)}(t,\theta) \\ p^{(s)\prime}{}_i(t') &= p_i^{(s)}(t)+\Delta p_i^{(s)}(t,\theta) \end{aligned}\right\} \tag{5-4-30}$$

式中 θ 为任意参数，它满足

$$q^{i\prime}_{(s)}(t,0)=q^i_{(s)}(t),p^{(s)\prime}{}_i(t,0)=p_i^{(s)}(t) \tag{5-4-31}$$

假定外在非完整约束式(5-4-28)在式(5-4-30)所确定的 M 阶速度空间中等时变分下适合广义 Apell-Четаев 条件[15]：

$$\delta G_w = \frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}} \delta q^i_{(M-1)} = 0$$

$$(w = 1, 2, \cdots, l; M \leqslant N) \tag{5-4-32}$$

式中：$\delta q^i_{(M-1)}$ 为式(5-4-30)所确定的等时变分. 又假定内在约束条件式(5-4-29)在式(5-4-30)所确定的总变分下不变，即

$$\Delta\phi^0_a = \frac{\partial \phi^0_a}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}\Delta q^i_{(s)} + \frac{\partial \phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i}\Delta p^{(s)}_i = 0 \tag{5-4-33}$$

根据总变分与等时变分的关系以及约束 $\phi^0_a=0$ 自洽性条件可以推得

$$\delta\phi^0_a = \frac{\partial \phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}\delta q^i_{(s)} + \frac{\partial \phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i}\delta p^{(s)}_i = 0 \tag{5-4-34}$$

式中：$\delta q^i_{(s)}$ 和 $\delta p^{(s)}_i$ 为等时变分. 正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} (p^{(s)}_i q^i_{(s+1)} - H_c)\mathrm{d}t$$

在式(5-4-30)变换下有[17]

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta = \int_1^2 \Big\{ \Big(\dot{q}^i_{(s)} - \frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i}\Big)\delta p^{(s)}_i + \Big(-\dot{p}^{(s)}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}}\Big)\delta q^i_{(s)} + \mathrm{D}[p^{(s)}_i \delta q^i_{(s)} + (p^{(s)}_i q^i_{(s+1)} - H_c)\Delta t]\Big\}\mathrm{d}t \tag{5-4-35}$$

用约束乘子 $\lambda^w(t)$ 乘式(5-4-32)，约束乘子 $\mu^a(t)$ 乘式(5-4-34)并求和，结合式(5-4-35)有

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big(\dot{q}^i_{(s)} - \frac{\partial H_c}{\partial p^{(s)}_i} - \mu^a(t)\frac{\partial \phi^0_a}{\partial p^{(s)}_i}\Big)\delta p^{(s)}_i + \Big(-\dot{p}^{(s)}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(s)}} - \mu^a(t)\frac{\partial \phi^0_a}{\partial q^i_{(s)}}\Big)\delta q^i_{(s)} + \Big(-\dot{p}^{(M-1)}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i_{(M-1)}} - \mu^a(t)\frac{\partial \phi^0_a}{\partial q^i_{(M-1)}} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i_{(M)}}\Big)\delta q^i_{(M-1)} + \mathrm{D}[p^{(s)}_i \delta q^i_{(s)} + (p^{(s)}_i q^i_{(s+1)} - H_c)]\Delta t\Big\}\mathrm{d}t \tag{5-4-36}$$

式(5-4-36)中圆括号第三项对 $\delta q^i_{(s)}$ 乘积求和中不含 $s = M-1$ 的项. 利用系统的运动方程式(5-4-9a)～式(5-4-9c)，即沿着约束系统的运动轨线，可得

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\theta)\Delta\theta = [p^{(s)}_i \delta q^i_{(s)} + (p^{(s)}_i q^i_{(s+1)} - H_c)\Delta t]_1^2 = [p^{(s)}_i \Delta q^i_{(s)} - H_c\Delta t]_1^2 \tag{5-4-37}$$

式中

$$
\begin{aligned}
\left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_c\Delta t\right]_1^2 \equiv & \left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_c\Delta t\right]_{t=t_2} - \\
& \left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_c\Delta t\right]_{t=t_1}
\end{aligned}
\tag{5-4-38}
$$

同前面类似的讨论，在 $t, q_{(s)}^i, p_i^{(s)}$ 所张成的增广相空间由约束确定的子空间 Γ_p 中，在系统运动的轨线管上，取一条满足所有约束条件的任意闭曲线 C，将式(5-4-37)沿闭曲线 C 积分，可得

$$
J = \oint_C \left[p_i^{(s)}\Delta q_{(s)}^i - H_c\Delta t\right] = \text{inv} \tag{5-4-39}
$$

J 称为非完整约束奇异广义力学系统的 PC 积分. 它表明，在增广相空间中由约束(外在约束和内在约束)确定的超曲面 Γ_p 上，取一条闭曲线 C，如果内在约束条件 $\phi_a^0=0$ 在式(5-4-30)确定的总变分下不变，以及非完整外在约束条件 $G_w=0$ 在式(5-4-30)确定的 M 阶速度空间中的等时变分适合广义 Apell-Четаев 条件式(5-4-32)，那么沿着非完整约束奇异广义力学系统运动的"轨线"，式(5-4-39)沿闭曲线 C 的积分为不变量. 式(5-4-39)称为非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义 PC 积分不变量.

上面利用非完整约束奇异广义力学系统的运动方程导出了该系统的广义 PC 积分. 现在，反过来从非完整约束奇异广义力学系统的广义 PC 积分出发，说明该非完整约束奇异广义力学系统的运动方程是式(5-4-9a)～式(5-4-9c).

对非完整约束奇异广义力学系统，由于 Lagrange 量是奇异的，系统的运动受相空间约束的限制；同时，设系统的运动受高阶非完整外在约束式(5-4-28)的限制. 这里同样假设外在非完整约束为 $G_w=0$ 和内在约束 $\phi_a^0=0$ 是相容的. 设非完整约束奇异广义动力学系统在相空间中的动力学轨线由一组微分方程确定. 设在该方程组的解所确定的轨线管上，沿包围此轨线管的闭曲线 C(适合约束条件)的广义 PC 积分为不变量，与一阶微商情形的推导类比，用 $q^i \to q_{(s)}^i$、$p_i \to p_i^{(s)}$ ，通过类似的推导，可以得到该非完整约束奇异广义力学系统的运动方程式(5-4-9). 即该运动微分方程必具有非完整约束奇异广义力学系统的运动方程的形式. 由此可见，非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义 PC 积分不变量和该系统的运动方程等价.

5-5 场论中附加约束系统位形空间中的经典对称性质

对称性和守恒律有密切联系，关于系统经典对称性的分析方法主要有 Noether 法、Lie 法和形式不变法[1,18]等，系统的整体对称性，一般将导致

系统的守恒量. Noether 早年关于系统对称性的研究以及其后对约束系统和非完整力学系统的推广均是在位形空间中来分析的. 对于用奇异 Lagrange 量描述的系统(如规范不变系统), 即使系统不受附加约束, 在相空间中其正则变量间也存在固有(内在)约束, 称为约束 Hamilton 系统. 近来对该系统的经典和量子对称性质开展了系统的研究[19-22], 但对场论中受附加约束的奇异 Lagrange 量系统(简称为场论中附加约束奇异系统)的基本理论及应用的研究均很少. 然而, 众多的场模型系统不仅描述场的 Lagrange 量是奇异的, 而且还受附加约束, 如非线性 σ -模型、Skyme 模型、CP^{N-1} 模型等. 另外, 电磁场在介质分界面上的边界条件也可视为一种附加约束条件[23-25], 处理电磁场在介质分界面附近的性质, 可视其为附加约束奇异系统. 因此, 对这一类场模型系统的基本理论及应用的研究十分必要. 本节将讨论场论中受附加约束系统在位形空间中的经典对称性质.

这里先论述场论中附加约束奇异系统的经典对称性质, 然后再论述其量子对称性, 在经典对称性中基于广义变分原理, 导出场论中附加约束(不含场量微商与含场量微商的约束)系统(包括附加约束 2 阶微商奇异系统)的 EL 方程, 以及该系统在位形空间经典水平的变换性质; 分析场论中附加约束奇异系统(包括附加约束 2 阶微商奇异系统)在相空间中的对称性质, 导出该系统的正则方程及相应的广义正则 Noether 定理, 以及从该系统的正则作用量形式出发, 导出该系统的 PC 积分不变量, 说明该积分不变量与系统的正则方程等价. 此外, 又基于场论中附加约束系统在位形空间经典水平的变换性质, 讨论在 Poincaré 群变换下电磁波在介质分界面上反射和折射时的变换性质[23-25], 在经典水平下解释电磁波在介质分界面上反射和折射时垂直于入射面方向的能量中心的"横移"效应[23-25].

5-5-1 位形空间的运动方程

考虑一个受附加约束的并用 Lagrange 量描述的场模型系统(可以是连续介质力学系统), 设该系统由非独立的场量 $\varphi^\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 描述, 其中 $x=(t,\boldsymbol{x})$ 为 4 维时空指标, α 可代表场量的分量指标, 如张量指标、旋量指标、同位旋指标或幺旋指标等. 设场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})$, 且不显含时空坐标, 其中 $\varphi^\alpha_{,\mu}\equiv\partial_\mu\varphi^\alpha(\mu=0,1,2,3)$. 场的 Lagrange 量为 $\varphi^\alpha(x),\dot{\varphi}^\alpha$ 的泛函, 即

$$L[\varphi^\alpha,\dot{\varphi}^\alpha]=\int_V \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu}) \tag{5-5-1}$$

系统的运动如果受附加有限约束(代数形式的约束)的限制, 其约束条件表示为

$$G_w(\varphi^\sigma)=0 \quad (w=1,2,\cdots,l_1) \tag{5-5-2a}$$

系统的运动如果受附加含场量微商的约束(微商形式约束)的限制，其约束条件表示为

$$G_w(\varphi^\sigma,\varphi^\sigma_{,\mu})=0 \quad (w=1,2,\cdots,l_2) \tag{5-5-2b}$$

先讨论含场量微商约束的情形. 系统的作用量

$$I=\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(\varphi^\sigma,\varphi^\sigma_{,\mu}) \tag{5-5-3}$$

按广义变分原理[23,26]，在约束条件式(5-5-2b)下，真实运动的场量 $\varphi^\sigma(x)$ 使作用量取极值，考虑场量 $\varphi^\sigma(x)$ 作一微小改变

$$\varphi^{\sigma\prime}(x)=\varphi^\sigma(x)+\delta\varphi^\sigma(x) \tag{5-5-4}$$

$\delta\varphi^\sigma$ 为实质变分 ($\delta x^\mu=0$). 在式(5-5-4)的变分下作用量 I 取极值，$\delta I=0$，在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上有 $\delta\varphi^\sigma(x)\,|_{\partial\Omega}=0$. 在式(5-5-4)的变更下，作用量的变分

$$\delta I=\int \mathrm{d}^4x\{[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\sigma}-\partial_\mu(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}})]\delta\varphi^\sigma+\partial_\mu(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}}\delta\varphi^\sigma)\}=0 \tag{5-5-5}$$

又场量 $\varphi^{\sigma\prime}(x),\varphi^\sigma(x)$ 均应满足约束条件，即在式(5-5-4)的变换下，约束的实质变分不变，有

$$\delta G_w=\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\sigma}\delta\varphi^\sigma+\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}}\delta\varphi^\sigma_{,\mu}=0 \quad (w=1,2,\cdots,l) \tag{5-5-6}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^w(x)$，用 $\lambda^w(x)$ 乘式(5-5-6)并在 Ω 上积分，可得

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\{[\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\sigma}-\partial_\mu(\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}})]\delta\varphi^\sigma+\partial_\mu[\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}}\delta\varphi^\sigma]\}=0 \tag{5-5-7}$$

式(5-5-5)与式(5-5-7)合并，得

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\{[\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^\sigma}-\partial_\mu(\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}})]\delta\varphi^\sigma+\partial_\mu(\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}}\delta\varphi^\sigma)\}=0 \tag{5-5-8}$$

其中 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}+\lambda^wG_w$. 式(5-5-8)中的最后一项，由 Gauss 定理化为区域边界 $\partial\Omega$ 上的面积分，在 $\partial\Omega$ 上 $\delta\varphi^\sigma=0$，故式(5-5-8)最后一项积分为零，有

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x[\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^\sigma}-\partial_\mu(\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}})]\delta\varphi^\sigma=0 \tag{5-5-9}$$

用 Lagrange 乘子待定法则，从式(5-5-9)得场论中含场量微商的约束系统在位形空间运动的 EL 方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^\sigma}-\partial_\mu(\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}})=0 \tag{5-5-10}$$

对受附加有限约束场系统，有限约束式(5-5-2a)在式(5-5-4)的变换下，

其实质变分不变，即

$$\delta G_w = \frac{\partial G_w}{\partial \varphi^a}\delta\varphi^a = 0$$

且 $\delta I=0$，则位形空间运动的 EL 方程仍为式(5-5-10)，该式可视为含完整约束有限自由度系统在场论中的推广.

用广义变分原理方法导出系统的运动方程对有限自由度非完整力学系统不适用，有限自由度非完整力学系统等时变分必须满足 Apell-Четаев 条件，即

$$\delta G_w = \frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i = 0$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^w(t)$ 并用 $\lambda^w(t)$ 乘式上式，得

$$\lambda^w(t)\ \frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i = 0$$

式中：$\lambda^w(t)\ \dfrac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}$ 为约束反力，δq^i 为虚位移. 有限自由度动力学系统的 Apell-Четаев 条件表明，约束反力不做功，这是理想约束满足的条件. 导出非完整力学系统的运动方程必须适合此条件. 对非完整力学系统用广义变分原理，附加约束在等时变分不变时，也得不到正确的运动方程，因为

$$\frac{\partial G_w}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i = 0$$

给不出虚位移条件. 导出非完整力学系统的运动方程(如 Routh 方程)则用其他原理(如 D'Alembert-Lagrange 原理)再结合 Apell-Четаев 条件得到.

5-5-2 位形空间经典水平的变换性质

取位形空间的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x,\varphi^a,\varphi^a_{,\mu}) \\ \varphi^{a\prime}(x') &= \varphi^a(x) + \Delta\varphi^a(x) = \varphi^a(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{a\sigma}(x,\varphi^a,\varphi^a_{,\mu}) \end{aligned}\right\} \tag{5-5-11}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小参数，$\tau^{\mu\sigma},\xi^{a\sigma}$ 为无穷小变换的生成函数. 场量的总变分 $\Delta\varphi^a$ 与实质变分 $\delta\varphi^a$ 的关系可表示为

$$\Delta\varphi^a = \delta\varphi^a + \varphi^a_{,\mu}\Delta x^\mu \tag{5-5-12}$$

在式(5-5-11)的变换下，设系统作用量

$$I = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}(x,\varphi^a,\varphi^a_{,\mu})$$

的改变为

$$\Delta I = \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \Big\{ [\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^a} - \partial_{\mu}(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^a_{,\mu}})]\delta\varphi^a +$$

$$\partial_{\mu}[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\delta\varphi^a + \mathscr{L}(x)\Delta x^{\mu}]\Big\} =$$

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x(\partial_{\mu} W^{\mu} + R) \tag{5-5-13}$$

在式(5-5-11)的变换下，设含场量微商的附加约束 $G_w(\varphi^a, \varphi^a_{,\mu}) = 0$ 在式(5-5-11)确定的实质变分下的改变为

$$\delta G_w = \frac{\partial G_w}{\partial \varphi^a}\delta\varphi^a + \frac{\partial G_w}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\delta\varphi^a_{,\mu} = K_w \quad (w = 1, 2, \cdots, l) \tag{5-5-14}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^w(x)$，并用 $\lambda^w(x)$ 乘式(5-5-14)，对指标 w 求和，再在 Ω 上积分得

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \Big\{ [\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial \varphi^a} - \partial_{\mu}(\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial \varphi^a_{,\mu}})]\delta\varphi^a +$$

$$\partial_{\mu}[\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\delta\varphi^a]\Big\} = \int \mathrm{d}^4 x \lambda^w K_w \tag{5-5-15}$$

式(5-5-15)结合式(5-5-13)得

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \Big\{ [\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \varphi^a} - \partial_{\mu}(\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \varphi^a_{,\mu}})]\delta\varphi^a +$$

$$\partial_{\mu}[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\delta\varphi^a + \mathscr{L}(x)\Delta x^{\mu} - W^{\mu}]\Big\} =$$

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \Big\{ R + \lambda^w K_w - \partial_{\mu}[\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\delta\varphi^a]\Big\} \tag{5-5-16}$$

由于积分区域是任意的，利用系统在位形空间运动的 EL 方程式(5-5-10)，由式(5-5-16)得[26-27]

$$\partial_{\mu}[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\delta\varphi^a + \mathscr{L}(x)\Delta x^{\mu} - W^{\mu}] =$$

$$R + \lambda^w K_w - \partial_{\mu}[\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\delta\varphi^a] \tag{5-5-17}$$

式(5-5-17)给出了一般情况下，含场量微商的附加约束系统在位形空间经典水平下的变换性质，当 $R=0$，且 $K_w=0$ 时，即在式(5-5-11)的变换下，Lagrange 量密度仅改变一个 4 维散度项，且该系统含场量微商的附加约束式

(5-5-2b)在式(5-5-11)确定的实质变分不变，即满足式(5-5-6)，从式(5-5-17)可得

$$\partial_{\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^{\sigma}_{,\mu}}\delta\varphi^{\sigma}+\mathscr{L}(x)\Delta x^{\mu}-W^{\mu}\right]=-\partial_{\mu}\left[\frac{\partial(\lambda^{w}G_{w})}{\partial \varphi^{\sigma}_{,\mu}}\delta\varphi^{\sigma}\right] \tag{5-5-18}$$

式(5-5-18)给出了较特殊情况下该系统在位形空间中经典水平下的变换性质，利用式(5-5-18)可以讨论电磁场在边界附近经典水平的变换性质. 可见，在式(5-5-11)的变换下，Lagrange 量密度改变一个四维散度项，该系统含场的微商附加约束的实质变分不变，从式(5-5-17)还得不到通常无附加约束情况下的守恒律，如果在式(5-5-11)的变换下，含微商的附加约束不仅满足式(5-5-6)，并且有

$$\frac{\delta G_{w}}{\delta \varphi^{\sigma}_{,\mu}}\delta\varphi^{\sigma}=0 \tag{5-5-19}$$

代入式(5-5-18)得

$$\partial_{\mu}J^{\mu}=0 \tag{5-5-20}$$

其中：

$$J^{\mu}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^{\sigma}_{,\mu}}\delta\varphi^{\sigma}+\mathscr{L}(x)\Delta x^{\mu}-W^{\mu} \tag{5-5-21}$$

因为无穷小参数 $\varepsilon_{\sigma}(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 是独立的，在式(5-5-11)的变换下，如果含微商约束系统的 Lagrange 量密度改变一个四维散度项，且含微商的附加约束 $G_{w}(\varphi^{\sigma},\varphi^{\sigma}_{,\mu})=0$ 在式(5-5-11)确定的实质变分不变，以及该约束在式(5-5-11)的变换下，满足 $\frac{\partial G_{w}}{\partial \varphi^{\sigma}_{,\mu}}\delta\varphi^{\sigma}=0$（该条件类似于有限自由度非完整力学系统等时变分所满足的 Apell-Четаев 条件），由式(5-5-12)，式(5-5-20)和式(5-5-21)于是得到含场量微商的附加约束系统存在 r 个微分形式的守恒律，即

$$\partial_{\mu}J^{\mu\sigma}=0 \tag{5-5-22}$$

式中

$$J^{\mu\sigma}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^{\sigma}_{,\mu}}(\xi^{\rho\sigma}-\varphi^{\sigma}_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+\mathscr{L}(x)\tau^{\mu\sigma}-W^{\mu\sigma}$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,r) \tag{5-5-23}$$

$J^{\mu\sigma}$ 为守恒流，$W^{\mu}=\varepsilon_{\sigma}W^{\mu\sigma}$.

对不含场量微商的附加有限约束系统可作类似的推导，不同的是只要有限约束 $G_{w}(\varphi^{\sigma})=0$ 在式(5-5-11)确定的实质变分不变，即

$$\delta G_{w}=\frac{\partial G_{w}}{\partial \varphi^{\sigma}}\delta\varphi^{\sigma}=0$$

作用量的改变仍适合式(5-5-13)，且 $R=0$ 就可得到有限约束系统存在 r 个微分形式的守恒律式(5-5-23)。

5-6 场论中附加约束奇异系统的经典正则对称性质

5-5 节讨论了场论中附加约束系统(有限约束、含微商的约束)在位形空间的运动方程及经典水平的变换性质，本节将讨论附加约束奇异系统相空间的正则对称性质，讨论该系统的正则方程及该系统相空间的守恒律.

5-6-1 正则方程 修改的 Dirac-Bergmann 算法

考虑场论中受附加约束的并用奇异 Lagrange 量描述的系统(可以是连续介质力学系统)，如果附加约束为有限约束则由式(5-5-2a)表示，对附加约束为含场量微商的约束则由式(5-5-2b)表示. 对这 2 种情形的附加约束(有限约束、含微商的约束)奇异系统，其位形空间运动的 EL 方程均由式(5-5-10)描述. 但在相空间求正则运动方程时，对含场量微商的约束奇异系统，则要求由正则动量的定义式，可解出 $\dot{\varphi}^a$ 作为正则变量的函数，使 $G_w(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu})=0$ 中的 $\dot{\varphi}^a$ 能够用正则变量替换且与相空间的内在约束相容. 下面假设附加约束系统与奇异 Lagrange 量系统相空间的内在约束相容. 先讨论不含场量时间微商的附加约束奇异系统的正则方程.

1. 附加约束不含场量时间微商

设场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu})$，且不显含时空坐标，其中 $\varphi^a_{,\mu}\equiv\partial_\mu\varphi^a(\mu=0,1,2,3)$. 场的 Lagrange 量为 $\varphi^a,\dot{\varphi}^a$ 的泛函，即

$$L[\varphi^a,\dot{\varphi}^a]=\int_V \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu}) \tag{5-6-1}$$

系统的运动如果受附加有限约束(代数形式的约束)的限制，其约束条件表示为

$$G_w(\varphi^a)=0 \quad (w=1,2,\cdots,m) \tag{5-6-2}$$

由广义变分原理，可得该系统的 EL 方程为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a_{,\mu}}\right)=\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a},\quad \lambda^w=\lambda^w(x) \tag{5-6-3}$$

从位形空间过渡到相空间描述，引入正则共轭动量密度

$$\pi_a=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^a} \tag{5-6-4}$$

系统的正则 Hamilton 密度为 $\mathscr{H}_c=\dot{\varphi}^a\pi_a-\mathscr{L}$，正则 Hamilton 量为

$$H_c=\int_V \mathrm{d}^3x\mathscr{H}_c=\int_V \mathrm{d}^3x(\dot{\varphi}^a\pi_a-\mathscr{L}) \tag{5-6-5}$$

在正则变量 φ^a 和 π_a 的任意变分下，正则 Hamilton 量的变分为

$$\begin{aligned}\delta H_c&=\int_V \mathrm{d}^3x[\dot{\varphi}^a\delta\pi_a+\pi_a\delta\dot{\varphi}^a-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^a}\delta\dot{\varphi}^a+\partial_k\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^a_{,k}}\right)\delta\varphi^a]\\&=\int_V \mathrm{d}^3x\left[\dot{\varphi}^a\delta\pi_a-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a+\partial_k\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a_{,k}}\right)\delta\varphi^a\right]\end{aligned} \tag{5-6-6}$$

由式(5-6-3)得

$$\dot{\pi}^a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^a}\right)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a}-\partial_k(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a_{,k}})-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a} \tag{5-6-7}$$

式(5-6-7)中的 $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a}$ 代入式(5-6-6)，有

$$\delta H_c=\int_V \mathrm{d}^3x\left[\dot{\varphi}^a\delta\pi_a-\dot{\pi}^a\delta\varphi^a-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a\right] \tag{5-6-8}$$

另一方面，H_c 为 φ^a 和 π_a 的泛函有

$$\delta H_c=\int_V \mathrm{d}^3x\left[\frac{\delta H_c}{\delta\pi^a}\delta\pi_a+\frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a}\delta\varphi^a\right] \tag{5-6-9}$$

比较式(5-6-8)和式(5-6-9)，得

$$\int_V \mathrm{d}^3x\left[\left(\dot{\varphi}^a-\frac{\delta H_c}{\delta\pi^a}\right)\delta\pi_a-\left(\dot{\pi}^a+\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a}+\frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a}\right)\delta\varphi^a\right]=0 \tag{5-6-10}$$

对附加约束正规 Lagrange 量系统，$\delta\varphi^a(x)$，$\delta\pi_a$ 独立，由式(5-6-10)可得该系统的正则方程. 对附加约束奇异 Lagrange 量系统，当 Hess 矩阵退化时

$$\det|H_{a\beta}|=\det\left|\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^a\,\partial\dot{\varphi}^\beta}\right|=0$$

由式(5-6-4)不能解出所有 $\dot{\varphi}^a$ 作为正则变量的函数，这表明该系统在相空间存在固有(内在)约束. 设 $[H_{a\beta}]$ 的秩为 $n-R$，那么系统存在的初级约束为

$$\phi^0_a(\varphi^a,\pi_a)=0\quad(a=1,2,\cdots,n-R) \tag{5-6-11}$$

假设附加约束式(5-6-2)和内在约束式(5-6-11)是相容的，对附加约束奇异 Lagrange 量系统，$\varphi^a(x)$，$\pi_a(x)$ 彼此间是不独立的，它们之间还要受到内在约束条件式(5-6-11)的限制. 式(5-6-11)在正则变量的变分下适合

$$\frac{\partial\phi^0_a}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a+\frac{\partial\phi^0_a}{\partial\pi_a}\delta\pi_a\approx 0 \tag{5-6-12}$$

方程. 引入 Lagrange 乘子 $\mu^a(x)$，并用 $\mu^a(x)$ 乘式(5-6-12)积分，结合式(5-6-10)得系统的正则方程

$$\dot{\varphi}^{a}=\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta \pi_{a}} \tag{5-6-13a}$$

$$\dot{\pi}_{a}=-\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta \varphi^{a}}-\frac{\delta H'}{\delta \varphi^{a}} \tag{5-6-13b}$$

式中：$H'=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\lambda^{w}G_{w}, H_{\mathrm{T}}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\mu^{a}\phi_{a}^{0})$，式(5-6-13a)和式(5-6-13b)又可写为

$$\dot{\varphi}^{a}=\{\varphi^{a}, H'_{T}\} \tag{5-6-14a}$$

$$\dot{\pi}_{a}=\{\pi_{a}, H'_{T}\} \tag{5-6-14b}$$

式中：$H'_{\mathrm{T}}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\mu^{a}\phi_{a}^{0}+\lambda^{w}G_{w})=H_{\mathrm{T}}+H'$，$\{\cdot,\cdot\}$ 为场的 Poisson 括号．力学量 $F(\varphi^{a},\pi_{a})=\int\mathrm{d}^{3}xf(\varphi^{a},\pi_{a})$ 随时间的演化，由式(5-6-14a)和式(5-6-14b)得

$$\dot{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi,\pi)=\int\mathrm{d}^{3}x\left(\frac{\delta F}{\delta\varphi^{a}}\dot{\varphi}^{a}+\frac{\delta F}{\delta\pi_{a}}\dot{\pi}_{a}\right)=\{F, H'_{\mathrm{T}}\} \tag{5-6-15}$$

将附加约束式(5-6-2)和初级固有约束式(5-6-11)作为系统的初级约束，并统一记为 $\Phi_{a'}^{0}=(G_{w},\phi_{a}^{0})$，$\Phi_{a'}^{0}$ 的自洽性要求 $\dot{\Phi}_{a'}^{0}=0$，可能导致其他的次级约束，即

$$\Phi_{a'}^{1}=\{\Phi_{a'}^{0}, H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{5-6-16}$$

次级约束的自洽性要求，又可导致其他的次级约束，即

$$\Phi_{a'}^{k}=\{\Phi_{a'}^{k-1}, H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{5-6-17}$$

等，直至满足

$$\Phi_{a'}^{m+1}=\{\Phi_{a'}^{m}, H'_{\mathrm{T}}\}=C_{a'b}^{k}\Phi_{k}^{b}\quad(k\leqslant m) \tag{5-6-18}$$

仍讨论所有 $\Phi_{a'}^{k}(k=0,1,\cdots,m;\ a'=a,\ w)$ 均彼此相容的情形．上述求系统约束的算法与通常不含外在(附加)约束的奇异 Lagrange 量系统求约束的 Dirac-Bergmann 算法相似，只需将后者中的 H_{T} 改为 H'_{T} 就是了．求出系统在相空间的所有初级约束和次级约束后，可按约束的 Possion 括号是否为零，将约束分为第一类约束和第二类约束，第一类约束与规范对称性有关(参见 3-1 节)．对 Dirac 猜想有效的系统，其经典运动方程也可由扩展 Hamilton 量 H_{E} 导出．对含第一类约束的系统，需选规范条件对系统进行量子化，然后研究系统的量子对称性．

2. 附加约束含场量的时间微商

考虑一个受含场量时间微商附加约束的并用 Lagrange 量描述的系统，设该系统由非独立的场量 $\varphi^{a}(x)\ (a=1,2,\cdots,n)$ 描述，其中 $x=(t,\boldsymbol{x})$ 为 4

维时空坐标. 又设场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu})$，且不显含时空坐标，其中 $\varphi^{\alpha}_{,\mu}\equiv\partial_{\mu}\varphi^{\alpha}(\mu=0,1,2,3)$. 场的 Lagrange 量为 $\varphi^{\alpha},\dot{\varphi}^{\alpha}$ 的泛函，即

$$\mathscr{L}[\varphi^{\alpha},\dot{\varphi}^{\alpha}]=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu})\tag{5-6-19}$$

设系统的运动受含场量时间微商附加约束的限制，其约束条件表示为

$$G_{w}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu})=0\quad(w=1,2,\cdots,l)\tag{5-6-20}$$

由广义变分原理，可得该系统的 EL 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi^{\alpha}}-\partial_{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^{\alpha}_{,\mu}}\right)=-\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial\varphi^{\alpha}}+\partial_{\mu}\left(\frac{\partial(\lambda^{w}G_{w})}{\partial\varphi^{\alpha}_{,\mu}}\right)\tag{5-6-21}$$

式中：$\lambda^{w}=\lambda^{w}(x)$. 假设从正则共轭动量密度 $\pi_{\alpha}=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^{\alpha}}$ 的表达式可解出 $\dot{\varphi}^{\alpha}$ 代入式(5-6-20)，使其能用正则变量来表达，即含场量时间微商的附加约束可正则化，并记为 $G^{0}_{w}(\varphi^{\alpha},\pi_{\alpha})=0$(场的空间微商省写). 当式(5-6-20)关于 $\varphi^{\alpha}_{,\mu}$ 线性时，设由式(5-6-4)可解出的 $\dot{\varphi}^{\alpha}$ 表为正则变量的函数，并可使式(5-6-21)右端记为

$$\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial\varphi^{\alpha}}-\partial_{\mu}\left(\frac{\partial(\lambda^{w}G_{w})}{\partial\varphi^{\alpha}_{,\mu}}\right)\equiv E_{\alpha}(\varphi^{\alpha},\pi_{\alpha},\lambda^{w})\tag{5-6-22}$$

由式(5-6-21)，有

$$\dot{\pi}^{\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^{\alpha}}\right)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^{\alpha}}-\partial_{k}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^{\alpha}_{,k}}\right)+E_{\alpha}\tag{5-6-23}$$

对正则 Hamilton 量 H_{c} 的变分，得

$$\delta H_{\mathrm{c}}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\left[\dot{\varphi}^{\alpha}\delta\pi_{\alpha}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^{\alpha}}\delta\varphi^{\alpha}+\partial_{k}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^{\alpha}_{,k}}\right)\delta\varphi^{\alpha}\right]\tag{5-6-24}$$

式(5-6-23)与式(5-6-24)结合，有

$$\delta H_{\mathrm{c}}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x[\dot{\varphi}^{\alpha}\delta\pi_{\alpha}-\dot{\pi}^{\alpha}\delta\varphi^{\alpha}-E_{\alpha}\delta\varphi^{\alpha}]\tag{5-6-25}$$

另一方面，H_{c} 为 φ^{α} 和 π_{α} 的泛函，有

$$\delta H_{\mathrm{c}}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\left[\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi^{\alpha}}\delta\pi_{\alpha}+\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi^{\alpha}}\delta\varphi^{\alpha}\right]\tag{5-6-26}$$

比较式(5-6-25)和式(5-6-26)，得

$$\int_{V}\mathrm{d}^{3}x\left[\left(\dot{\varphi}^{\alpha}-\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\pi^{\alpha}}\right)\delta\pi_{\alpha}-\left(\dot{\pi}^{\alpha}+\frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta\varphi^{\alpha}}+E_{\alpha}\right)\delta\varphi^{\alpha}\right]=0\tag{5-6-27}$$

奇异 Lagrange 量系统在相空间还存在固有(内在)约束

$$\phi^{0}_{a}(\varphi^{\alpha},\pi_{\alpha})=0\quad(a=1,2,\cdots,n-R)\tag{5-6-28}$$

假设可正则化的附加约束式(5-6-20)和内在约束式(5-6-28)彼此相容，由式

(5-6-28)又有

$$\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a+\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\delta\pi_a\approx 0 \tag{5-6-29}$$

联合式(5-6-27)和式(5-6-29)，得

$$\dot{\varphi}^a=\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_a} \tag{5-6-30a}$$

$$\dot{\pi}_a=-\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\varphi^a}-E_a \tag{5-6-30b}$$

其中 $H_{\mathrm{T}}=\int_V \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_c+\mu^a\phi_a^0)$，式(5-6-30)又可写为

$$\dot{\varphi}^a=\{\varphi^a,\ H_{\mathrm{T}}\} \tag{5-6-31a}$$

$$\dot{\pi}_a=\{\pi_a,H_{\mathrm{T}}\}-E_a \tag{5-6-31b}$$

将可正则化的附加约束式(5-6-20)和初级固有约束式(5-6-28)作为系统的初级约束，并统一记为 $\Phi_{a'}^0=(G_w,\phi_a^0)$，初级约束的自洽性要求 $\Phi_{a'}^0=0$，可能导致次级约束，即

$$\Phi_{a'}^1=\{\Phi_{a'}^0,\ H_{\mathrm{T}}\}+\int\mathrm{d}^3xE_a\frac{\delta\Phi_{a'}^0}{\delta\pi_a}\approx 0 \tag{5-6-32a}$$

次级约束的自洽性要求，又可导致其他的次级约束，即

$$\Phi_{a'}^k=\{\Phi_{a'}^{k-1},\ H_{\mathrm{T}}\}+\int\mathrm{d}^3xE_a\frac{\delta\Phi_{a'}^{k-1}}{\delta\pi_a}\approx 0 \tag{5-6-32b}$$

这个过程直至

$$\Phi_{a'}^{m+1}=\{\Phi_{a'}^m,\ H_{\mathrm{T}}\}+\int\mathrm{d}^3xE_a\frac{\delta\Phi_{a'}^m}{\delta\pi_a}\approx C_{a'k}^b\Phi_b^k\quad(k\leqslant m) \tag{5-6-32c}$$

为止．这里假设所有约束 $\Phi_{a'}^k(k=0,1,\cdots,n;\ a'=a,\ w)$ 均彼此相容．这就是场论中可正则化的含场量时间微商的附加约束(附加约束关于 $\varphi_{,\mu}^a$ 线性)奇异 Lagrange 量系统求全部约束的修改的 Dirac-Bergmann 算法.

值得注意的是式(5-6-32)中含 E_a，而 E_a 中含乘子 $\lambda^w(x)$，因此在求次级约束的过程中，当出现确定乘子 $\lambda^w(x)$ 的方程时，就不能再产生次级约束．同时不含场量微商和含场量微商外在约束(可正则化)的奇异 Lagrange 量系统求全部约束的修改的 Dirac-Bergmann 算法：

附加约束记为

$$G_{w1}=G_{w1}(\varphi^a)=0 \tag{5-6-33}$$

$$G_{w2}=G_{w2}(\varphi^a,\varphi_{,\mu}^a)=0\quad(\text{可正则化}) \tag{5-6-34}$$

全部初级约束记为

$$\Phi_{a'}^{0} = \{\phi_{a}^{0}, G_{w1}, G_{w2}\} \tag{5-6-35}$$

依次导出次级约束，即

$$\Phi_{a'}^{k} = \{\Phi_{a'}^{k-1}, H'_{\mathrm{T}}\} + \int \mathrm{d}^3 x E_a \frac{\delta \Phi_{a'}^{k-1}}{\delta \pi_a} \approx 0$$

$$(k = 1, 2, \cdots) \tag{5-6-36}$$

这个过程直至

$$\Phi_{a'}^{m+1} = \{\Phi_{a'}^{m}, H'_{\mathrm{T}}\} + \int \mathrm{d}^3 x E_a \frac{\delta \Phi_{a'}^{m}}{\delta \pi_a} \approx C_{a'k}^{b} \Phi_{b}^{k} \quad (k \leqslant m) \tag{5-6-37}$$

其中 E_a 与 G_{w2} 有关，且

$$H'_{\mathrm{T}} = \int_V \mathrm{d}^3 x (\mathscr{H}_c + \mu^a \phi_a^0 + \lambda^{w1} G_{w1}) \tag{5-6-38}$$

对含附加(外在)约束的正规 Lagrange 量系统，因为系统不含内在约束，求该系统的全部约束，仍可用上述修改的 Dirac-Bergmann 算法，只需将其中的 $\mu^a(t)$ 取为零就行了.

5-6-2　正则 Noether 定理

下面讨论场论中含附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的动力学系统在相空间中的经典正则对称性质，取增广相空间中的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x, \varphi^a, \pi_a) \\
\varphi^{a\prime}(x') &= \varphi^a(x) + \Delta\varphi^a(x) = \\
&\quad \varphi^a(x) + \varepsilon_\sigma(x)\xi^{a\sigma}(x, \varphi^a, \pi_a) \\
\pi'_a(x') &= \pi_a(x) + \Delta\pi_a(x) = \\
&\quad \pi_a(x) + \varepsilon_\sigma(x)\eta_a^\sigma(x, \varphi^a, \pi_a)
\end{aligned}\right\} \tag{5-6-39}$$

式中 $\varepsilon_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, r)$ 为任意无穷小参数；$\tau^{\mu\sigma}$、$\xi^{a\sigma}$、η_a^σ 为 x、φ^a、π_a 的函数. 在式(5-6-39)的变换下，设正则 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c$ 改变一个 4 维散度项 $\delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \partial_\mu W^\mu = \varepsilon_\sigma \partial_\mu W^{\mu\sigma}(x, \varphi^a, \pi_a)$，重复指标代表求和. 假定内在约束条件式(5-6-11)在式(5-6-39)的总变分下为

$$\Delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^a}\Delta\varphi^a + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\Delta\pi_a = \varepsilon_\sigma K_a^\sigma \tag{5-6-40}$$

实质变分与总变分的关系可表示为

$$\delta\varphi^a = \Delta\varphi^a - \varphi^a_{,\mu}\Delta x^\mu, \quad \delta\pi_a = \Delta\pi_a - \pi_{a,\mu}\Delta x^\mu \tag{5-6-41}$$

实质变分 $\delta\varphi^a = \varphi^{a\prime}(x) - \varphi^a(x)$，变分 δ 与微分 ∂ 是可以交换的，所以有

$$\delta(\varphi^a_{,\mu}) = (\delta\varphi^a)_{,\mu} \tag{5-6-42}$$

关系式(5-6-42)对场变量的总变分 $\Delta\varphi^a$ 不成立. 由式(5-6-40)～式(5-6-42)可得

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\delta\pi_a = \varepsilon_\sigma F_a^\sigma \tag{5-6-43}$$

式中

$$F_a^\sigma = K_a^\sigma - \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^a}\varphi^a_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} - \frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\pi_{a,\mu}\tau^{\mu\sigma}$$

正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x(\pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c)$$

在式(5-6-39)变换下，有

$$\Delta I_{\mathrm{p}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^a}\delta\varphi^a + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_a}\delta\pi_a + \partial_\mu[(\pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c)\Delta x^\mu] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a\delta\varphi^a)\right\} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\,\partial_\mu W^\mu \tag{5-6-44}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi_a} = \dot{\varphi}^a - \frac{\delta H_c}{\delta\pi_a}, \quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^a} = -\dot{\pi}_a - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a}$$

对场含附加有限约束奇异系统，假设附加有限约束式(5-6-2)与内在约束相容，且附加有限约束在式(5-6-39)确定的实质变分下不变，即

$$\delta G_w = \frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a = 0 \tag{5-6-45}$$

用 Lagrange 乘子 $\lambda^w(t)$ 乘式(5-6-45)并求和、$\mu^a(t)$ 乘式(5-6-43)并求和，然后在 Ω 上积分，与式(5-6-44)结合，得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{d}^4 x\Big\{&\left(\dot{\varphi}^a - \frac{\delta H_c}{\delta\pi_a} - \mu^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\right)\delta\pi_a + \\ &\left(-\dot{\pi}_a - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a} - \mu^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^a} - \lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a}\right)\delta\varphi^a + \\ &\partial_\mu[(\pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c)\Delta x^\mu] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a\,\delta\varphi^a)\Big\} = \\ &\int_\Omega \mathrm{d}^4 x(\partial_\mu W^\mu + \mu^a(t)\varepsilon_\sigma F_a^\sigma)\end{aligned}$$

利用附加有限约束奇异系统的运动方程式(5-6-13)，沿着系统运动的轨线，得

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4 x\{\partial_\mu[(\pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c)\Delta x^\mu - W^\mu] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a\delta\varphi^a)\} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\,\mu^a(t)\varepsilon_\sigma F_a^\sigma \tag{5-6-46}$$

如果附加有限约束和内在约束均在式(5-6-39)所确定的实质变分下不变，即

它的变更分别满足式(5-6-45)和 $F_a^\sigma=0$，在四维时空取一柱体，柱轴沿时间 t 轴方向，上底 V_1 和下底 V_2 分别为 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的类空曲面，在此四维柱体上积分式(5-6-46)，假定场及场的动量在区域的边界处很快趋于零，那么利用 Gauss 定理，得[1]

$$\int_V \mathrm{d}^3 x[\pi_a(\xi^{a\sigma} - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_c\tau^{0\sigma} - W^{0\sigma}] = \text{const}$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, r) \tag{5-6-47}$$

这就得到场论中受附加有限约束(不含场量微商)并用奇异 Lagrange 量描述的系统正则形式的 Noether 定理：如果在式(5-6-39)的变换下，系统的正则 Lagrange 量密度改变一个四维散度项，且在变换式(5-6-39)确定的实质变分下，内在约束条件 ϕ_a^0 的变更为零，以及附加有限约束也在式(5-6-39)确定的实质变分适合式(5-6-45)，那么，该约束(含内在约束和附加有限约束)系统在相空间中存在式(5-6-47)所示的 r 个正则形式的守恒量.

对场论中含场量微商的附加约束奇异系统，如果关于 $\varphi_{,\mu}^a$ 线性的约束 $G_w(\varphi^a, \varphi_{,\mu}^a)=0$ 中 φ^a 能用正则变量替换，并与内在约束相容，考虑 $\phi_a^0(\varphi^a, \pi_a)=0$ 和 $G_w(\varphi^a, \varphi_{,\mu}^a)=0$ 在式(5-6-39)确定的实质变分下不变，且在式(5-6-39)的变换下，含场的微商的约束还适合式(5-5-6)和式(5-5-19)，作与上面类似的推导，同样可以研究该约束奇异系统在相空间中的守恒量.

5-6-3 PC 积分不变量

对场论中受附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的系统，其 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi^a, \varphi_{,\mu}^a)$，由于 Lagrange 量的奇异性，因此在相空间描述时存在固有约束式(5-6-11)，又设该系统还受外在有限约束式(5-6-2)的限制. 系统的正则作用量为

$$I^{\mathrm{P}} = \int_{t_2}^{t_1} L^{\mathrm{P}} \mathrm{d}t = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}^{\mathrm{P}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x(\pi_a\dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c) \tag{5-6-48}$$

式中：$\mathscr{H}_c$ 为系统的正则 Hamilton 量密度. 将相空间的正则变量 $\varphi^a(t,x_i)$，$\pi_a(t,x_i)$ 的空间坐标 x_i 看做固定参量，相空间的曲线可表示为 $\varphi^a=\varphi^a(t,\rho)$，$\pi_a=\pi_a(t,\rho)$，式中 ρ 为参数. 现在来考察因参数 ρ 的改变而生成的增广相空间的变换，讨论该系统在增广相空间中的变换性质。在增广相空间中取

$$\left.\begin{aligned} t &\to t' = t + \Delta t = t(\rho) \\ \varphi^a(t,x_i) &\to \varphi^{a\prime}(t',x_i) = \varphi^a(t,x_i) + \Delta\varphi^a(t,x_i,\rho) \\ \pi_a(t,x_i) &\to \pi'_a(t',x_i) = \pi_a(t,x_i) + \Delta\pi_a(t,x_i,\rho) \end{aligned}\right\} \tag{5-6-49}$$

变换，其中ρ适合

$$\varphi^a(t,x_i,0)=\varphi^a(t,x_i),\pi_a(t,x_i,0)=\pi_a(t,x_i) \tag{5-6-50}$$

在式(5-6-49)的变换下，对于小参数ρ，正则作用量I^p的变更

$$\Delta I^p=I^{p\prime}(\rho)\Delta\rho=\int_\Omega d^4x\left\{\left(-\dot{\pi}_a-\frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a}\right)\delta\varphi^a+\left(\dot{\varphi}_a-\frac{\delta H_c}{\delta\pi_a}\right)\delta\pi_a\right\}+$$

$$\int_\Omega d^4x\left\{\partial_0[(\pi_a\dot{\varphi}^a-\mathscr{H}_c)\Delta x^0]+\frac{d}{dt}(\pi_a\delta\varphi^a)\right\} \tag{5-6-51}$$

式中：$\delta\varphi^a$和$\delta\pi_a$为实质变分，它们与总变分$\Delta\varphi^a$和$\Delta\pi_a$的关系为

$$\delta\varphi^a=\Delta\varphi^a-\dot{\varphi}^a\Delta x^0,\quad \delta\pi_a=\Delta\pi_a-\dot{\pi}_a\Delta x^0 \tag{5-6-52}$$

式(5-6-51)又可化为

$$\Delta I^p=I^{p\prime}(\rho)\Delta(\rho)=\int_\Omega d^4x\left\{\left(-\dot{\pi}_a-\frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a}\right)\delta\varphi^a+\left(\dot{\varphi}^a-\frac{\delta H_c}{\delta\pi_a}\right)\delta\pi_a\right\}+$$

$$\int_V d^3x(\pi_a\Delta\varphi^a-\mathscr{H}_c\Delta t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{5-6-53}$$

由于描述该系统的 Lagrange 量奇异，该系统受有固有约束式(5-6-11)的限制，同时，该系统还受附加有限约束式(5-6-2)的限制，正则变量的变分不是任意的，假设在式(5-6-49)的变换下，内在约束条件$\phi_a^0=0$与附加有限约束$G_w=0$在式(5-6-49)确定的实质变分下不变，即内在约束条件满足式(5-6-12)，附加有限约束适合式(5-6-45)，引入 Lagrange 乘子$\lambda^w(x)$乘式(5-6-45)、$\mu^a(x)$乘式(5-6-12)，然后分别对w，a求和，并在区域Ω上积分，结合式(5-6-53)得

$$\Delta I^p=I^{p\prime}(\rho)\Delta(\rho)=$$

$$\int_\Omega d^4x\left\{\left(-\dot{\pi}_a-\frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a}-\mu^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\varphi^a}-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a}\right)\delta\varphi^a+\right.$$

$$\left.\left(\dot{\varphi}^a-\frac{\delta H_c}{\delta\pi_a}-\mu^a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_a}\right)\delta\pi_a\right\}+\int_V d^3x(\pi_a\Delta\varphi^a-\mathscr{H}_c\Delta t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{5-6-54}$$

沿着附加有限约束奇异系统运动的轨线，利用该系统的正则方程式(5-6-14)式可得

$$\Delta I^p=I^{p\prime}(\rho)\Delta\rho=\int_V d^3x(\pi_a\Delta\varphi^a-\mathscr{H}_c\Delta t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{5-6-55}$$

在变量t，φ^a和π_a所张成的增广相空间中，取一条适合所有约束条件(附加约束和内在约束)的闭曲线C_1，该曲线以ρ为参数来描述，由于存在固有约束式(5-6-11)和附加有限约束式(5-6-2)，闭曲线C_1实际上在由约束确定的子空间约束超曲面Γ_p上，并设闭曲线C_1的方程为

$$t=t^1(\rho),\quad \varphi_1^a=\varphi_1^a(t,\rho),\quad \pi_{a1}=\pi_{a1}(t,\rho) \tag{5-6-56}$$

式中：$\rho=0$ 和 $\rho=l$ 代表曲线 C_1 上的同一点，过 C_1 上任一点存在一条系统的运动轨线，该轨线适合系统的正则方程式(5-6-14)．过 C_1 上每一点的运动轨线构成动力学轨线管，即

$$\varphi^a = \varphi^a(t,\rho), \quad \pi_a = \pi_a(t,\rho) \tag{5-6-57}$$

式中：$\varphi^a(t,0)=\varphi^a(t,l)$，$\pi_a(t,0)=\pi_a(t,l)$．在动力学轨线管上任取另一条闭曲线 C_2，让它包围轨线管并与轨线管母线仅相交一次．设闭曲线 C_2 的方程为

$$t^2 = t^2(\rho), \quad \varphi_2^a = \varphi_2^a(t,\rho), \quad \pi_{a2} = \pi_{a2}(t,\rho) \tag{5-6-58}$$

将(5-6-55)式分别沿闭曲线 C_1 和 C_2 积分，可得

$$\oint_{C_k}\int_V \mathrm{d}^3x(\pi_a\Delta\varphi^a - \mathscr{H}_c\Delta t) = \mathrm{inv} \quad (k=1,2) \tag{5-6-59}$$

在增广相空间中，由约束条件(内在初级约束条件和附加有限约束条件)决定的约束超曲面中的任一条闭曲线 C，当 C 沿约束系统的轨线管移动和变形时，沿 C 的积分式(5-6-59)为一不变量，用 J 表示这一积分，J 称为场论中受附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的系统的 PC 积分。它表明，在增广相空间中的所有约束(附加约束和内在初级约束)所确定的超曲面 Γ_{P} 上，取一条闭曲线 C，如果附加有限约束 $G_w=0$ 在式(5-6-49)确定的实质变分下不变，即适合式(5-6-45)，又内在约束条件 $\phi_a^0=0$ 在式(5-6-49)确定的实质变分下不变，即满足式(5-6-12)，那么沿着附加有限约束奇异系统运动的轨线，在约束超曲面中的任一条闭曲线 C 的 PC 积分为不变量．这就是受附加有限约束场的并用奇异 Lagrange 量描述的动力学系统的 PC 积分不变量。

对含场量微商的附加约束奇异系统，如果关于 $\varphi^a_{,\mu}$ 线性的附加约束 $G_w(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu})=0$ 中的 $\dot\varphi^a$ 能用正则变量代替，且与内在约束相容，$\phi_a^0(\varphi^a,\pi_a)=0$ 和 $G_w(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu})=0$ 在式(5-6-49)确定的实质变分下不变，且在式(5-6-49)的变换下，含场量微商的约束还适合式(5-5-19)，作与上面类似的推导，同样可讨论场论中含场量微商的附加约束并用奇异 Lagrange 量描述的场系统的 PC 积分不变量．至此，导出了不含场量时间微商受外在约束的并用奇异 Lagrange 量描述的场的 PC 积分不变量．下面说明该不变量与该系统的正则方程等价。

将场(连续)系统离散化，即将该系统所在空间分成许多小格子，记第 k 个小格子的体积元为 $\Delta V(k)$，体积元 $\Delta V(k)$ 中 $\varphi^a(x)$ 的平均值记为 $\varphi_k^a(t)$，$\pi_a(x)$ 的平均值记为 $\pi_a^k(t)$，$\varphi_k^a(t)$ 的正则共轭动量为 $P_a^k(t)=\pi_a^k\Delta V(k)$（对 k 不求和)．经离散化后，PC 积分化为

$$J = \oint_C (P_a^k\Delta\varphi_k^a - H_c\Delta t) \tag{5-6-60}$$

当 $\Delta V(k) \to 0$ 时，式(5-6-60)就回到连续极限，即场的 PC 积分.

设连续系统所受的内在约束为式(5-6-11)，附加有限约束为式(5-6-2)，且同样假设附加有限约束 $G_w=0$ 和内在约束 $\phi_a^0=0$ 是相容的. 附加有限约束奇异系统的动力学轨线为一组微分方程，即

$$\dot{\varphi}^a = E^a(t,\varphi^a,\pi_a,\lambda^s),\ \dot{\pi}_a = F_a(t,\varphi^a,\ \pi_a,\lambda^s) \tag{5-6-61}$$

式中：λ^s 为任意函数. 式(5-6-61)为该约束奇异系统的正则方程是该系统的 PC 积分为不变量. 式(5-6-61)离散化后的动力学轨线微分方程为

$$\dot{\varphi}_k^a = E_k^a(t,\varphi_k^a,p_a^k,\lambda_k^s)\ ,\ \dot{P}_a^k = F_k^a(t,\varphi_k^a,p_a^k,\lambda_k^s) \tag{5-6-62}$$

引入辅助参量 μ，有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_k^1}{f^1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}\varphi_k^n}{f^n} = \frac{\mathrm{d}P_1^k}{g_1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}P_n^k}{g_n} = \mathrm{d}t = \Pi\mathrm{d}\mu \tag{5-6-63}$$

Π 是增广相空间中的任意函数，由式(5-6-63)得

$$\varphi_k^a = \varphi_k^a(\mu;\ t_0,\ \varphi_{k0}^a,\ P_{a0}^k) \tag{5-6-64a}$$

$$P_a^k = P_a^k(\mu;t_0,\varphi_{k0}^a,P_{a0}^k) \tag{5-6-64b}$$

$$t = t(\mu;t_0,\varphi_{k0}^a,P_{a0}^k) \tag{5-6-64c}$$

这里 t_0，φ_{k0}^a，P_{a0}^k是初始条件，它们对应于 $\mu=0$。为了获得动力学轨线式(5-6-64a)～式(5-6-64c)所确定的轨线管，选择初始点在闭曲线上，该曲线位于 Γ_p中，轨线管的动力学轨线参数方程为

$$\varphi_k^a = \varphi_k^a(\mu,\rho),P_a^k = P_a^k(\mu,\rho),\ t = t(\mu,\rho) \quad (0\leqslant\rho\leqslant l) \tag{5-6-65}$$

对于一个给定的 ρ 值它相应于一确定的轨线管母线，而参数 μ 值决定了这条母线上的一个定点. 令 $\mu=\mathrm{const}$，式(5-6-65)确定了轨线管上的一条闭曲线 C. 当 PC 积分中的 t，φ_k^a，P_a^k 用式(5-6-65)代入后，沿闭曲线 C 积分可得 J 为参数 μ 的函数，即 $J=J(\mu)$. 根据 PC 积分 J 的不变性，得

$$\mathrm{d}J = 0 \tag{5-6-66}$$

从而有

$$\mathrm{d}J = \oint_C[\mathrm{d}P_a^k\Delta\varphi_k^a + P_a^k\mathrm{d}\Delta\varphi_k^a - \mathrm{d}H_c\Delta t - H_c\mathrm{d}\Delta t] = 0 \tag{5-6-67}$$

式中：d 表示对参数 μ 的微分，Δ 表示对 ρ 的微分，逐项除以 $\mathrm{d}\mu=\frac{\mathrm{d}t}{\Pi}$，并由式(5-6-62)可得

$$\oint_C\Big[\Big(F_k^a+\frac{\partial H_c}{\partial\varphi_k^a}\Big)\Delta\varphi_k^a+\Big(-E_k^a+\frac{\partial H_c}{\partial P_a^k}\Big)\Delta P_a^k+ \Big(-\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H_c}{\partial t}\Big)\Delta t\Big]\Pi\mathrm{d}\mu = 0 \tag{5-6-68}$$

进一步考虑系统的约束(附加有限约束、内在初级约束)，它们分别适合式

(5-6-12)和式(5-6-45)，结合式(5-6-68)导出离散系统的广义正则方程，即

$$\dot{\varphi}_k^a \approx E_k^a \approx \frac{\partial H_c}{\partial P_a^k} + \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial P_a^k} \tag{5-6-69a}$$

$$\dot{P}_a^k \approx F_a^k \approx -\frac{\partial H_c}{\partial \varphi_k^a} - \mu^a \frac{\partial \phi_a^0}{\partial \phi_k^a} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial \phi_k^a} \tag{5-6-69b}$$

这就证明了场论中受附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的离散系统的 PC 积分不变量和该系统的正则方程等价.

当 $\Delta V(k) \to 0$ 时，式(5-6-69a)和式(5-6-69b)就分别过渡到连续极限式(5-6-14a)和式(5-6-14b)，即场论中的附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的系统的广义正则方程式. 可见，对受有限约束场的并用奇异 Lagrange 量描述的系统，如果相空间有一组运动微分方程，且沿该方程组所确定的动力学“轨线管”上闭曲线 C 的积分为 PC 积分不变量时，该运动微分方程必为场论中的受附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的系统的正则方程. 由此可见，场论中的受附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的动力学系统的 PC 积分不变量和该系统的正则方程等价. 对场论中的受含场量微商约束并用奇异 Lagrange 量描述的动力学系统，只要所有约束相容且含场量微商的约束适合某些条件，如式(5-5-6)和式(5-5-19)，类似地可以讨论该系统的 PC 积分不变量.

5-7 电磁波在介质分界面附近的性质

电磁波在介质界面上反射和折射时电磁波的能量中心不在入射面内而发生垂直于入射面方向的横向移动，关于电磁波的横向移动效应已有不少研究[28-29]，且对这一横向移动效应的存在，已给出了经典理论的解释[23-25]. 下面用 5-5-2 小节中得到的含场量微商的附加约束奇异系统在位形空间经典水平的变换性质，说明 Poincaré 群变换下电磁波在介质界面上反射和折射时的经典水平的变换性质，进而解释电磁波在介质界面上反射和折射时垂直于入射面方向的经典水平的“横移”效应.

5-7-1 电磁波在介质分界面附近的变换性质

考虑电磁波在电介质分界面上的反射和折射，设一电磁波波色从介质 1 入射到分界面上，一部分反射回介质 1，另一部分折射进入介质 2. 电磁波入射到介质界面上时应满足的边界条件为

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0, \quad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = 0 \tag{5-7-1}$$

其中$\boldsymbol{n}$代表介质分界面上的法向单位矢．引入电磁场的四维势

$$A^{\mu} = (A^{0}, \boldsymbol{A}) = (\varphi, \boldsymbol{A})$$

φ为标势，$\boldsymbol{A}$为矢势，则由

$$\boldsymbol{E} = \nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\ \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \quad (\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H})$$

电磁场在介质分界面上的边界条件用四维势A^{μ}来表示，并且可视为一种外在约束条件，利用A^{μ}可将电磁场在介质分界面上的边界条件写为[23]$G_w = G_w(\partial_{\mu}A^{\alpha})$，引入 Lagrange 乘子，则有

$$\mathscr{L}^{*} = \mathscr{L} + \lambda^{w}G_{w} = -\frac{1}{4}F_{\mu\alpha}F^{\mu\alpha} + \lambda^{w}G_{w} \quad (w = 0,1,2,3) \quad (5\text{-}7\text{-}2)$$

其中$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\alpha}F^{\mu\alpha}$为自由电磁场的 Lagrange 量密度，$F_{\mu\alpha} = \partial_{\mu}A_{\alpha} - \partial_{\alpha}A_{\mu}$. 离开边界面的地方 Lagrange 乘子$\lambda^{w} = 0$. 电磁场在介质分界面薄层处的作用量为

$$I^{*} = \int \mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L} + \lambda^{w}G_{w}) \quad (w = 0,1,2,3) \quad (5\text{-}7\text{-}3)$$

其经典运动的电磁场的 EL 方程可由$\delta I^{*} = 0$给出．考虑电磁场在位形空间的 Poincaré 群无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma}\tau^{\mu\sigma}(x, A_{\nu}, A_{,\nu}) \\ A'_{\mu}(x') &= A_{\mu}(x) + \Delta A_{\mu}(x) = \\ &\quad A_{\mu}(x) + \varepsilon_{\sigma}\xi^{\sigma}_{\mu}(x, A_{\nu}, A_{,\nu}) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}7\text{-}4)$$

实质变分与总变分的关系为

$$\delta A_{\mu}(x) = \Delta A_{\mu}(x) - A_{\mu,\nu}(x)\delta x^{\nu} = \varepsilon_{\sigma}[\xi^{\sigma}_{\mu}(x) - A_{\mu,\nu}\tau^{\nu\sigma}] \quad (5\text{-}7\text{-}5)$$

在式(5-7-4)的变换下，由式(5-5-18)得[23-24]

$$\partial_{\nu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}\delta A^{\mu} + \mathscr{L}\Delta x^{\nu}\right] = -\partial_{\nu}\left(\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}\right)\delta A^{\mu} \quad (5\text{-}7\text{-}6)$$

亦即

$$\partial_{\nu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}(\xi^{\mu\sigma} - A^{\mu}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) + \mathscr{L}\tau^{\nu\sigma}\right] = -\partial_{\nu}(\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}})(\xi^{\mu\sigma} - A^{\mu}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) \quad (5\text{-}7\text{-}7)$$

式(5-7-7)即为电磁场在介质界面附近反射和折射时变换性质的一个经典结果.

5-7-2 电磁波的经典“横移效应”

下面用式(5-7-6)和式(5-7-7)讨论 Poincaré 群变换下电磁波在介质界面附近的经典水平的变换性质，并说明电磁波在介质界面附近反射和折射时垂直于入射面方向的“横移效应”.

1. 时空平移变换

由式(5-7-6)可得[1]

$$\partial^0\int T_{\mu0}\mathrm{d}V=\delta_\mu^3\int\limits_{x_3=0}(\mathscr{L}^{(1)}+\mathscr{L}^{(2)})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-\Delta_\mu^{(1)}-\Delta_\mu^{(2)}\qquad(5\text{-}7\text{-}8)$$

其中

$$\Delta_\mu^{(j)}=\int\limits_{V(j)}\left[\partial_0\left(\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial A^a_{(j),0}}A^a_{(j),\mu}\right)-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial A^a_{(j),\nu}}A^a_{(j),\mu\nu}\right]\mathrm{d}V\qquad(5\text{-}7\text{-}9)$$

这里将全3维空间按分界面分为2个区域$V_j(j=1,2)$，$A^a_{(j)}$等代表$A^a(x)$在区域V_j中的取值，因为$\int T_{\mu0}\,\mathrm{d}V=(H,\boldsymbol{P})$是电磁场的四动量，式(5-7-8)表明，当分界面无穷薄$\Delta_\mu^{(j)}\to0$时，分量P_1，P_2和H能量是守恒的.

2. 洛仑兹变换

利用式(5-7-6)，可以得到

$$\begin{aligned}\partial^0\int J_{\rho\mu0}\,\mathrm{d}V=&\int\limits_{x_3=0}(x_\rho\delta_{\mu3}-x_\mu\delta_{\rho3})\mathscr{L}^{(1)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-\\&\int\limits_{x_3=0}(x_\rho\delta_{\mu3}-x_\mu\delta_{\rho3})\mathscr{L}^{(2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-\Delta_{\rho\mu}^{(1)}-\Delta_{\rho\mu}^{(2)}\end{aligned}\qquad(5\text{-}7\text{-}10)$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta_{\kappa\mu}^{(j)}=\int\limits_{V(j)}\Big\{&\partial_0\Big[\Big(\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial A^a_{(j),0}}\Big)(\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\kappa\mu}A^\beta_{(j)}+x_\kappa A^a_{(j),\mu}-x_\mu A^a_{(j),\kappa})\Big]+\\&\Big(-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial A^a_{(j),\nu}}\Big)\partial_\nu(\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\kappa\mu}A^\beta_{(j)}+x_\kappa A^a_{(j),\mu}-x_\mu A^a_{(j),\kappa})\Big\}\mathrm{d}V\end{aligned}\qquad(5\text{-}7\text{-}11)$$

$$M_1=\int J_{230}\mathrm{d}V,\quad M_2=\int J_{310}\mathrm{d}V,\quad M_3=\int J_{120}\mathrm{d}V$$

M_1，M_2，M_3是电磁波总角动量的分量，当分界面无限薄时，M_3是守恒的.由式(5-7-10)，进一步可求得电磁波的能量中心的运动方程[23-24]，即

$$\begin{aligned}H\frac{\mathrm{d}x_{ci}}{\mathrm{d}t}-(\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)})x_{ci}=&P_i-(\Delta_i^{(1)}+\Delta_i^{(2)})x_0+\\&\int(A^i_{,00}A^0-A^0_{,00}A^i)\mathrm{d}V-(\Delta_{i0}^{(1)}+\Delta_{i0}^{(2)})\end{aligned}\qquad(5\text{-}7\text{-}12)$$

这表明当$\Delta_0^{(j)}$和$\Delta_{i0}^{(j)}$存在时，反射波和折射波的能量中心将发生横向移动.

5-8 场论中含附加约束的高阶微商奇异系统

描述系统运动的Lagrange量密度$\mathscr{L}$含场函数的高阶微商的情形在现代场论中受到人们关注，高阶微商场论与引力理论、规范场论等领域直接相

关. 因此，场论中高阶微商系统愈来愈受到人们重视[30]. 本节讨论场论中受附加约束(含场量的高阶微商)并用奇异 Lagrange 量描述的高阶微商系统(称之为附加约束高阶微商奇异系统)，仅讨论附加约束和 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}$ 含场量的 2 阶微商的情形，并讨论该系统的正则对称性.

5-8-1　2 阶微商系统位形空间经典水平的变换性质

考虑场论中的附加约束含 2 阶微商系统，描述该系统的 Lagrange 量含场量 $\varphi^a(x)$ 的 2 阶微商，记场的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu},\varphi^a_{,\mu\nu})$，且 $\mathscr{L}$ 不显含时空坐标，场的 Lagrange 量为 $\varphi^a,\varphi^a_{(1)}$ 和 $\varphi^a_{(2)}$ 的泛函，即

$$L(\varphi^a_{(0)},\varphi^a_{(1)},\varphi^a_{(2)})=\int_V \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu},\varphi^a_{,\mu\nu}) \tag{5-8-1}$$

式中

$$\varphi^a_{(0)}=\varphi^a,\varphi^a_{(1)}=\dot{\varphi}^a,\ \varphi^a_{(2)}=\ddot{\varphi}^a.$$

如果系统的运动受含场量的 2 阶微商的附加约束的限制，其约束条件设为

$$G_w(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu},\varphi^a_{,\mu\nu})=0\quad (w=1,2,\cdots,l_1) \tag{5-8-2}$$

如系统的运动受附加有限约束的限制，其约束条件设为

$$G_w(\varphi^a)=0\quad (w=1,2,\cdots,l_2) \tag{5-8-3}$$

在附加约束条件下，系统作用量取极值(广义变分原理)，仿 5-5-1 中类似的讨论可得其位形空间运动的 EL 方程，即

$$\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^a}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\varphi^a_{,\mu}}\right)+\partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\varphi^a_{,\mu\nu}}\right)=0 \tag{5-8-4}$$

式中：$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}+\lambda^w G_w$. 取位形空间的无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi^a_{(s)})\\ \varphi'^a_{(s)}(x')&=\varphi^a_{(s)}(x)+\Delta\varphi^a_{(s)}(x)=\\ &\quad\varphi^a_{(s)}(x)+\varepsilon_\sigma(x)\xi^{a\sigma}_{(s)}(x,\varphi^a_{(s)})\\ &\quad(s=0,1)\end{aligned}\right\} \tag{5-8-5}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$为任意无穷小参数；$\tau^{\mu\sigma}$，$\xi^{a\sigma}_{(s)}$分别为 x，$\varphi^a_{(s)}$ 的函数. 场的总变分 $\Delta\varphi^a_{(s)}$ 与实质变分 $\delta\varphi^a_{(s)}$ 的关系可表示为

$$\delta\varphi^a_{(s)}=\Delta\varphi^a_{(s)}-\varphi^a_{(s),\mu}\Delta x^\mu \tag{5-8-6}$$

在式(5-8-5)的变换下，设系统的作用量

$$I=\int_\Omega \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(\varphi^a,\ \varphi^a_{,\mu},\varphi^a_{,\mu\nu})$$

的改变为

$$\Delta I=\int_\Omega \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a_{,\mu}}\right)+\partial_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^a_{,\mu\nu}}\right)\right]\delta\varphi^a+\right.$$

$$\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\delta\varphi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}+\mathscr{L}(x)\Delta x^\mu\right]\Big\}=$$

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu W^\mu \tag{5-8-7}$$

设含场量二阶微商的附加约束 $G_w(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu},\varphi^\alpha_{,\mu\nu})=0$ 在式(5-8-5)确定的实质变分下的改变为

$$\delta G_w=\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha}\delta\varphi^\alpha+\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}\delta\varphi^\alpha_{,\mu}+\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\mu\nu}=K_w$$

$$(w=1,2,\cdots,l_1) \tag{5-8-8}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda^w(x)$，用 $\lambda^w(x)$ 乘式(5-8-8)并对指标 w 求和，再在 Ω 上积分，得

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha}-\partial_\mu\left(\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}\right)+\partial_{\mu\nu}\left(\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\right]\delta\varphi^\alpha+\right.$$

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}\delta\varphi^\alpha\right]+\partial_\mu\left[\partial_\nu\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}\right]-$$

$$\left.\partial_\mu\left[\partial_\nu\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha\right]\right\}=\int_\Omega \mathrm{d}^4x\lambda^wK_w \tag{5-8-9}$$

式(5-8-7)结合式(5-8-9)，利用系统在位形空间运动的 EL 方程式(5-8-4)得

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\left\{\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\delta\varphi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}+\mathscr{L}(x)\Delta x^\mu-W^\mu\right]\right\}=$$

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\left\{\lambda^wK_w-\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\delta\varphi^\alpha\right]-\right.$$

$$\left.\partial_\mu\left[\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}\right]\right\} \tag{5-8-10}$$

由于积分区域是任意的，由式(5-8-10)得

$$\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\delta\varphi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}+\mathscr{L}(x)\Delta x^\mu-W^\mu\right]=$$

$$\lambda^wK_w-\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\delta\varphi^\alpha\right]-$$

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial(\lambda^wG_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}\right] \tag{5-8-11}$$

式(5-8-11)给出了一般情况下，含场量 2 阶微商的附加约束系统位形空间经典水平的变换性质. 当 $K_w=0$，即在式(5-8-5)的变换下，Lagrange 量密度仅改变一个四维散度项，该系统含场量二阶微商的附加约束式(5-8-2)的实质变分不变，由式(5-8-11)可得

$$
\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\delta\varphi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}+\mathscr{L}(x)\Delta x^\mu-W^\mu\right]=
$$

$$
-\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\delta\varphi^\alpha\right]-
$$

$$
\partial_\mu\left[\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}\right] \tag{5-8-12}
$$

式(5-8-12)给出了较特殊情况下该系统位形空间经典水平的变换性质. 可见，在式(5-8-5)的变换下，Lagrange 量改变一个四维散度项，该系统含场量的高阶微商附加约束的实质变分不变，从式(5-8-12)还得不到通常无附加约束情况下的守恒律，如果在式(5-8-5)的变换下，含微商的附加约束还满足

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}\delta\varphi^\alpha=0,\quad \frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha=0\\
\partial_\nu\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha=0,\quad \frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\delta\varphi^\alpha_{,\nu}=0
\end{aligned}\right\} \tag{5-8-13}
$$

于是得到含场量二阶微商的约束奇异系统存在 r 个微分形式的守恒律，即

$$
\partial_\mu J^{\mu\sigma}=0 \tag{5-8-14a}
$$

其中

$$
J^{\mu\sigma}=\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\right)\right](\xi^{\alpha\sigma}-\varphi^\alpha_{,\lambda}\tau^{\lambda\sigma})+
$$

$$
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu\nu}}\partial_\nu(\xi^{\alpha\sigma}-\varphi^\alpha_{,\lambda}\tau^{\lambda\sigma})+\mathscr{L}(x)\tau^{\mu\sigma}-W^{\mu\sigma} \tag{5-8-14b}
$$

$$
(\sigma=1,2,\cdots,r)
$$

$J^{\mu\sigma}$ 为守恒流，其中 $W^\mu=\varepsilon_\sigma W^{\mu\sigma}$. 对附加有限约束 2 阶微商系统可作类似的推导，不同的是只要有限约束 $G_w(\varphi^\alpha)=0$ 在式(5-8-5)确定的实质变分不变，即 $\delta G_w=\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\alpha}\delta\varphi^\alpha=0$，作用量的改变仍适合式(5-8-7)，这样就可以得到附加有限约束奇异系统存在 r 个微分形式的守恒律式(5-8-14a)和式(5-8-14b).

5-8-2　2 阶微商奇异系统的正则方程

考虑场论中受附加约束的并用奇异 Lagrange 量(含场量 $\varphi^\alpha(x)$的 2 阶微商)描述的系统，Lagrange 量用式(5-8-1)表示；如果附加约束为有限约束则用式(5-8-3)表示. 对附加约束为含场量微商的约束，则用式(5-8-2)表示，对这 2 种情形的附加约束(有限约束、含微商的约束)奇异系统，其位形空间运动的 EL 方程由式(5-8-4)给出，在相空间求正则运动方程时，应假设附加约束系统与奇异 Lagrange 量系统相空间的内在约束自洽，对含场量微商的

约束奇异系统，还要求 $G_w(\varphi^a, \varphi^a_{,\mu}, \varphi^a_{,\mu\nu})=0$ 中的 $\ddot{\varphi}^a$ 由正则动量的定义式能够用正则变量替换使其化为正则约束．这里先讨论附加有限约束奇异系统的正则方程．从位形空间过渡到相空间，用 Ostrogradsky 变换引入场的正则共轭动量为

$$\pi_a^{(1)} = \frac{\delta L}{\delta \varphi^a_{(2)}} \tag{5-8-15a}$$

$$\pi_a^{(0)} = \frac{\delta L}{\delta \varphi^a_{(1)}} - \dot{\pi}_a^{(1)} \tag{5-8-15b}$$

系统的正则 Hamilton 密度为

$$\mathscr{H}_c = \sum_{s=0}^{1} \varphi^a_{(s+1)} \pi_a^{(s)} - \mathscr{L}$$

正则 Hamilton 量为

$$H_c[\varphi^a_{(s)}, \pi_a^{(s)}] = \int_V \mathrm{d}^3 x \mathscr{H}_c = \int_V \mathrm{d}^3 x (\varphi^a_{(s+1)} \pi_a^{(s)} - \mathscr{L})$$

$$(s = 0,1;\ \alpha = 1,\ 2,\cdots,n) \tag{5-8-16}$$

对奇异 Lagrange 量系统，当广义 Hess 矩阵退化时，即

$$\det|H_{\alpha\beta}| = \det\left|\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \varphi^a_{(2)}\, \partial \varphi^\beta_{(2)}}\right| = 0$$

由式(5-8-15a)不能解出所有 $\ddot{\varphi}^a$ 作为正则变量 $\varphi^a_{(s)}$ 和 $\pi_a^{(s)}(s=0,1)$ 的函数，如果广义 Hess 矩阵的秩为 R，则表明该系统在相空间存在 $n-R$ 个初级固有(内在)约束．设决定系统运动方程的初级内在约束为

$$\phi^0_a(\varphi^a_{(s)}, \pi^s_a) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,n-R;\ s = 0,1) \tag{5-8-17}$$

这里假设附加约束 $G_w(\varphi^a) = 0(w = 1,2,\cdots,l_2)$ 与内在约束 $\phi^0_a = 0(a = 1,2,\cdots,n-R)$ 是相容的．在正则变量 $\varphi^a_{(s)}$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 的任意变分下，正则 Hamilton 量的变分为

$$\delta H_c[\varphi^a_{(s)}, \pi_a^{(s)}] = \int_V \mathrm{d}^3 x\Big[\varphi^a_{(s+1)} \delta\pi_a^{(s)} + \delta\varphi^a_{(s+1)} \pi_a^{(s)} - \sum_{s=0}^{2} \frac{\delta L}{\delta \varphi^a_{(s)}} \delta\varphi^a_{(s)}\Big] \tag{5-8-18}$$

由附加有限约束位形空间运动的 EL 方程，式(5-8-18)可化为

$$\delta H_c[\varphi^a_{(s)}, \pi_a^{(s)}] = \int_V \mathrm{d}^3 x \sum_{s=0}^{1}\Big[\dot{\varphi}^a_{(s)} \delta\pi_a^{(s)} + \Big(-\dot{\pi}_a^{(s)} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial \varphi^a_{(s)}}\Big)\delta\varphi^a_{(s)}\Big] \tag{5-8-19}$$

对附加有限约束，有 $\dfrac{\partial G_w}{\partial \varphi^a_{(1)}} = 0$ 和 $\dfrac{\partial G_w}{\partial \varphi^a_{(2)}} = 0$；另一方面，$H_c$ 为 $\varphi^a_{(s)}$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 的泛

函，则有

$$\delta H_c = \int_V \mathrm{d}^3 x \sum_{s=0}^{1} \left[\frac{\delta H_c}{\delta \pi_a^{(s)}} \delta \pi_a^{(s)} - \frac{\delta H_c}{\delta \varphi_{(s)}^a} \delta \varphi_{(s)}^a \right] \tag{5-8-20}$$

故

$$\int_V \mathrm{d}^3 x \sum_{s=0}^{1} \left[\left(\dot{\varphi}_{(s)}^a - \frac{\delta H_c}{\delta \pi_a^{(s)}} \right) \delta \pi_a^{(s)} - \left(-\dot{\pi}_a^{(s)} + \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial \varphi_{(s)}^a} - \frac{\delta H_c}{\delta \varphi_{(s)}^a} \right) \delta \varphi_{(s)}^a \right] = 0 \tag{5-8-21}$$

对正规 Lagrange 量系统，由式(5-8-21)可得该系统的正则方程. 对附加约束奇异 Lagrange 量系统，$\varphi_{(s)}^a$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 彼此间还要受到内在约束条件式(5-8-17)的限制，正则变量的变分应适合

$$\frac{\partial \phi_a^0}{\partial \varphi_{(s)}^a} \delta \varphi_{(s)}^a + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial \pi_a^{(s)}} \delta \pi_a^{(s)} = 0 \tag{5-8-22}$$

引入 Lagrange 乘子 $\mu^a(x)$，并用 μ^a 乘式(5-8-22)积分，结合式(5-8-21)得

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4 x \left\{ \left[\dot{\varphi}_{(s)}^a - \frac{\delta H_c}{\delta \pi_a^{(s)}} - \mu^a \frac{\partial \phi_a}{\partial \pi_a^{(s)}} \right] \delta \pi_a^{(s)} + \left[-\dot{\pi}_a^{(s)} - \frac{\delta H_c}{\delta \varphi_{(s)}^a} - \mu^a \frac{\partial \phi_a}{\partial \varphi_{(s)}^a} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial \varphi_{(s)}^a} \right] \delta \varphi_{(s)}^a \right\} = 0 \tag{5-8-23}$$

根据 Lagrange 乘子法则，由式(5-8-23)得

$$\dot{\varphi}_{(s)}^a = \frac{\delta H_c}{\delta \pi_a^{(s)}} + \mu^a \frac{\partial \phi_a}{\partial \pi_a^{(s)}} \quad (s = 0, 1) \tag{5-8-24a}$$

$$\dot{\pi}_a^{(s)} = -\frac{\delta H_c}{\delta \varphi_{(s)}^a} - \mu^a \frac{\partial \phi_a}{\partial \varphi_{(s)}^a} - \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial \varphi^a} \quad (s = 0, 1) \tag{5-8-24b}$$

式(5-8-24)为场论中附加有限约束 2 阶微商奇异系统的广义正则方程. 上述讨论同样适用于外在约束含场量一阶微商的约束奇异系统，对外在约束含场量 2 阶微商的约束奇异系统，只要 $G_w(\varphi^a, \varphi_{,\mu}^a, \varphi_{,\mu\nu}^a) = 0$ 中的 $\ddot{\varphi}^a$ 能够用正则变量替换，且 2 阶微商附加约束与内在约束相容，即可正则化附加约束 2 阶微商系统，仿 5-6 节中的讨论，可求得该系统的广义正则方程.

5-8-3 2 阶微商奇异系统的正则 Noether 定理

对一个受附加约束的场的 2 阶微商奇异系统，在增广相空间中作无穷小变换，讨论该系统在相空间中的经典正则对称性质，取增广相空间中的无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x,\varphi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a) \\ \varphi'^a_{(s)}(x') &= \varphi^a_{(s)}(x) + \Delta\varphi^a_{(s)}(x) = \\ &\quad \varphi^a_{(s)} + \varepsilon_\sigma(x)\xi^{a\sigma}_{(s)}(x,\varphi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a) \\ \pi'^{(s)}_a(x') &= \pi^{(s)}_a(x) + \Delta\pi^{(s)}_a(x) = \\ &\quad \pi^{(s)}_a + \varepsilon_\sigma(x)\eta^{(s)\sigma}_a(x,\varphi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a) \\ &\quad (s=0,1) \end{aligned}\right\} \tag{5-8-25}$$

式中：$\varepsilon_\sigma(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$为任意无穷小参数，$\tau^{\mu\sigma}$，$\xi^{a\sigma}_{(s)}$，$\eta^{(s)\sigma}_a$ 为 x，$\varphi^a_{(s)}$和 $\pi^{(s)}_a$ 的函数. 在(5-8-25)式的变换下，设广义正则 Lagrange 量密度

$$\delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \pi^{(s)}_a\varphi^a_{(s+1)} - \mathscr{H}_c$$

改变一个四维散度项

$$\delta\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \partial_\mu W^\mu = \varepsilon_\sigma\,\partial_\mu W^{\mu\sigma}(x,\varphi^a_{(s)},\pi^{(s)}_a)$$

考虑系统的正则作用量

$$I^{\mathrm{p}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4x(\pi^{(s)}_a\dot{\varphi}^{(s)}_a - \mathscr{H}_c) \tag{5-8-26}$$

在式(5-8-25)变换下有

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^a_{(s)}}\delta\varphi^a_{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_a}\delta\pi^{(s)}_a + \partial_\mu[(\pi^{(s)}_a\varphi^a_{(s)} - \mathscr{H}_c)\Delta x^\mu] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_a\delta\varphi^a_{(s)})\right\} = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu W^\mu \tag{5-8-27}$$

式中

$$\delta\varphi^a_{(s)} = \Delta\varphi^a_{(s)} - \varphi^a_{(s),\mu}\Delta x^\mu,\quad \delta\pi^{(s)}_a = \Delta\pi^{(s)}_a - \pi^{(s)}_{a,\mu}\Delta x^\mu$$

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_a} = \dot{\varphi}^a_{(s)} - \frac{\delta H_c}{\delta\pi^{(s)}_a},\quad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^a_{(s)}} = -\dot{\pi}^{(s)}_a - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a_{(s)}}$$

假设内在约束条件式(5-8-17)在式(5-8-25)确定的实质变分下不变，即正则变量的变分应适合式(5-8-22)，该系统的附加有限约束条件式(5-8-3)在式(5-8-25)确定的实质变分下不变，即满足

$$\delta G_w = \frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a = 0 \tag{5-8-28}$$

用 Lagrange 乘子 $\lambda^w(x)$ 乘式(5-8-28)，用 $\mu^a(x)$ 乘式(5-8-22)，并求和，然后在 Ω 上积分并与式(5-8-27)结合，得

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathrm{d}^4x\Bigg\{&\left[\dot{\varphi}^a_{(s)} - \frac{\delta H_c}{\delta\pi^{(s)}_a} - \mu^a\frac{\partial\phi_a}{\partial\pi^{(s)}_a}\right]\delta\pi^{(s)}_a + \\ &\left[-\dot{\pi}^{(s)}_a - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a_{(s)}} - \mu^a\frac{\partial\phi_a}{\partial\varphi^a_{(s)}} - \lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^a_{(s)}}\right]\delta\varphi^a_{(s)} + \\ &\partial_\mu[(\pi^{(s)}_a\varphi^a_{(s+1)} - \mathscr{H}_c)\Delta x_\mu] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_a\delta\varphi^a_{(s)})\Bigg\} = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu W^\mu \end{aligned} \tag{5-8-29}$$

对附加有限约束系统，利用系统的运动方程式(5-8-24)，沿着系统运动的轨线，得

$$\partial_\mu\left[(\pi_\alpha^{(s)}\varphi_{(s+1)}^\alpha-\mathscr{H}_c)\Delta x_\mu+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_\alpha^{(s)}\delta\varphi_{(s)}^\alpha)-W^\mu\right]=0\qquad(5\text{-}8\text{-}30)$$

在 4 维时空取一柱体，柱轴沿时间 t 轴方向，上底 V_1 和下底 V_2 分别为 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的类空曲面，在此四维柱体上积分式(5-8-30)，假定场量及其动量在区域的边界处很快趋于零，利用 Gauss 定理得

$$\int_V \mathrm{d}^3x[\pi_\alpha^{(s)}\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\mathscr{H}_c\tau^{0\sigma}-W^{0\sigma}]=\mathrm{const}$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,r)\qquad(5\text{-}8\text{-}31)$$

这样就得到场论中有附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的 2 阶微商系统的广义正则形式的 Noether 定理：如果在式(5-8-25)的变换下，场论中有附加有限约束的 2 阶微商奇异系统的正则 Lagrange 量密度改变一个四维散度项，且内在约束条件 $\phi_a^0(\varphi_{(s)}^\alpha,\pi_\alpha^{(s)})=0$ 和附加有限约束 $G_w(\varphi^\alpha)=0$ 在式(5-8-25)确定的实质变分下不变，那么，有附加有限约束的 2 阶微商奇异系统在相空间中存在 r 个正则形式的守恒量式(5-8-31).

对含场量 2 阶微商的附加约束的 2 阶微商奇异系统可作类似的讨论，只是在式(5-8-25)的变换下，Lagrange 量密度改变一个四维散度项，该系统的内在约束和含场的微商附加约束的实质变分不变，还得不到通常无附加约束情况下的守恒律，如果可正则化外在附加约束与内在约束相容，且在式(5-8-25)的变换下，含微商的附加约束还满足式(5-8-13)，那么，含场量 2 阶微商附加约束的 2 阶微商奇异系统在相空间中的正则守恒量问题，可类似的进一步讨论.

5-8-4 2 阶微商奇异系统的 PC 积分不变量

从前面的讨论中，知道约束 Hamilton 系统的 PC 积分不变量在研究系统的性质时有重要的作用. 下面将导出场论中附加约束并用奇异 Lagrange 量描述的 2 阶微商系统的 PC 积分不变量.

设动力学系统的奇异 Lagrange 量由式(5-8-1)来描述，由于 Lagrange 量的奇异性，因此在相空间描述时该系统存在固有约束式(5-8-17)，又该系统还受附加有限约束式(5-8-3)的限制. 将相空间的正则变量 $\varphi_{(s)}^\alpha(t,x_i)$，$\pi_\alpha^{(s)}(t,x_i)$ 的空间坐标 x_i 固定，相空间的曲线可表示为

$$\varphi_{(s)}^\alpha=\varphi_{(s)}^\alpha(t,\rho),\quad \pi_\alpha^{(s)}=\pi_\alpha^{(s)}(t,\rho)\qquad(5\text{-}8\text{-}32)$$

式中：ρ 为参数. 现在来考察因参数 ρ 的改变而生成的增广相空间的变换，

设在增广相空间中取

$$\left.\begin{aligned} t \to t' &= t + \Delta t = t(\rho) \\ \varphi^a_{(s)}(t,x_i) \to \varphi'^a_{(s)}(t',x_i) &= \varphi^a_{(s)}(t,x_i) + \Delta\varphi^a_{(s)}(t,x_i,\rho) \\ \pi^{(s)}_a(t,x_i) \to \pi'^{(s)}_a(t',x_i) &= \pi^{(s)}_a(t,x_i) + \Delta\pi^{(s)}_a(t,x_i,\rho) \end{aligned}\right\} \tag{5-8-33}$$

变换，其中 ρ 适合

$$\varphi^a_{(s)}(t,x_i,0) = \varphi^a_{(s)}(t,x_i), \quad \pi^{(s)}_a(t,x_i,0) = \pi^{(s)}_a(t,x_i) \tag{5-8-34}$$

在式(5-8-33)的变换下，对于小参数 ρ，式(5-8-26)表示的正则作用量 I^{p} 的变更为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\rho)\delta\rho = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^a_{(s)}}\delta\varphi^a_{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_a}\delta\pi^{(s)}_a + \partial_0\left[(\pi^{(s)}_a\varphi^a_{(s+1)} - \mathscr{H}_c)\Delta x^0\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi^{(s)}_a\delta\varphi^a_{(s)})\right\} \tag{5-8-35}$$

式中

$$\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_a} = \dot{\varphi}^a_{(s)} - \frac{\delta H_c}{\delta\pi^{(s)}_a}, \qquad \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^a_{(s)}} = -\dot{\pi}^{(s)}_a - \frac{\delta H_c}{\delta\varphi^a_{(s)}}$$

$\delta\varphi^a_{(s)}$ 和 $\delta\pi^{(s)}_a$ 为实质变分，它们与总变分 $\Delta\varphi^a_{(s)}$ 和 $\Delta\pi^{(s)}_a$ 的关系为

$$\delta\varphi^a_{(s)} = \Delta\varphi^a_{(s)} - \varphi^a_{(s),0}\Delta x^0, \quad \delta\pi^{(s)}_a = \Delta\pi^{(s)}_a - \pi^{(s)}_{a,0}\Delta x^0 \tag{5-8-36}$$

式(5-8-35)又可化为

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\rho)\delta\rho = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\left[\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi^a_{(s)}}\delta\varphi^a_{(s)} + \frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi^{(s)}_a}\delta\pi^{(s)}_a\right] + \int_V (\pi^{(s)}_a\Delta\varphi^a_{(s)} - \mathscr{H}_c\Delta t)\,\mathrm{d}^3 x\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{5-8-37}$$

由于描述该系统的 Lagrange 量奇异，该系统受有固有约束式(5-8-17)的限制，同时，该系统还受有附加有限约束式(5-8-3)的限制，正则变量的变分不是任意的，假设在式(5-8-33)的变换下，附加有限约束条件 $G_w=0$ 满足式(5-8-28)，引入 Lagrange 乘子，用 $\lambda^w(x)$ 乘式(5-8-28)，并对 w 求和，在区域 Ω 上积分，用 $\mu^a(x)$ 乘式(5-8-22)，然后对 a 求和，在区域 Ω 上积分后结合式(5-8-37)，沿着约束奇异系统运动的“轨线”，利用约束奇异系统的广义正则方程式(5-8-24)可得

$$\Delta I^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{p}\prime}(\rho)\delta\rho = \int_V (\pi^{(s)}_a\Delta\varphi^a_{(s)} - \mathscr{H}_c\Delta t)\,\mathrm{d}^3 x\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{5-8-38}$$

与 5-6-3 小节中的讨论类似，在变量 t，$\varphi^a_{(s)}$ 和 $\pi^{(s)}_a$ 所张成的增广相空间中，取一条适合所有约束(附加有限约束和固有约束)条件的闭曲线 C，沿此闭曲线对式(5-8-38)积分，可得

$$J = \oint_C \int_V \mathrm{d}^3 x(\pi^{(s)}_a\Delta\varphi^a_{(s)} - \mathscr{H}_c\Delta t) = \mathrm{inv} \tag{5-8-39}$$

J 就为场论中受附加有限约束并用奇异 Lagrange 量描述的 2 阶微商系统的 PC 积分不变量. 它表明，在增广相空间中的所有约束(附加约束和内在初级约束)所确定的超曲面 Γ_{p} 上，取一条闭曲线 C，如果附加有限约束在式(5-8-33)的变换下的实质变分不变，即满足式(5-8-28)，且内在约束条件适合式(5-8-22)，那么沿着约束系统运动的轨线，并沿约束超曲面 Γ_{p} 中的任一条闭曲线 C 的积分式(5-8-39)为不变量.

对含场量 2 阶微商的附加约束的 2 阶微商奇异可正则化系统可作类似的讨论. 只是在式(5-8-33)的变换下，不仅要求该系统含场的微商的附加约束的实质变分不变，还要求含微商的附加约束满足式(5-8-13)，同样，可以讨论含场量 2 阶微商的附加约束的 2 阶微商奇异系统的 PC 积分不变量.

与 5-6-3 小节的讨论类似，将场所在空间分成许多小格子，场在小格 k 中的值用其平均值 $\varphi^{a}_{(s)k}(t)$，$\pi^{(s)k}_{a}(t)$代表，场离散化后让 $\varphi^{a}_{(s)k}(t)\to\varphi^{a}_{k}(t)$，$\pi^{(s)k}_{a}(t)\to\pi^{k}_{a}(t)$，类似地可以证明，场论中受附加约束并用奇异 Lagrange 量描述的 2 阶微商系统的 PC 积分不变量与该系统的正则方程等价.

5-9 附加约束奇异系统的量子理论

动力学系统的量子化方法有正则算符形式和路径积分形式. 路径积分量子化因出现在路径积分中的量均是经典的数，这对于研究系统在量子水平的对称性质带来方便. 路径积分常用的量子化方案有 FS 量子化方案[31-32]，它是相空间的路径积分形式；另一种是 FP 量子化方案[33]，它是位形空间的路径积分形式. 前者比后者更一般. 但有时从位形空间路径积分研究显得更方便、实用. 按 FS 量子化方案，当生成泛函表达式中对动量的积分为 Gauss 型时，作出对正则动量的路径积分后，系统在相空间的路径积分形式可化为位形空间的路径积分，如电磁场、杨-Mills 场. 通常规范不变系统可以按 FP 量子化方案量子化.

对称性和守恒律的联系在经典理论中是由 Noether 定理给出的，经典 Noether 定理的研究已推广到受附加约束的奇异系统[12-13]，对场论中受附加约束的奇异系统，对称变换需要满足一定的条件才有经典 Noether 定理的守恒量. 微观粒子的运动由量子理论描述，经典理论中的一些重要结果在量子理论中是否有效，在什么条件下有效，是值得研究的问题. 下面将主要讨论附加有限约束奇异系统在相空间的量子化问题(对可正则化的线性(关于 $\dot{q}^{i}$)附加约束奇异系统仅作初步讨论)，研究场论中附加约束奇异系统相空间量子水平一般情形下的变换性质，对含 Hopf 项和 MCS(Maxwell-Chern-Si-

mons)项的(2+1)维 O(3)非线性 σ-模型等模型[34-36]采用 FS 路径积分量子化方法进行量子化，讨论这些模型的量子对称性质，由量子 Noether 定理给出量子守恒角动量，严格地在量子水平下说明了文献[37]等模型仍具有分数自旋和分数统计性质.

此外，还用位形空间的 EP 量子化方案，导出了有附加约束的规范不变系统量子水平的 EL 方程，研究了该系统量子水平的变换性质，并将其用于 Poincaré 群变换下电磁场在介质分界面附近量子水平的变换性质，在量子水平上说明了电磁波在介质分界上反射和折射时的能量中心沿垂直于入射面方向的"横移"效应，给出了对经典结果的修正[38].

动力学系统的描述有位形空间的 Lagrange 体制和相空间中的 Hamilton 体制 2 种形式，由于系统的量子化通常是用相空间中的正则变量来表述的，因而 Hamilton 体制在量子理论中具有更基本的意义. 初等量子力学中涉及的系统其 Lagrange 量是正规的，相应的正则变量是彼此独立的，而现代场论中(规范理论)常常出现奇异 Lagrange 量系统，尽管该系统在位形空间描述时，不存在附加的外在约束，但过渡到相空间中的 Hamilton 体制描述时其正则变量间存在某些固有(内在)约束关系，该系统为约束 Hamilton 系统(该系统的量子理论出现的一些新问题，在本书前 4 章已有论述).

用奇异 Lagrange 量描述的系统，在位形空间也可能还存在附加的外在约束，如力学中的完整约束和非完整约束，场论中场量满足的附加条件，如非线性 σ-模型等，在场论中仅对个别情况讨论了此类系统的量子化，这里将在较普遍的情形下研究附加约束奇异 Lagrange 量系统的量子理论，通过修改的 Dirac-Bergmann 算法求出该系统的全部约束，并将约束分类，在一定情形下，可将该附加约束奇异系统纳入约束 Hamilton 系统的理论框架，按 FS 路径积分量子化方案实现该系统的量子化，讨论该系统的量子对称性，并通过具体实例说明经典理论的结果在量子理论中不一定再保持[39].

先考虑有限自由度系统，该系统由奇异 Lagrange 量 $L = L(q^i, \dot{q}^i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 描述，系统的运动还受完整外在约束 $G_w(q^i) = 0(w = 1,2,\cdots,m;$ $m < n)$ 的限制，位形空间中系统的运动方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial q^i} \quad (\lambda^w = \lambda^w(t)) \tag{5-9-1}$$

引入正则动量 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ 和正则 Hamilton 量

$$H_c = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q}) = p_i\dot{q}^i - L$$

可将系统的 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述，由于 Lagrange 量奇异，

所以从正则动量的定义式不能完全解出 $\dot{q}^i$ 作为正则变量的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 R，此时系统必存在初级约束 $\phi_a^0(q,p)\approx 0(a=1,2,\cdots,n-R;m<R)$，考虑在正则变量 $\delta q^i,\delta p_i$ 的变分下 H_c 的变分，利用系统的运动方程式(5-9-1)，并注意变分 $\delta q^i,\delta p_i$ 下，初级约束保持不变，$\delta\phi_a^0=0$，这样就可以得到完整外在约束奇异系统的正则方程式(5-1-13a)和式(5-1-13b).

将 ϕ_a^0,G_w 作为初级约束，并统一记为 $\Phi_{a'}^0=(G_w,\phi_a^0)$，初级约束随时间的稳定性(约束的自恰性条件)，即 $\Phi_{a'}^0$ 的自治性要求 $\dot{\Phi}_{a'}^0\approx 0$，也许可确定约束乘子 λ^a,λ^w；也许可导致次级约束，由式(5-1-13a)和式(5-1-13b)，得次级约束

$$\Phi_{a'}^1=\dot{\Phi}_{a'}^0=\frac{\partial\Phi_{a'}^0}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial\Phi_{a'}^0}{\partial p_i}\dot{p}_i=\{\Phi_{a'}^0,H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \qquad (5\text{-}9\text{-}2)$$

其中 $H'_{\mathrm{T}}=H_c+\lambda^a\phi_a^0+\lambda^w G_w$. 次级约束的自治性条件，可能导致其他的次级约束

$$\Phi_{a'}^k=\dot{\Phi}_{a'}^{k-1}=\{\Phi_{a'}^{k-1},H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \qquad (5\text{-}9\text{-}3)$$

这个过程直至

$$\Phi_{a'}^{m+1}=\dot{\Phi}_{a'}^m=\{\Phi_{a'}^m,H'_{\mathrm{T}}\}=C_{a'b}^k\Phi_k^b(k\leqslant m) \qquad (5\text{-}9\text{-}4)$$

为止，并且设所有 $\Phi_{a'}^k$ (k=0, 1, …, K)彼此相容. 这就是完整约束奇异系统求相空间约束的略加修改的 Dirac-Bergmann 算法，与传统不含外在约束的奇异系统求正则约束算法的区别在于将原有 H_{T} 改为了 H'_{T}，完整约束奇异系统可纳入约束 Hamilton 系统的理论框架.

将完整约束奇异系统所有正则约束 $\{\Phi_{a'}^k\}$ 分类，其中第一类约束记为 $\Lambda_k(q^i,p_i)\approx 0(k=1,2,\cdots,A)$；第二类约束记为 $\theta_i(q^i,p_i)\approx 0(i=1,2,\cdots,B)$；与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k(q^i,p_i)\approx 0(1,2,\cdots,A)$，符号“≈”代表等式在约束超曲面上成立. 按 FS 路径积分量子化方案，该完整约束奇异系统在相空间 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J]=\int\mathscr{D}q^i\mathscr{D}p_i\prod_{j,k,l}\delta(\theta_j)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|\cdot$$

$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t[p\dot{q}-H_c+Jq]\} \qquad (5\text{-}9\text{-}5)$$

其中 J_i 为 q^i 的外源，出现在上述路径积分中的数均为 C-数，这为分析系统的量子对称性质带来方便，利用 δ-函数和 Grassmann 变量 $\eta(t)$ 和 $\eta^+(t)$ 的积分性质，式(5-9-5)可写成

$$Z[J]=\int\mathscr{D}q^i\mathscr{D}p_i\mathscr{D}\eta_k^+\mathscr{D}\eta_l\mathscr{D}\lambda_m\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}t[L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_iq^i]\} \qquad (5\text{-}9\text{-}6)$$

式中

$$L_{\text{eff}}^{\text{p}}=L^{\text{p}}+L_{\text{m}}+L_{\text{gh}},\quad L^{\text{p}}=p_i\dot{q}^i-H_{\text{c}} \tag{5-9-7a}$$

$$L_{\text{m}}=\lambda_i\theta_i+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l,\quad \lambda_m=(\lambda_k,\lambda_l,\lambda_i) \tag{5-9-7b}$$

$$L_{\text{gh}}=\int \mathrm{d}\tau[\eta_k^+(t)\{\Lambda_k(t),\Omega_l(\tau)\}\eta_l(\tau)+\frac{1}{2}\eta_i^+(t)\{\theta_i(t),\theta_j(\tau)\}\eta_j(\tau)] \tag{5-9-7c}$$

对受非完整外在约束的奇异系统，设非完整外在约束（Четаев 型）为 $G_w\ (q^i,\ \dot{q}^i)=0\ (w=1,2,\cdots,m;m<n)$，此时位形空间方程的运动方程与式(5-9-1)类似，只需将式(5-9-1)中的 $\lambda^w\dfrac{\partial G_w}{\partial q^i}$ 换为 $\lambda^w\dfrac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}$ 就行了[13]. 由于系统 Lagrange 量的奇异性，相空间还存在固有约束 $\phi_a^0\approx 0\ (a=1,2,\cdots,n-R;\ m<R)$. 类似的讨论可得此非完整约束奇异系统在坐标为 $(q^i,\dot{q}^i,p_i)$ 空间的运动方程，该方程与式(5-1-13a)和式(5-1-13b)类似，只需将式(5-1-13b)右端的 $\lambda^w\dfrac{\partial G_w}{\partial q^i}$ 换为 $\lambda^w\dfrac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}$ 就行了[13]，这样的运动方程不完全是相空间的运动方程，因为方程中还可能出现了 $\dot{q}^i$. 为了完全用正则变量表达该方程，要考虑某种特殊情况，例如，由 $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ 可解出的 $\dot{q}^i$ 作为正则变量 q^i 和 p_i 的函数，代入非完整约束 $G_w(q^i,\dot{q}^i)=0$ 中使其化为正则变量 q^i 和 p_i 的函数，从而，$\dfrac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}$ 也可表示为正则变量 q^i 和 p_i 的函数，并记 $\dfrac{\partial G_w}{\partial \dot{q}^i}\equiv G_{wi}^0(q^i,p_i)$. 例如，$G_w$ 为 $\dot{q}^i$ 的线性函数的情形，在此特殊情况下，非完整约束奇异系统的正则方程为

$$\dot{q}^i=-\frac{\partial H_{\text{c}}}{\partial p_i}+\mu^a\frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{5-9-8a}$$

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H_{\text{c}}}{\partial q^i}-\mu^a\frac{\partial \phi_a^0}{\partial q^i}-\lambda^w G_{wi}^0\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5-9-8b}$$

将 $\phi_a^0\approx 0$ 和 $G_w^0\approx 0$ 作为初级约束，假设它们是相容的，并统一记为 $\Phi_{a'}^0\equiv(G_w^0,\phi_a^0)$，初级约束的自治性要求，依次导致各次级约束

$$\Phi_{a'}^1=\dot{\Phi}_{a'}^0=\left\{\Phi_{a'}^0,H_{\text{T}}+\lambda^w G_{wi}^0\frac{\partial \Phi_{a'}^0}{\partial p_i}\right\}\approx 0 \tag{5-9-9a}$$

$$\Phi_{a'}^k=\dot{\Phi}_{a'}^{k-1}=\left\{\Phi_{a'}^{k-1},H_{\text{T}}+\lambda^w G_{wi}^0\frac{\partial \Phi_{a'}^{k-1}}{\partial p_i}\right\}\approx 0 \tag{5-9-9b}$$

直至满足

$$\Phi_{a}^{m+1}=\dot{\Phi}_{a}^{m}=\left\{\Phi_{a}^{m},H_{\mathrm{T}}+\lambda^{w}G_{wi}^{0}\frac{\partial\Phi_{a}^{m}}{\partial p_{i}}\right\}=$$

$$C_{a'k}^{b}\Phi_{b}^{k}\quad(k\leqslant m) \tag{5-9-9c}$$

为止. 这就是上述特殊情况下的非完整约束奇异系统求约束修改的 Dirac-Bergmann 算法. 当所有这些约束 $\Phi_{a'}^{k}$ ($k=0$, 1, …, m)彼此相容时, 按上述算法就可以求出该非完整约束奇异系统的全部约束. 从以上的讨论可以看到, 只要非完整外在约束 $G_w(q^i,\dot{q}_i)=0$ 和正则动量的定义式 $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$ 相结合, 可将 $G_w(q^i,\dot{q}_i)=0$ 中的 $\dot{q}^i$ 用正则变量 q^i 和 p_i 来表出, 从而, $\dfrac{\partial G_w}{\partial\dot{q}^i}$ 也可用正则变量来表达, 这样就可得非完整约束奇异系统的正则方程式(5-9-8a)和式(5-9-8b). 这样的非完整约束奇异系统称为可正则化的系统, 对这样的系统可用修改的 Dirac-Bergmann 算法求出所有约束. 当 G_w 关于 $\dot{q}^i$ 线性情形, $G_w=\dot{q}^i\dfrac{\partial\overline{G}_w}{\partial q^i}+b_w$, 其中 $\overline{G}_w$ 和 b_w 均为 q^i 的函数, 此时力学量 $F(q^i,p_i)$ 随时间的演化, 按式(5-9-8)有

$$\dot{F}=\{F,H_{\mathrm{T}}\}+\lambda^{w}\frac{\partial\overline{G}_{w}}{\partial q^{i}}\frac{\partial F}{\partial p_{i}}=\{F,H_{\mathrm{c}}+\mu^{a}\phi_{a}^{0}+\lambda^{w}\overline{G}_{w}\}$$

可见, 当 G_w 关于 $\dot{q}^i$ 线性, 且 $G_w=0$ 可正则化时, 可讨论将其纳入约束 Hamilton 系统理论框架的问题.

对可正则化的非完整约束奇异系统用修改的 Dirac-Bergmann 算法求出所有相空间约束, 只要这些约束彼此相容, 就可将约束进行分类, 当第一类约束与规范生成元相联系时, 就可像完整约束奇异系统那样, 按 FS 路径积分量子化方案(或略加修改), 写出可正则化的非完整约束奇异系统在相空间 Green 函数的生成泛函式(5-9-6).

在量子理论中, 系统的性质可由 Green 函数的生成泛函导出. 下面研究该约束奇异系统的量子正则对称性. 设系统的有效正则作用量

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int L_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t \tag{5-9-10}$$

在下列无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned}t'&=t+\Delta t=t+\varepsilon_{\sigma}\tau^{\sigma}(t,q,p)\\q^{i\prime}(t')&=q^{i}(t)+\Delta q^{i}(t)=q^{i}(t)+\varepsilon_{\sigma}\xi^{i\sigma}(t,q,p)\\p'_{i}(t')&=p_{i}(t)+\Delta p_{i}(t)=p_{i}(t)+\varepsilon_{\sigma}\eta_{i}^{\sigma}(t,q,p)\end{aligned}\right\} \tag{5-9-11}$$

下不变, 式中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意参数, $q^i(t)=(q^i(t),\eta(t),$

$\lambda(t))$，$p_i(t)$ 为 $q^i(t)$ 的正则动量，τ^σ，$\xi^{i\sigma}$ 和 η_i^σ 为给定函数．将式(5-9-11)整体变换定域化，将参数 ε_σ 换为函数 $\varepsilon_\sigma(t)$，$\varepsilon_\sigma(t)$ 为无穷小任意函数，它们的值及其各级微商的值在积分的时间区间端点为 0. 在此定域变换下，有效作用量的变分为

$$\Delta I_{\text{eff}}^{\text{p}} = \int \mathrm{d}t\{[\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta q^i}\delta q^i + \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta p_i}\delta p_i] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i\delta q^i + (p_i\dot{q}^i - H_{\text{eff}})\Delta t]\} +$$
$$\int \mathrm{d}t\{[(p_i\dot{q}^i - H_{\text{eff}})\tau^\sigma + p_i(\xi^{i\sigma} - \dot{q}^i\tau^\sigma)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_\sigma(t)\} \tag{5-9-12}$$

式中：H_{eff} 为 $L_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 相应的 Hamilton 量，而

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta q^i} = -\dot{p}_i - \frac{\partial H_{\text{eff}}}{\partial q^i}, \quad \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta p_i} = \dot{q}^i - \frac{\partial H_{\text{eff}}}{\partial p_i} \tag{5-9-13}$$

由于假设系统有效正则作用量在式(5-9-11)变换下不变，因此式(5-9-12)右端的第一个积分为 0. 将式(5-9-12)右端的第二个积分作分部积分，根据 $\varepsilon_\sigma(t)$ 的边界条件，可得

$$\Delta I_{\text{eff}}^{\text{p}} = -\int \mathrm{d}t\,\varepsilon_\sigma(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i(\xi^{i\sigma} - \dot{q}^i\tau^\sigma) + (p_i\dot{q}^i - H_{\text{eff}})\tau^\sigma] \tag{5-9-14}$$

假设变换式(5-9-11)相应的定域变换的 Jacobi 行列式记为 1，由于生成泛函式(5-9-6)在该定域变换下的不变性，有

$$Z[J] = \int \mathscr{D}q_i\mathscr{D}p^i\exp\left\{\mathrm{i}I_{\text{eff}} + \mathrm{i}\int_{t_2}^{t_1} J_i q^i \mathrm{d}t\right\}\left\{1 - \mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\varepsilon_\sigma(t)\right.$$
$$\left.\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_i(\xi^{i\sigma} - \dot{q}^i\tau^\sigma) + (p_i\dot{q}^i - H_{\text{eff}})\tau^\sigma] + J_i(\xi^{i\sigma} - \dot{q}^i\tau^\sigma)\right\}\right\} \tag{5-9-15}$$

生成泛函式(5-9-6)在该定域变换下的不变性，表明 $\left.\frac{\delta Z(J)}{\delta\varepsilon(t)}\right|_{\varepsilon(x)=0} = 0$，将式(5-9-15)关于 $\varepsilon_\sigma(t)$ 求泛函微商，然后让外源 $J_i = 0$，得

$$\langle 0 | T^*[p_i\xi^{i\sigma} - H_{\text{eff}}\tau^\sigma] | 0\rangle = \text{const} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, r) \tag{5-9-16}$$

其中 $|0\rangle$ 代表量子系统的基态，T^* 是一种特定的编时乘积. H_{eff} 为 $L_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 相应的 Hamilton 量，$L_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 包含了系统的所有外在约束和内在约束以及规范条件等．由上述讨论可知，在相空间中的整体变换式(5-9-11)的变换下，如果附加约束奇异系统的有效正则作用量不变，且与变换式(5-9-11)对应的定域变换的 Jacobi 行列式为 1，那么该系统存在相空间的量子守恒律式(5-9-16). 此守恒律与经典正则 Noether 定理给出的守恒律相对应，后者守恒律中出现的是正则 Hamilton 量 H_c，而前者则是有效 Hamilton 量 H_{eff}，这是由于系统存在约束的量子效应，并且经典情形和量子情形的守恒条件也是不同的(参见 5-1，5-3 节). 经典理论中对称性所联系的守恒量，在量子理论中不

一定再保持．下面讨论一个非完整约束奇异系统的例子．

系统的奇异 Lagrange 量[13]为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}q_3^2(q_1^2+q_2^2)-$$

$$q_3(q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) \tag{5-9-17}$$

系统所受的附加非完整约束为

$$G=a^2\dot{q}_1^2-\dot{q}_1\dot{q}_2-\dot{q}_2^2=0 \qquad (a\text{ 为常数}) \tag{5-9-18}$$

与广义坐标 q^i 相应的正则共轭动量分别为

$$\left.\begin{aligned}p_1&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=\dot{q}_1+q_3q_2\\p_2&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}=\dot{q}_2-q_3q_1\\p_3&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_3}=0\end{aligned}\right\} \tag{5-9-19}$$

固有初级约束为

$$\phi^0=p_3=0 \tag{5-9-20}$$

正则 Hamilton 量为

$$H_c=p_i\dot{q}^i-L=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+$$

$$q_3(q_1p_2-q_2p_1)+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) \tag{5-9-21}$$

由式(5-9-19)解出 $\dot{q}_1,\dot{q}_2$ 代入式(5-9-18)，可将式(5-9-18)用正则变量表出并化为相空间的约束，即

$$G^0=a^2(p_1-q_2q_3)^2-(p_1-q_2q_3)(p_2+q_1q_3)-$$

$$(p_2+q_1q_3)^2=0 \tag{5-9-22}$$

显然约束式(5-9-20)和约束式(5-9-22)相容，将它们作为非完整约束奇异系统的初级约束[40]，按上述修改的求约束的 Dirac-Bergmann 算法，初级约束的自洽性 $\dot{\phi}^0=0$ 和 $\dot{G}^0=0$ 分别导致确定 Lagrange 乘子 $\mu^a(t),\lambda^w(t)$ 的方程，不产生任何次级约束．可见，此系统为可正则化的非完整约束奇异系统，并且，

$$\{\phi^0,G^0\}=2a^2q_2(p_1-q_2q_3)+q_1p_1-q_2p_2-$$

$$2q_1q_2q_3+2q_1(p_2+q_1q_3) \tag{5-9-23}$$

表明约束 $\phi^0\approx0$ 和 $G^0\approx0$ 均为第二类约束，按 FS 路径积分量子化方案，该约束正则系统在相空间 Green 函数的生成泛函为

$$
\begin{aligned}
Z[J] = & \int \mathscr{D}q^i \mathscr{D}p_i \delta(\phi^0)\delta(G^0)[\det | \{\phi^0, G^0\} |]^{1/2} \cdot \\
& \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t[p_i\dot{q}^i - H_c + J_i q^i]\} = \\
& \int \mathscr{D}q^i \mathscr{D}p_i \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}t[L_{\text{eff}}^{\mathrm{p}} + J_i q^i]\}
\end{aligned}
\tag{5-9-24}
$$

其中

$$
L_{\text{eff}}^{\mathrm{p}} = L^{\mathrm{p}} + L_{\mathrm{m}} + L_{\mathrm{gh}} \tag{5-9-25a}
$$

$$
L^{\mathrm{p}} = p_i\dot{q}^i - H_c
$$

$$
L_{\mathrm{m}} = \lambda_1\phi^0 + \lambda_2 G^0 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 为乘子}) \tag{5-9-25b}
$$

$$
L_{\mathrm{gh}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \eta_i^+(t)\ \{\theta_i(\tau), \theta_j(\tau)\}\eta_j(\tau) \tag{5-9-25c}
$$

$$
(\theta_1 = \phi^0, \theta_2 = G^0)
$$

式(5-9-25c)中的 $\{\theta_i(t),\theta_j(t)\}$ 可由 $\{\phi^0,\phi^0\}$, $\{\phi^0,G^0\}$, $\{G^0,G^0\}$ 的 Poisson 括号给出.

在时间平移变换下，有效作用量 $I_{\text{eff}}^{\mathrm{p}}$ 不变，且正则变量变换的 Jacobi 行列式为 1，由式(5-9-16)可得此可正则化的非完整约束奇异系统的量子守恒荷

$$
\langle 0 \mid T^* H_{\text{eff}} \mid 0\rangle = \text{const} \tag{5-9-26}
$$

此守恒量不同于经典理论中时间平移不变性的守恒量为 H_c（参见 5-3 节）. 这是由于系统存在附加非完整约束和 Lagrange 量奇异在相空间存在的固有约束带来的量子效应，系统量子化后可能出现"鬼量 $\eta(t)$ 和 $\eta^+(t)$"(反对易 C-数)的缘故. 这对应于非 Abel 规范场量子化后出现的"鬼粒子". "鬼粒子"对量子系统的能量、动量和角动量有贡献[41-43]. 这个例子表明，经典理论中的对称性和守恒量的关系，在量子理论中不再保持，出现所谓"量子反常"，此反常的出现曾经被认为是由于对称变换下，路径积分测度的非不变性所致[19]. 上述结果说明，反常也可出现在对称变换下路径积分测度不变的情形.

对附加约束奇异系统的量子化可分 2 种情形来研究. 当附加约束是完整约束(完整外在约束为 $G_w(q^i)=0$)时，可将该系统纳入约束 Hamilton 系统的理论框架，并引入辅助 Lagrange 量 $L^* = L + \lambda^w G_w$，式中 L 为原始的奇异Lagrange量，对 L^* 描述的系统，可按约束 Hamilton 系统理论来处理，即可实现完整约束奇异系统的量子化；而对非完整约束奇异系统，当非完整外在约束 $G_w(q^i,\dot{q}^i)=0$ 又关于 $\dot{q}^i$ 线性时，可通过正则动量的定义式化为正

则约束，并与奇异 Lagrange 系统的固有的正则约束相容时，可用修改的 Dirac-Bergmann 算法求出全部约束．当所有这些约束均相容时，此非完整约束奇异系统是可正则化的，可纳入约束 Hamilton 系统的理论框架，研究该非完整约束奇异系统的量子化.

以上对有限自由度约束奇异系统量子化的讨论推广到场论情形是直接的.

5-10 场论中附加约束奇异系统量子正则变换性质

考虑场论中一个受附加约束并用奇异 Lagrange 量描述的系统，该系统由非独立的场量 $\varphi^{\alpha}(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 描述，其中 $x=(x^0,\boldsymbol{x})=(t,\boldsymbol{x})$ 为 4 维时空指标，α 为场的分量指标．设场的 Lagrange 量是奇异的，其密度为 $\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu})$，且不显含时空坐标，其中 $\varphi^{\alpha}_{,\mu}\equiv\partial_{\mu}\varphi^{\alpha}(\mu=0,1,2,3)$．场的 Lagrange 量为 $\varphi^{\alpha}(x)$，$\dot{\varphi}^{\alpha}$ 的泛函，即

$$\mathscr{L}[\varphi^{\alpha},\dot{\varphi}^{\alpha}]=\int_V \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu}) \tag{5-10-1}$$

假设系统的运动受附加有限约束的限制，其约束条件为

$$G_w(\varphi^{\alpha})=0 \quad (w=1,2,\cdots,l_1) \tag{5-10-2}$$

根据 Lagrange 量的奇异性，过渡到相空间的 Hamilton 体制时，系统在相空间存在固有初级(内在)约束

$$\phi^0_a(\varphi^{\alpha},\pi_a)=0 \quad (a=1,2,\cdots,n-R) \tag{5-10-3}$$

假设约束式(5-10-2)和式(5-10-3)彼此相容，将式(5-10-2)和式(5-10-3)作为系统的初级约束[40]，并统一记为 $\Phi^0_{a'}\equiv(G_w,\phi^0_a)$，初级约束的自洽性要求 $\dot{\Phi}^0_{a'}=0$，可能导致次级约束

$$\Phi^1_{a'}=\{\Phi^0_{a'},H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{5-10-4}$$

式中：

$$H'_{\mathrm{T}}=\int_V \mathrm{d}^3x(H_c+\mu^a\phi^0_a+\lambda^w G_w)=H_{\mathrm{T}}+H'$$

次级约束的自洽性要求，又可导致其他的次级约束(参见 5-6 节)：

$$\Phi^k_{a'}=\{\Phi^{k-1}_{a'},H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{5-10-5}$$

用这样略加修改的 Dirac-Bergmann 算法可求出该约束(不含场量时间微商)奇异系统的所有正则约束．当这些约束彼此相容时，可将所有正则约束分类，将该约束奇异系统纳入约束 Hamilton 系统的理论框架，然后进行路径积分量子化．另一种方法是，对附加有限约束式(5-10-2)可引入 Lagrange

乘子 λ^w 和辅助 Lagrange 量密度 $\mathscr{L}^*$ ，有

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \lambda^w G_w \tag{5-10-6}$$

利用广义变分原理此约束奇异系统的经典运动方程可由 $\mathscr{L}^*$ 导出，将该系统作路径积分量子化时，利用 Dirac-Bergmann 算法求约束的方法，求出 $\mathscr{L}^*$ 描述的系统在相空间的所有约束，并将所有约束分为第一类约束和第二类约束，记 $\Lambda_k(\varphi^a,\pi_a)\approx 0(k=1,2,\cdots,K_1)$ 为第一类约束，记 $\theta_i(\varphi^a,\pi_a)\approx 0(i=1,2,\cdots,I_1)$ 为第二类约束，其中"$\approx$"代表等式在约束超曲面上成立. 对该系统进行量子化时，与每个第一类约束相应的规范条件记为 $\Omega_k(\varphi^a,\pi_a)\approx 0(k=1,2,\cdots,K_1)$ ，按 FS 量子化方案，此约束奇异系统相空间 Green 函数的生成泛函可写为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}\varphi^a \mathscr{D}\pi_a \prod_{j,k,l} \delta(\theta_j)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}| \cdot$$

$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\pi_a\dot{\varphi}^a-\mathscr{H}_c^*+J\varphi^a]\} \tag{5-10-7}$$

这里，$\mathscr{H}_c^*$ 是与 $\mathscr{L}^*$ 相应的正则 Hamilton 量密度. 如果对动量也引入外源，则此约束奇异系统 Green 函数的相空间生成泛函为[44-46]

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\varphi^a \mathscr{D}\pi_a \prod_{a=1}^{K_1} \delta(\Lambda_a)\delta(\Omega^a)\prod_{l=1}^{I_1}\delta(\theta_l)\det|\{\Lambda_a,\Omega^b\}| \cdot$$

$$[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\cdot$$

$$\exp[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+J_a\varphi^a+K^a\pi_a)] \tag{5-10-8}$$

利用 Grassmann 变量 $C(x)$ 和 $\overline{C}(x)$ 的积分性质，有

$$\det|\{A_a(x),B^b(y)\}|=\int \mathscr{D}\overline{C}_a\mathscr{D}C_b\exp[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\overline{C}_a(x)\cdot$$

$$\{A_a(x),B^b(y)\}C_b(y)] \tag{5-10-9}$$

再根据 δ-函数的性质，于是，生成泛函的表达式(5-10-8)可写成

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\varphi^a\mathscr{D}\pi_a\mathscr{D}\lambda_m\mathscr{D}\overline{C}_a\mathscr{D}C_b\exp\{\mathrm{i}[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+$$

$$\int \mathrm{d}^4x(J_a\varphi^a+K^a\pi_a{}^a)]\} \tag{5-10-10}$$

式中：$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 为有效正则作用量，且

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{*\mathrm{p}}+\mathscr{L}_m+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}) \tag{5-10-11}$$

其中

$$\mathscr{L}_m=\lambda_a\Lambda_a+\lambda_b\Omega^b+\lambda_l\theta^l \tag{5-10-12}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\int \mathrm{d}^4y[\overline{C}_a(x)\{\Lambda_a(x),\Omega^b(y)\}C_b(y)+$$

$$\frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}C_j(y)] \tag{5-10-13}$$

$\mathscr{L}^{*p}$ 是 $\mathscr{L}^*$ 相应的相空间 Lagrange 量密度，$(\lambda_a,\lambda_b,\lambda_l)=\lambda_m$ 为相应的乘子场.

在式(5-10-10)中，对乘子场 λ_m 和鬼场 $\overline{C}_k$ 与 C_k 分别引入相应的外源 J_a，J_m，ξ 和 $\bar{\xi}$，记 $\varphi^\sigma=(\varphi^\sigma,\lambda_m,\overline{C}_a,C_b)$，$J_a=(J_a,J_m,\xi,\bar{\xi})$，此约束 Hamilton 系统相空间 Green 函数的生成泛函可写为

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi^\sigma\mathscr{D}\pi_\sigma\exp\{\mathrm{i}[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha\varphi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha)]\} \tag{5-10-14}$$

对含场量微商的附加约束奇异系统，其附加约束条件表示为

$$G_w(\varphi^\sigma,\varphi^\sigma_{,\mu})=0\quad(w=1,2,\cdots,l_2) \tag{5-10-15}$$

由广义变分原理，可推得该系统的 EL 方程. 由于系统 Lagrange 的奇异性，引入正则动量 π_σ 和正则 Hamilton 量 H_c，过渡到相空间描述时，正则变量间存在初级固有(内在)约束

$$\phi^0_a(\varphi^\sigma,\pi_\sigma)=0\quad(a=1,2,\cdots,n-R) \tag{5-10-16}$$

该系统的运动方程可化为

$$\dot{\varphi}^\sigma=\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_\sigma} \tag{5-10-17a}$$

$$\dot{\pi}_\sigma=-\frac{\delta H_{\mathrm{T}}}{\delta\varphi^\sigma}-\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\sigma}+\partial_\mu\left(\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}}\right) \tag{5-10-17b}$$

式(5-10-17b)不完全是用正则变量表达的，因为该式可能出现 $\dot{\varphi}^\sigma$. 为了得到完全用正则变量表达的正则方程，现在考虑附加约束可正则化的情况. 由正则动量的定义式 $\pi_\sigma=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^\sigma}$ 能解出的 $\dot{\varphi}^\alpha$ 作为正则变量的函数的情形，将可解出的 $\dot{\varphi}^\sigma$ 代入式(5-10-15)，设其可用正则变量来表达，并记为 $G^0_w(\varphi^\sigma,\pi_\sigma)=0$. 特别当 $G_w(\varphi^\sigma,\varphi^\sigma_{,\mu})=0$ 关于 $\varphi^\sigma_{,\mu}$ 为线性时，且可令

$$\lambda^w\frac{\partial G_w}{\partial\varphi^\sigma}-\partial_\mu\left(\frac{\partial(\lambda^w G_w)}{\partial\varphi^\sigma_{,\mu}}\right)\equiv E_\sigma(\varphi^\sigma,\pi_\sigma,\lambda^w) \tag{5-10-18}$$

于是含场量微商的附加约束奇异系统，当附加约束关于 $\varphi^\sigma_{,\mu}$ 线性并且附加约束与正则动量的定义式结合，使其可正则化时，系统的运动方程式(5-10-17)可写为正则方程，即

$$\dot{\varphi}^\sigma=\{\varphi^\sigma,H_{\mathrm{T}}\} \tag{5-10-19a}$$

$$\dot{\pi}_\sigma=\{\pi_\sigma,H_{\mathrm{T}}\}-E_\sigma \tag{5-10-19b}$$

式中：$H_{\mathrm{T}}=\int_V\mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_c+\mu^a\phi^0_a)$，$\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量密度. 将可正则化的

关于 $\varphi^{a}_{,\mu}$ 线性的附加约束式(5-10-15)和初级固有约束式(5-10-16)作为此约束奇异系统的初级约束，并统一记为 $\Phi^{0}_{a'} \approx (G^{0}_{w}, \phi^{0}_{a})$，初级约束的自洽性条件 $\dot{\Phi}^{0}_{a'} \approx 0$，也可能导致次级约束，由式(5-10-19)得

$$\Phi^{1}_{a'} = \dot{\Phi}^{0}_{a'} = \frac{\partial \Phi^{0}_{a'}}{\partial \varphi^{a}}\dot{\varphi}^{a} + \frac{\partial \Phi^{0}_{a'}}{\partial \pi_{a}}\dot{\pi}_{a} =$$

$$\{\Phi^{0}_{a'}, H_{\mathrm{T}}\} + \int \mathrm{d}^{3}x E_{a} \frac{\delta \Phi^{k-1}_{a'}}{\delta \pi_{a}} \approx 0 \qquad (5\text{-}10\text{-}20\mathrm{a})$$

次级约束的自洽性条件又可导致其他的次级约束

$$\Phi^{k}_{a'} = \{\Phi^{k-1}_{a'}, H_{\mathrm{T}}\} + \int \mathrm{d}^{3}x E_{a} \frac{\delta \Phi^{k-1}_{a'}}{\delta \pi_{a}} \approx 0 \qquad (5\text{-}10\text{-}20\mathrm{b})$$

这个过程直至

$$\Phi^{m+1}_{a'} = \{\Phi^{m}_{a'}, H_{\mathrm{T}}\} + \int \mathrm{d}^{3}x E_{a} \frac{\delta \Phi^{m}_{a'}}{\delta \pi_{a}} \approx$$

$$C^{b'}_{a'k}\Phi^{k}_{b'} \quad (k \leqslant m) \qquad (5\text{-}10\text{-}20\mathrm{c})$$

为止．这里假设所有约束 $\Phi^{k}_{a}(k = 0, 1, \cdots, a'; a' = a, w)$ 均彼此相容．这就是场论中可正则化的关于 $\varphi^{a}_{,\mu}$ 线性的含场量的时间微商的附加约束奇异 Lagrange 量系统求全部约束的修改的 Dirac-Bergmann 算法．求出系统在相空间的所有约束后，将所有约束分为第一类约束和第二类约束．记 $\Lambda_{k}(\varphi^{a}, \pi_{a}) \approx 0(k = 1, 2, \cdots, K_{2})$ 为第一类约束，记 $\theta_{i}(\varphi^{a}, \pi_{a}) \approx 0(i = 1, 2, \cdots, I_{2})$ 为第二类约束，当第一类约束与规范自由度有关时，可考虑按 FS 量子化方案对该系统进行量子化时，对每个第一类约束选取相应的规范条件，并记为 $\Omega_{k}(\varphi^{a}, \pi_{a}) \approx 0(k = 1, 2, \cdots, K_{2})$，类似地可写出此约束奇异系统相空间 Green 函数的生成泛函式(5-10-7)．

对附加约束含场量的时间微商与不含场量的时间微商的奇异 Lagrange 量系统，当它们可纳入约束 Hamilton 系统的理论框架，并可按 FS 路径积分量子化方案，写出它们相空间路径积分形式的 Green 函数的生成泛函时，从而可建立约束奇异系统的量子对称性质．第 3 章中讨论的整体和定域量子对称性，其中包括 Ward 恒等式、量子 Noether 定理、量子 Noether 恒等式及应用和量子 PC 积分不变量等，均可移植到该约束奇异系统中来．下面先研究场论中该约束奇异系统的量子整体对称性．

考虑一个增广相空间的无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma}\tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_{\sigma}\xi^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_{\sigma}\eta^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}10\text{-}21)$$

式(5-10-21)中对约束奇异系统 $\varphi(x)$ 代表所有与场量(包括鬼场)和约束(包括附加约束)以及规范条件等所联系的乘子场；$\pi(x)$为 $\varphi(x)$的共轭动量；ε_σ $(\sigma=1，2，\cdots，r)$是无穷小任意参数；$\tau^{\mu\sigma},\xi^\sigma$ 和 η^σ 是 $x,\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的函数. 在式(5-10-21)的整体变换下，有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 式(5-10-11)的变分为

$$\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}=\int \mathrm{d}^4 x\{(\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\pi}\delta\pi)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi\delta\varphi)+$$
$$\partial_\mu(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}}\Delta x^\mu)\} \tag{5-10-22}$$

式中

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\varphi}=-\dot{\pi}-\frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta\varphi},\quad \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\pi}=\dot{\varphi}-\frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta\pi} \tag{5-10-23}$$

且 $H_{\text{eff}}=\int_V \mathrm{d}^3 x\mathscr{H}_{\text{eff}}$ 是与有效 Lagrange 量

$$L_{\text{eff}}^{\text{p}}=\int_V \mathrm{d}^3 x\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}}=\int_V \mathrm{d}^3 x(\pi_a\dot{\varphi}^a-\mathscr{H}_{\text{eff}})$$

相联系的有效 Hamilton 量，$\mathscr{H}_{\text{eff}}$ 为场的有效正则 Hamilton 密度. 又实质变分 $\delta\varphi$ 与总变分 $\Delta\varphi$ 的关系为

$$\delta\varphi=\Delta\varphi-\varphi_{,\mu}\Delta x^\mu,\quad \delta\pi=\Delta\pi-\pi_{,\mu}\Delta x^\mu \tag{5-10-24}$$

则式(5-10-22)又可写为

$$\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}=\int \mathrm{d}^4 x\varepsilon_\sigma\{[(-\dot{\pi}-\frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta\varphi})(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+$$
$$(\dot{\varphi}-\frac{\delta H_{\text{eff}}}{\delta\pi})(\eta^\sigma-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+$$
$$\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\} \tag{5-10-25}$$

假定在式(5-10-21)的整体变换下，有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 的改变为

$$\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}=\varepsilon_\sigma\int \mathrm{d}^4 x[\partial_\mu W^{\mu\sigma}(x,\varphi,\pi)+R^\sigma(x,\varphi,\pi)] \tag{5-10-26}$$

这里 $W^{\mu\sigma}$ 和 R^σ 是 x 和正则变量 (φ,π) 的函数. 将整体变换式(5-10-21)定域化，即考虑如下变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\pi)\\ \varphi'(x')&=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\varepsilon_\sigma(x)\xi^\sigma(x,\varphi,\pi)\\ \pi'(x')&=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+\varepsilon_\sigma(x)\eta^\sigma(x,\varphi,\pi)\end{aligned}\right\} \tag{5-10-27}$$

$\varepsilon_\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 是无穷小任意函数，它们的值和它们的各级导数值在时空区域的边界上为 0. 在式(5-10-27)的变换下，式(5-10-11)所示有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 的变分为

$$\Delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}=\int \mathrm{d}^4 x\,\varepsilon_\sigma(x)\{[\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\varphi}(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+$$

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\pi}(\eta^{\sigma}-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+\partial_{\mu}[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+$$

$$\text{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}+\int\text{d}^4x[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}\partial^{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x)+$$

$$\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\text{D}\varepsilon_{\sigma}(x)] \tag{5-10-28}$$

由于假设在整体变换式(5-10-21)下，有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 的改变由式(5-10-26)表达，因此式(5-10-28)中的第一个积分可由式(5-10-26)给出，并考虑到 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ 的边界条件，式(5-10-28)可化为

$$\Delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}=\int\text{d}^4x\,\varepsilon_{\sigma}(x)\{\partial_{\mu}[W^{\mu\sigma}-(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]-$$

$$\text{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+R^{\sigma}\} \tag{5-10-29}$$

设场量变换式(5-10-27)的 Jacobi 行列式为 $\bar{J}[\varphi,\pi,\varepsilon]$. 由于生成泛函式(5-10-14)在式(5-10-27)变换下有不变性，将式(5-10-27)和式(5-10-29)代入式(5-10-14)，并对 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ 求泛函微商，有 $\left.\frac{\delta Z}{\delta\varepsilon_{\sigma}(x)}\right|_{\varepsilon_{\sigma}(x)}=0$

由此得

$$\int\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\varphi\{\partial_{\mu}[W^{\mu\sigma}-(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]-$$

$$\text{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+R^{\sigma}+J_0^{\sigma}+$$

$$J(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+K(\eta^{\sigma}-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\}\cdot$$

$$\exp[\text{i}\int\text{d}^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}}+J\varphi+K\pi)]=0 \tag{5-10-30}$$

式中

$$J_0^{\sigma}=-\text{i}\left.\frac{\delta\bar{J}[\varphi,\pi,\varepsilon]}{\delta\varepsilon_{\sigma}(x)}\right|_{\varepsilon^{\sigma}(x)=0} \tag{5-10-31}$$

记

$$N^{\sigma}=\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} \tag{5-10-32}$$

$$F^{\sigma}=J(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+K(\eta^{\sigma}-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \tag{5-10-33}$$

将式(5-10-30)关于 $J(x_j)$ 求 n 次泛函微商，可得

$$\int\mathscr{D}\pi\mathscr{D}\varphi\Big\{\{\partial_{\mu}[W^{\mu\sigma}-(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]-\text{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+$$

$$R^{\sigma}+J_0^{\sigma}\}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)-$$

$$\text{i}\sum_j\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdot\cdots\cdot$$

$$\varphi(x_n)N^{\sigma}\delta(x-x_j)\Big\}\cdot$$

$$\exp[\text{i}\int\text{d}^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}}+J\varphi+K\pi)]=0 \tag{5-10-34}$$

在式(5-10-34)中令外源 $J=K=0$，有

$$\langle 0 \mid T^{*}\{\partial_{\mu}[W^{\mu\sigma}-(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]-\mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+R^{\sigma}+J_{0}^{\sigma}\}\varphi(x_{1})\varphi(x_{2})\cdots\varphi(x_{n}) \mid 0\rangle = \mathrm{i}\sum_{j}\langle 0 \mid T^{*}[\varphi(x_{1})\varphi(x_{2})\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_{n})N^{\sigma}] \mid 0\rangle\delta(x-x_{j}) \tag{5-10-35}$$

这里 T^{*} 是一种特定的编时乘积，T^{*} 有编时意义，且有

$$\langle 0 \mid T^{*}[\partial_{\mu}\varphi(x_{1})\cdots\varphi(x_{n})] \mid 0\rangle = \partial_{\mu}\langle 0 \mid T[\varphi(x_{1})\cdots\varphi(x_{n})] \mid 0\rangle$$

T 是通常的编时乘积，固定 t，并让

$$t_{1},t_{2},\cdots,t_{m}\rightarrow+\infty;\quad t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_{n}\rightarrow-\infty$$

注意到$\langle 0 \mid \varphi(\infty,\ \boldsymbol{x})=\text{out} \mid$，$\varphi(-\infty,\ \boldsymbol{x}) \mid 0\rangle = \mid \text{in}\rangle$利用约化公式[39]，式(5-10-35)可写为

$$\langle \text{out},m \mid \{\partial_{\mu}[W^{\mu\sigma}-(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]-\mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+R^{\sigma}+J_{0}^{\sigma}\} \mid n-m,\text{in}\rangle = 0 \tag{5-10-36}$$

因为 m 和 n 是任意的，所以

$$\partial_{\mu}[W^{\mu\sigma}-(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}]-\mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]+R^{\sigma}+J_{0}^{\sigma}=0 \tag{5-10-37}$$

由式(5-10-37)可以看出，当有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{P}}$ 在式(5-10-21)的整体变换下的改变如式(5-10-26)所示，定域变换式(5-10-27)的 Jacobi 行列式不为 1 时，就得到了场论中附加约束奇异 Lagrange 量系统量子水平的变换性质式(5-10-37)．在三维空间中积分式(5-10-37)，假定场在区域的边界处很快趋于零，利用 Gauss 定理，得

$$\mathrm{D}\int_{V}\mathrm{d}^{3}x[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}-W^{0\sigma}] = \int_{V}\mathrm{d}^{3}x(R^{\sigma}+J_{0}^{\sigma}) \tag{5-10-38}$$

于是得到如下定理：如果相空间的有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{P}}$ 在式(5-10-21)的整体变换下仅改变一个四维散度项，即 $R^{\sigma}=0$，又式(5-10-27)变换的 Jacobi 行列式与 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ 无关，即 $J_{0}^{\sigma}=0$，那么，场论中附加约束奇异 Lagrange 量系统在相空间中有量子水平的守恒量，即

$$Q^{\sigma}=\int_{V}\mathrm{d}^{3}x[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}-W^{0\sigma}]\qquad \sigma=(1,2,\cdots,r) \tag{5-10-39}$$

其中 $\mathscr{H}_{\text{eff}}$ 包括量子化前各场量以及量子化后可能出现的鬼场和乘子场(特别是与附加约束联系的乘子场)，这与经典理论结果不同．从式(5-10-38)还知道，

一般情形下，场论中有附加约束奇异 Lagrange 量系统其有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}$ 在式(5-10-21)的整体变换下不变($R^{\sigma}=0$)，也得不到该系统量子水平的守恒律，因为路径积分(泛函积分)的测度在式(5-10-27)的定域变换下可能发生了改变. 因此，当有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}$ 在式(5-10-21)的整体变换下改变，定域变换式(5-10-27)的 Jacobi 行列式不为 1 时，可以用式(5-10-37)讨论场论中附加约束奇异 Lagrange 量系统量子水平的变换性质.

以下将给出附加约束奇异 Lagrange 量系统量子理论的若干应用，在量子水平下，研究含 CS 项与场耦合的分数自旋性质.

5-11 含 Hopf 项和 Maxwell-Chern-Simons(MCS)项 O(3)非线性 σ-模型的分数自旋

非线性 σ- 模型原是粒子物理中一个低能有效理论. 标量场 $\boldsymbol{n}$ 是 N 维内部空间的单位矢量，满足 O(N) 对称，即在 N 维空间中沿任何一轴转动都保持不变，该模型的 Lagrange 量密度为 $\mathscr{L}=\frac{1}{2f}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2$ ，$\boldsymbol{n}$ 满足 $\boldsymbol{n}^2=1$. 下面讨论 O(3) 非线性 σ-模型，它是用来描述 O(3) 整体对称自发破缺的物理系统. 在凝聚态物理和高能物理领域，是应用广泛的场论模型. 自人们发现在(2+1)维时空中粒子可能具有分数自旋的性质(任意子)以来[47]，含 CS 项的 O(3) 非线性 σ-模型就受到人们的广泛关注. 任意子在解释分数量子 Hall 效应乃至高温超导中有重要应用[48]. 含 Hopf 项和 CS 项的 O(3)非线性 σ-模型在经典和量子水平下都给出了分数自旋和分数统计的性质[40]. 含有 Maxwell 项的拓扑 U(1) 规范场非线性 σ-模型也具有分数自旋和分数统计的结果[37]，但文中的研究是半经典的并且是近似的. 关于任意子的角动量的讨论，通常是从能量-动量张量构造角动量或从经典的 Noether 定理导出的，其结果在量子水平下是否有效还值得仔细研究. 本节将对含 Hopf 项和 Abel CS 项的(2+1)维 O(3) 非线性 σ-模型采用 FS 路径积分量子化方法，对该系统进行量子化，讨论其量子对称性，由量子 Noether 定理给出量子守恒角动量，并严格地在量子水平下说明了文献[37]中的模型仍具有分数自旋和分数统计性质.

5-11-1 O(3)非线性 σ-模型的 FS 路径积分量子化

含有 Hopf 项和 Abel CS 项 $O(3)$ 非线性 σ-模型的 Lagrange 量密度为[37]

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A^{\mu}\partial^{\nu}A^{\lambda}-A_{\mu}J^{\mu}+\frac{1}{2f}(\partial_\mu n^a)^2 \quad (5\text{-}11\text{-}1)$$

式中：κ,f 为参量（f 可取为 1）；$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$；$n^a$ 为标量场．拓扑守恒流为

$$J^\mu=\frac{1}{8\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\varepsilon_{abc}n_a\,\partial_\nu n_b\,\partial_\lambda n_c \tag{5-11-2}$$

$$\partial_\mu J^\mu=0 \tag{5-11-3}$$

该系统有附加约束 $(n^a)^2=1\ (a=1,2,3)$，即

$$G_w=(n^a)^2-1\approx 0 \tag{5-11-4}$$

如果式(5-11-1)所示 Lagrange 量密度中不含 Maxwell 项时，A_μ 代表非动力学场，它在适当的规范下可被完全消除[48]，但在 Lagrange 量里面加入一个 Maxwell 动力学项，它就变成一个动力学场．

与场量 n^a 和 A_μ 相对应的正则动量为

$$\pi^a=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{n}^a}=\dot{n}^a-\frac{1}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_i\varepsilon^{abc}n^b\,\partial_j n^c \tag{5-11-5}$$

$$\pi_0=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^0}=0 \tag{5-11-6}$$

$$\pi_i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^i}=F_{i0}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^j \tag{5-11-7}$$

式中：$\varepsilon^{ij}=\varepsilon^{0ij}$．初级约束为

$$\Lambda_1=\pi_0\approx 0 \tag{5-11-8}$$

其中，符号“$\approx$”表示 Dirac 意义上的弱等．该系统的正则 Hamilton 量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c&=\pi_\mu\dot{A}^\mu+\pi^a\dot{n}^a-\mathscr{L}=\\&\mathscr{H}_0-A_0\left[\left(\partial_i\pi^i+\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j\right)-J^0\right]\end{aligned} \tag{5-11-9}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_0=&-\frac{1}{2}\pi^i\pi_i+\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\pi_i A_j-\frac{\kappa^2}{(4\pi)^2}A^iA_i+\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}+\frac{1}{2}(\pi^a)^2-\\&\frac{1}{32\pi^2}(\varepsilon^{ij}A_j\varepsilon^{abc}n^b\,\partial_j n^c)^2-\frac{1}{2}(\partial_i n^a)^2+\\&\frac{1}{4\pi}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{abc}A_i n^a\,\partial_j n^b\left(\pi^c+\frac{1}{4\pi}\varepsilon^{lm}\varepsilon^{cde}A_l n^d\,\partial_m n^e\right)\end{aligned} \tag{5-11-10}$$

J^0 由式(5-11-2)给出，系统修改的总 Hamilton 量

$$H'_{\mathrm{T}}=\int \mathrm{d}^2x(\mathscr{H}_c+\lambda_1\Lambda_1+\lambda G_w) \tag{5-11-11}$$

由初级约束 $\Lambda_1\approx 0$ 的自洽性条件，

$$\{\Lambda_1,H'_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{5-11-12}$$

给出次级约束

$$\Lambda_2 = (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j) - J_0 \approx 0 \tag{5-11-13}$$

将 $G_w \approx 0$ 记为

$$\theta_1 = (n^a)^2 - 1 \approx 0 \tag{5-11-14}$$

并将 $\theta_1 \approx 0$ 视为初级约束，由它的自洽性条件 $\{\theta_1, H'_{\mathrm{T}}\} \approx 0$ 给出次级约束

$$\theta_2 = n^a \pi^a \approx 0 \tag{5-11-15}$$

次级约束的自洽性条件不再产生新的约束. 不难验证，所有约束彼此相容. Λ_1 和 Λ_2 为第一类约束，θ_1 和 θ_2 为第二类约束. 按约束系统的FS路径积分量子化方法，对每一个第一类约束需选取一个相应的规范条件. 考虑库仑规范 $\Omega_1 = \partial_i A_i \approx 0$，由其自洽性要求 $\partial_i \dot{A}_i = \{\Omega_1, H'_{\mathrm{T}}\} \approx 0$，给出相应的规范约束为

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 - \partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \tag{5-11-16}$$

按 FS 量子化方案，相空间 Green 函数的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[J^a, K_a] = \int & \mathscr{D}\varphi^a \mathscr{D}\pi_a \prod_{a,b=1}^{2} \delta(\Lambda_a)\delta(\Omega_b) \cdot \\ & \prod_{l=1}^{2} \delta(\theta_l) \det|\{\Lambda_a, \Omega_b\}| (\det|\{\theta_j, \theta_k\}|)^{1/2} \cdot \\ & \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\pi_a \dot{\varphi}^a - \mathscr{H}_c + J_a \varphi^a + K^a \pi_a)\} \end{aligned} \tag{5-11-17}$$

式中：$\mathscr{H}_c$ 是与 $\mathscr{L}$ 相应的正则 Hamilton 量密度. $\varphi^a = (A_i, n_i)$，$\pi_a = (\pi^a, \pi_0, \pi_i)$. 不难看出，$\det|\{\Lambda_a, \Omega_b\}|$ 与场量无关，可以从生成泛函中略去. 又对乘子场 $\lambda_m = (\lambda_a, \lambda_b, \lambda_l)$ 和鬼场 $\overline{C}_k$ 与 C_k 分别引入相应的外源 J_f, ξ 和 $\bar{\xi}$，记 $\varphi^a = (\varphi^a, \lambda_m, \overline{C}_a, C_b)$，$J_a = (J_a, J_f, \xi, \bar{\xi})$，通过对 $\det|\{\theta_j, \theta_k\}|$ 的计算，利用 δ- 函数和 Grassmann 变量积分的性质，可得相空间中 Green 函数的生成泛函[34]

$$\begin{aligned} Z[J^a, K_a] = \int & \mathscr{D}\varphi^a \mathscr{D}\pi_a \mathscr{D}\lambda_m \mathscr{D}\overline{C}_a \mathscr{D}C_b \cdot \\ & \exp\{\mathrm{i}[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + \int \mathrm{d}^4 x (J_a \varphi^a + K^a \pi_a)]\} \end{aligned} \tag{5-11-18}$$

式中：$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 为有效正则作用量，且

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}^{\mathrm{p}} + \mathscr{L}_{\mathrm{m}} + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}})$$

由式(5-10-12)和式(5-10-13)可得

$$\mathscr{L}_{\mathrm{m}} = \lambda_a \Lambda_a + \lambda_b \Omega^b + \lambda_l \theta^l \tag{5-11-19}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} = 4\overline{C}(x)(n^a(x))^4 C(x) \tag{5-11-20}$$

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_{\text{m}} + \mathscr{L}_{\text{gh}} =$$

$$\pi_a \dot{n}^a + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{H}_c + \mathscr{L}_{\text{m}} + \mathscr{L}_{\text{gh}} \qquad (5\text{-}11\text{-}21)$$

式(5-11-21)中的 $\mathscr{L}^{\text{p}}$ 是 $\mathscr{L}$ 相应的相空间 Lagrange 量密度．对有限附加约束奇异系统也可按下述方式作量子化．关于附加约束式(5-11-4)引入约束乘子 λ^w，可有 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \lambda^w G_w$ 由 $\mathscr{L}^*$ 出发求出所有约束，再按 FS 方案进行量子化．

5-11-2　分数自旋

如果在整体变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\pi) \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma \xi^\sigma(x,\varphi,\pi) \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma \eta^\sigma(x,\varphi,\pi) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}11\text{-}22)$$

下，有效作用量 $I_{\text{eff}}^{\text{p}} = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 不变，且 5-10 节式(5-10-38)中的 $R^\sigma = 0$，$W^{0\sigma} = 0$．其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,r)$ 是无穷小参数，$\tau^{\mu\sigma}, \xi^\sigma, \eta^\sigma$ 为时间和正则变量的给定函数，且变换的 Jacobi 行列式为 1，即 $J_0^\sigma = 0$，那么由式(5-10-39)此附加约束奇异 Lagrange 量系统存在量子水平的守恒律量，即

$$Q^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3 x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - H_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}] = \text{const}$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,r) \qquad (5\text{-}11\text{-}23)$$

在空间转动下，有效正则作用量不变，且场变换的 Jacobi 行列式为 1，又 $\mathscr{L}_{\text{gh}}$ 不含场的微商，对正则动量无贡献．在(x_1, x_2)平面内的转动下，由式(5-11-23)可得量子守恒角动量

$$L = \int \mathrm{d}^2 x \{\varepsilon^{ij}[(x_i \pi_a \,\partial_j n^a + x_i \pi^\mu \,\partial_j A_\mu)] + \pi_\mu S_{12}^{\mu\nu} A_\nu\} \qquad (5\text{-}11\text{-}24)$$

式中：$S_{ij}^{kl} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l$．将式(5-11-5)～式(5-11-7)代入式(5-11-24)，并利用关系式 $\varepsilon^{jk}\varepsilon_{il} = \delta_i^j \delta_l^k - \delta_l^j \delta_i^k$ [49]，可得

$$L = \int \mathrm{d}^2 x \varepsilon^{ij} x_i (\pi_a \,\partial_j n^a + F_{k0} \,\partial_j A_k) +$$

$$\int \mathrm{d}^2 x F_{k0} S_{12}^{kl} A_l - \frac{\kappa}{4\pi} \int \mathrm{d}^2 x [\varepsilon^{ij} x_i A_j (\varepsilon^{lk} \,\partial_l A_k)] \qquad (5\text{-}11\text{-}25)$$

由式(5-11-1)可知矢量场 A_μ 的 EL 方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{\nu\mu\lambda} \,\partial_\mu A_\lambda = J^\nu \qquad (5\text{-}11\text{-}26)$$

在式(5-11-26)中让 $\nu = 0$，并利用式(5-11-7)，有

$$\partial^i \pi_i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \,\partial_i A_j = J^0 \qquad (5\text{-}11\text{-}27)$$

由式(5-11-27)可得

$$A_i(x)=\frac{2\pi}{\kappa}\varepsilon_{ij}\,\partial_x^j\int d^2yG(x,y)J^0(y) \tag{5-11-28}$$

式中

$$G(x-y)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|+\text{const}$$

由式(5-11-25)和式(5-11-28)得

$$L=\int d^2x\varepsilon^{ij}x_i(\pi_a\,\partial_jn^a+F_{k0}\,\partial_jA_k)+\int d^2xF_{k0}S_{12}^{kl}A_l+\frac{Q^2}{2\kappa} \tag{5-11-29}$$

其中，$Q=\int d^2xJ^0$. 式(5-11-29)右边第一积分项为场 n^a 和场 A_μ 提供的轨道角动量；第二项为通常的自旋角动量，它与 A_μ 场的 Maxwell 项有关；最后一项为附加项(反常项)，该项为分数自旋项.

微观粒子的自旋和它的统计性质密切相关，自旋为整数和自旋为半奇数的粒子分别服从 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计，并称它们为 Bose 子和 Fermi 子. 长期以来，人们一直认为自然界只有这两种统计性质的粒子，但在 2 维空间中，粒子的统计性质可介于 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计之间连续变化，即在 2 维空间中可有带任意统计性质的粒子，称为任意子(Anyon). 根据自旋和统计的关系，通常说任意子具有分数自旋.

记式(5-11-29)附加项为 S(自旋算符)，$S=\frac{Q^2}{2\kappa}$，一个单位荷的单粒子态(任意子态)记为 $|1\rangle_{\text{any}}$. 单粒子态用 S 作用，可得到

$$e^{i\theta S}\,|1\rangle_{\text{any}}=e^{i\theta(\frac{1}{2\kappa})}\,|1\rangle_{\text{any}}$$

这里 θ 为任意转动参数. 自旋算符 S 的本征值记为 s，可得到自旋算符 S 的本征值 s 同 CS 项系数的关系，即

$$s=\frac{1}{2\kappa}$$

如果取 θ 为 2π，$\kappa=\frac{1}{2n+1}(n\in\mathbf{Z})$，这些 κ 的取值使得转动后单粒子态为负值，说明该粒子为 Fermi 子，此时自旋算符 S 的本征值 s 为半奇数；当 $\kappa=\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{Z})$，$\kappa$ 的取值使得转动后单粒子态不变，说明该粒子为 Bose 子，此时自旋算符 S 的本征值 s 为整数. 对于 κ 的其他取值使得转动后单粒子态为任意子态，自旋算符 S 的本征值 s 为任意值，即任意子具有分数自旋.

可见，对于含 Hopf 项和 CS 项的 O(3)非线性 σ-模型，在量子水平上仍具有分数自旋的性质. 文献[37]从半经典和近似情况分析了此模型的分数自

旋的性质，角动量可以取任意值，其大小取决于 CS 项前面的系数 κ. 本节在量子水平下严格导出了该结果. 如果在 Lagrange 量密度表述式(5-11-3)中缺少 Maxwell 动力学项，可以得到相同的分数自旋项，但在此情形下，系统的总角动量就会缺少了通常的自旋项，即式(5-11-29)的第二个积分项.

本节中系统的经典运动可由 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \lambda^w G_w$ 来描述，从约束乘子场 λ^w 的正则动量 $\pi_{\lambda_w} \approx 0$ 的自洽性条件，导致次级约束 $\theta_1 = G_w \approx 0$，此时附加约束 $G_w \approx 0$ 是 $\mathscr{L}^*$ 描述的次级约束. 此外也可将附加约束 $G_w \approx 0$ 作为初级约束来处理[34]，由 $\mathscr{L}$ 导致的其他约束与 $\mathscr{L}^*$ 求出的其他约束结果相同，约束分类(第一类和第二类)也无变化. 可见，对 $(n^a)^2 = 1$ 的 2 种处理方式导致的结果是等价的.

对附加约束 $G_w \approx 0$ 含场量的时间微商(关于 $\varphi_{,\mu}$线性)的情形，把附加约束 $G_w \approx 0$ 作为初级约束处理时，是假定该约束奇异系统可正则化，即如果附加约束 G_w 中场量的时间微商能够通过 Legendre 变换表达式，结合 $G_w \approx 0$，可消去 G_w 中场量的时间微商，直接成为相空间的约束，如果此相空间的附加约束与奇异系统的内在约束相容，对该可正则化的约束奇异系统，由系统的正则方程和约束的稳定性条件用修改的 Dirac-Bergmann 算法求出所有约束，然后对约束进行分类，此时，可考虑用 FS 量子化方法作量子化. 例如，电磁场在介质分界面附近，其边界条件用 A_μ 表出的 $G_w = G_w(A^a_{,\mu}) \approx 0$ 为 A_μ 的一阶线性约束[23-24]，由正则动量的定义式，可将其化为相空间的约束并与电磁场的内在约束相容. 按修改的 Dirac-Bergmann 算法求出其各次级约束，然后将约束分类，研究其量子化.

5-12 含 Maxwell-Chern-Simons(MCS)项(2+1)维 CP^1 非线性 σ-模型的分数自旋

(2+1)维非线性 σ-模型在凝聚态物理方面得到广泛的应用，该模型具有分数自旋和分数统计性质，CP^1 非线性 σ-模型也具有分数自旋和分数统计性质[50]，但该模型的分数自旋和分数统计特性在量子水平上有待作出讨论. 本节，对含 CS 项(2+1)维 CP^1 非线性 σ-模型用 FS 路径积分量子化方法进行量子化，并讨论了该模型的量子对称性及分数自旋和分数统计性质.

含 CS 项 CP^1 非线性 σ-模型的 Lagrange 量为[50]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{f}(\mathrm{D}_\mu Z_k)^*(\mathrm{D}^\mu Z_k) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu \partial^\nu A^\lambda \qquad (5\text{-}12\text{-}1)$$

其中 f 是耦合常数，此处设为 1，$Z_k(k=1, 2)$是复标量场并满足下列附加约束条件

$$Z_k Z_k^* = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1 \qquad (5\text{-}12\text{-}2)$$

协变微商 $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. 这里 A_μ 是 CS 规范场. 对应场量 Z_k，Z_k^* 和 A_μ 的正则动量分别为

$$\pi_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Z}_k} = (D_0 Z_k)^* \tag{5-12-3a}$$

$$\boldsymbol{\pi}_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Z}_k^*} = (D_0 Z_k) \tag{5-12-3b}$$

$$\pi^i = F^{0i} + \frac{\kappa}{4\pi}\epsilon^{ij}A_j \tag{5-12-3c}$$

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \tag{5-12-3d}$$

初级约束为

$$\Lambda^0 = \pi^0 \approx 0 \tag{5-12-4}$$

$$\theta^0 = Z_k Z_k^* - 1 \approx 0 \tag{5-12-5}$$

式中，符号“≈”表示 Dirac 意义下的弱等，即表示在约束超曲面上相等. 正则 Hamilton 量为

$$\mathscr{H}_c = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi^k \dot{Z}_k + \boldsymbol{\pi}^k \dot{Z}_k^* - \mathscr{L} =$$

$$\mathscr{H}_0 + A_0\left[J^0 - \left(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j\right)\right] \tag{5-12-6}$$

式中

$$\mathscr{H}_0 = \pi^k \boldsymbol{\pi}^k - \frac{1}{2}\pi^i \pi^i - (D_i Z_k)^*(D^i Z_k) +$$

$$\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{\kappa^2}{8\pi^2}A^i A_i + \frac{\kappa}{2\pi}\epsilon_{ij}\pi^i A^j \tag{5-12-7}$$

$$J_0 = i[Z_k \pi_k - Z_k^* \boldsymbol{\pi}_k] \tag{5-12-8}$$

修改的总 Hamilton 量为

$$H'_T = \int d^2x(\mathscr{H}_c + \lambda_0 \Lambda^0 + \mu_0 \theta^0) \tag{5-12-9}$$

其中 λ_0 和 μ_0 为约束乘子. 由初级约束自洽性条件 $\{\Lambda^0, H'_T\} \approx 0$ 和 $\{\theta^0, H'_T\} \approx 0$ 分别给出次级约束

$$\Lambda^1 = J_0 - \left(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j\right) \approx 0 \tag{5-12-10}$$

$$\theta^1 = \pi^k Z_k + \boldsymbol{\pi}^k Z_k^* \approx 0 \tag{5-12-11}$$

次级约束自洽性不再产生新的约束. 不难验证，(Λ^0, Λ^1) 是第一类约束，(θ^0, θ^1) 是第二类约束. 采用 FS 路径积分量子化方法，对每一个第一类约束需选取一个规范条件. 考虑库仑规范条件：

$$\Omega_0 = \partial_i A_i \approx 0 \tag{5-12-12}$$

由 Ω_0 的自洽性 $\partial_i \dot{A}_i \approx \{\Omega_0, H_T\} \approx 0$，可以给出另外一个规范条件，有

$$\Omega_1 = \nabla^2 A_0 - \partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \tag{5-12-13}$$

对动量也引入外源相空间的 Green 函数生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[\overline{J}^k, J^k, J^\mu, \overline{K}_k, K_k, K_\mu] = & \int \mathscr{D}Z_k \mathscr{D}Z_k^* \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\pi^k \mathscr{D}\pi^k \mathscr{D}\pi^\mu \cdot \\ & \delta(\Lambda)\delta(\Omega)\delta(\theta)\det|\{\Lambda^l, \Omega_m\}|[\det|\{\theta_i, \theta_j\}|]^{\frac{1}{2}} \cdot \\ & \exp\{i\int d^3x(L^p + \overline{J}^k Z_k + J^k Z_k + J^\mu A_\mu + \\ & \overline{K}_k \pi^k + K_k \pi^k + K_\mu \pi^\mu)\} \end{aligned} \tag{5-12-14}$$

式中因子 $\det|\{\Lambda^k, \Omega_l\}|$ 不依赖于场变量，将其从生成泛函中省略. 通过对 $\det|\{\theta_i, \theta_j\}|$ 的计算，根据 Grassman 变量的积分和 δ-函数性质式(5-12-14)可以写为

$$Z[J, K] = \int \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\pi \exp\{i\int d^3x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^p + J\varphi + K\pi)\} \tag{5-12-15}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^p = \mathscr{L}^p + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{gh} \tag{5-12-16}$$

$$\mathscr{L}^p = \pi_k \dot{Z}_k + \pi_k \dot{Z}_k^* + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{H}_c \tag{5-12-17}$$

$$\mathscr{L}_m = \lambda_l \Lambda_l + \lambda_n \Omega_n + \mu_i \theta_i \tag{5-12-18}$$

$$\mathscr{L}_{gh} = 4\overline{C}(x)\,(Z_k(x) Z_k^*(x))^2 C(x) \tag{5-12-19}$$

且

$$J = (\overline{J}^k, J^k, J^\mu), K = (\overline{K}_k, K_k, K_\mu),$$
$$\varphi = (Z_k, Z_k^*, A_\mu),\ \pi = (\pi^k, \pi^k, \pi^\mu)$$

$(\overline{J}^k, J^k, J^\mu, \overline{K}_k, K_k, K_\mu)$ 是场量 $(Z_k, Z_k^*, A_\mu, \pi^k, \pi^k, \pi^\mu)$ 引入的外源.

在 (x_1, x_2) 平面内旋转变换下，$\mathscr{L}_{gh}$ 中不含场的微商，对正则动量无贡献，由式(5-11-23)可得该系统的量子守恒量，即

$$\begin{aligned} L = \int d^2x\{ & \varepsilon^{ij}[x_i \pi^k \partial_j Z_k + x_i \pi^k \partial_j Z_k^* + x_i \pi^\mu \partial_j A_\mu] + \\ & \pi_\mu S_{12}^{\mu\nu} A_\nu\} \end{aligned} \tag{5-12-20}$$

其中 $S_{ij}^{\mu\nu} = \delta_i^\mu \delta_j^\nu - \delta_j^\nu \delta_i^\mu$. 将(5-12-3)式代入(5-12-20)式，得

$$\begin{aligned} L = & \int d^2x \varepsilon^{ij}(x_i \pi_k \partial_j Z_k + x_i \pi_k \partial_j Z_k^* - x_i F_{0k} \partial_i A^k) \\ & \int d^2x F_{0i'} S_{12}^{i'j'} A_{j'} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\int d^2x x_i A_j \varepsilon^{kl}\partial_k A_l \end{aligned} \tag{5-12-21}$$

在约束曲面上由 $\Omega_1 \approx 0$，有

$$\partial_i \pi^i = \nabla^2 A_0 + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j \tag{5-12-22}$$

利用式(5-12-10)由 Gauss 积分定理，式(5-12-21)右边第三项可表示为

$$\frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2 x \varepsilon^{ij} x_i A_j \varepsilon^{kl}\,\partial_k A_l = \frac{1}{2\kappa}Q^2 \tag{5-12-23}$$

其中 $Q = \int \mathrm{d}^2 x J_0$. 式(5-12-21)右边第一项是轨道角动量，第二项是通常的自旋角动量，第三项是附加项，可理解为自旋算符给出系统的分数自旋性质. 其结果说明，在含有 MCS 项的 CP^1 非线性 σ-模型在量子水平下仍然具有和不含有 Maxwell 项也具有的分数自旋和分数统计特性[50].

5-13 非 Abel Chern-Simons(CS)理论中量子水平的分数自旋性质

含 Abel CS 理论中众多模型在量子水平下呈现分数自旋和分数统计的性质. 近年来一些作者在经典水平下讨论了非 Abel CS 理论的经典角动量，在经典水平上研究了非 Abel CS 理论中呈现的分数自旋性质，不能简单地认为经典理论中的结论在量子理论中仍保持有效. 这里对含非 Abel CS 项的(2+1)维 O(3)非线性 σ-模型在量子水平下的分数自旋性质进行研究[36].

(2+1)维 O(3)非线性 σ-模型与非 Abel CS 规范场耦合的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2f}\mathrm{D}_\mu n^a \mathrm{D}^\mu n^a + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(\partial_\mu A_\nu^a A_\lambda^a + \frac{1}{3}\varepsilon^{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c\right) \tag{5-13-1}$$

式中：f 为耦合常数(取为 1)；$\mathrm{D}_\mu n^a = \partial_\mu n^a + \varepsilon^{abc}A_\mu^b n^c$；$(n^a)^2 = 1$. 与场量 n^a 和 A_μ 相对应的正则动量分别为

$$\pi^a = \mathrm{D}_0 n^a,\quad \pi_0^a = 0,\quad \pi_i^a = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{ij}A^{aj} \tag{5-13-2}$$

式中：$\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{0ij}$. 包括附加约束在内的初级约束分别为

$$\Lambda_1^a = \pi_0^a \approx 0 \tag{5-13-3a}$$

$$\theta_1^a = \pi_1^a - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{1j}A_j^a \approx 0 \tag{5-13-3b}$$

$$\theta_2^a = \pi_2^a - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{2j}A_j^a \approx 0 \tag{5-13-3c}$$

$$\theta_3^a = (n^a)^2 - 1 \approx 0 \tag{5-13-3d}$$

式中：符号“$\approx$”表示 Dirac 意义上的弱等. 该系统的正则 Hamilton 量密度

$$\mathscr{H}_c = \pi_\mu \dot{A}^\mu + \pi^a \dot{n}^a - \mathscr{L} =$$

$$(\pi^a)^2 - \mathrm{D}_i n^a \mathrm{D}^i n^a - A_0^a\left[\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}F_{ij}^a + J^{0a}\right] \tag{5-13-4}$$

其中

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + \varepsilon^{abc}A_i^b A_j^c \tag{5-13-5}$$

$$J^{0a} = i\pi^b \varepsilon^{abc} n^c \tag{5-13-6}$$

该系统的总 Hamilton 量为

$$H'_{\mathrm{T}} = \int \mathrm{d}^2 x(\mathscr{H}_c + \lambda_1^a \Lambda_1^a + \mu_1^a \theta_1^a + \mu_2^a \theta_2^a + \mu_3^a \theta_3^a) \tag{5-13-7}$$

由初级约束的自洽性条件 $\{\Lambda_1^a, H'_{\mathrm{T}}\} \approx 0$ 和 $\{\theta_3^a, H'_{\mathrm{T}}\} \approx 0$ 分别给出次级约束

$$\Lambda_2^{a'} = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}F_{ij}^a + J_0^a \approx 0, \quad \theta_4^a = n^a \pi^a \approx 0 \tag{5-13-8a}$$

次级约束的自洽性条件不再产生新的约束. 作约束的线性组合，并记

$$\Lambda_2^a = (\mathrm{D}_i \pi^i)^a + J_0^a + \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j^a \approx 0 \tag{5-13-8b}$$

不难验证，Λ_1^a 和 Λ_2^a 为第一类约束，θ_1^a，θ_2^a，θ_3^a 和 θ_4^a 为第二类约束. 按约束系统的 FS 路径积分量子化方法，对每一个第一类约束需选取一个相应的规范条件. 考虑 Coulomb 规范 $\Omega_1^a = \partial_i A_i^a \approx 0$，由自洽性要求 $\partial_i \dot{A}_i^a = \{\Omega_0^a, H_T\} \approx 0$，给出另一规范约束为

$$\Omega_2^a = \nabla^2 A_0^a + \partial^i \pi_i^a - \varepsilon^{abc}A_i^b\,\partial^i A_0^c \approx 0 \tag{5-13-9}$$

按 FS 量子化方案，相空间 Green 函数的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[J,K] = \int & \mathscr{D}\varphi_a^a \mathscr{D}\pi_a^a \prod_{a,i} \delta(\Lambda^a)\delta(\Omega^a)\delta(\theta_i^a)\det|\{\Lambda^a,\Omega^b\}| \cdot \\ & (\det|\{\theta_i^a,\theta_j^a\}|)^{1/2} \cdot \\ & \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x(\pi_a^a \dot{\varphi}_a^a - \mathscr{H}_c + J_a^a \varphi_a^a + K_a^a \pi_a^a)\right\} \end{aligned} \tag{5-13-10}$$

式中：$\varphi_a^a = (A_\mu^a, n^a)$，$\pi_a^a = (\pi_a^\mu, \pi_a)$，因子 $\det|\{\theta_i^a,\theta_j^a\}| = 4\,(n^a(x))^4$，而

$$\det|\{\Lambda^a,\Omega^b\}| = \det M^{ab}\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

其中

$$M^{ac} = (\delta^{ac}\,\nabla^2 - \varepsilon^{abc}A_i^b\,\partial^i)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{5-13-11}$$

因子 $\det|\{\Lambda^a,\Omega^b\}|\delta(\partial^i A_i^a)$ 可用因子来代替 $\det \boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}\delta(\partial^\mu A_\mu^a)$，

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}} = (\delta_b^a\,\partial^\mu\,\partial_\mu + f_{bc}^a A_\mu^c\,\partial^\mu)\delta(x-y)$$

利用 δ-函数和 Grassmann 变量积分的性质，可得相空间中 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J_a^a, K_a^a, \bar{\xi}_a, \xi_a, U_a^l, V_a^n, W_a^i] = \int \mathscr{D}\varphi_a^a \mathscr{D}\pi_a^a \mathscr{D}\bar{C}^a \mathscr{D}C^a \mathscr{D}\lambda_l^a \mathscr{D}\mu_n^a \mathscr{D}w_i^a \cdot$$

$$\exp\left\{ i\int d^3x(\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} + J_a^a\varphi_a^a + K_a^a\pi_a^a + \bar{\xi}_a C^a + \right.$$

$$\left. \overline{C}^a\xi_a + U_a^l\lambda_l^a + V_a^n\mu_n^a + W_a^i\omega_i^a) \right\} \tag{5-13-12}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}} = \mathscr{L}^{\text{p}} + \mathscr{L}_{\text{m}} + \mathscr{L}_{\text{gh}} \tag{5-13-13}$$

$$\mathscr{L}^{\text{p}} = \pi_a\dot{n}^a + \pi^\mu\dot{A}_\mu + \overline{P}_a\dot{C}^a + \dot{\overline{C}}^a P_a - \mathscr{H}_c \tag{5-13-14}$$

$$\mathscr{L}_{\text{m}} = \lambda_l^a\Lambda_l^a + \mu_m^a\Omega_n^a + \omega_i^a\theta_i^a \tag{5-13-15}$$

$$\mathscr{L}_{\text{gh}} = -\partial^\mu\overline{C}^a D_{b\mu}^a C^b \tag{5-13-16}$$

λ_l,μ_n 和 ω_i 为乘子场；C^a 和 $\overline{C}^a$ 为鬼场(Grassmann 变量)；(J^a,K_a,U^l,V^n,W^i) 是分别对场 $(\varphi_a,\pi^a,\lambda_l,\mu_n,\omega_i)$ 引入的外源；(K_a,K_μ) 是分别对动量 (π^a,π^μ) 引入的外源；$\overline{P}_a$ 和 P_a 分别为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的正则动量；$\bar{\xi}_a$ 和 ξ_a 分别为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的外源.

在空间转动下，有效正则作用量不变，且场量变换的 Jacobi 行列式为 1，在 (x_1,x_2) 平面内的转动下，由式(5-11-23)可得量子守恒量，即

$$L = \int d^2x\{\varepsilon^{ij}[x_i\pi_a\partial_j n^a + x_i\pi_a^\mu\partial_j A_\mu^a + x_i\overline{P}_a\partial_j C^a +$$

$$x_i P_a\partial_j\overline{C}^a] + \pi_{a\mu}S_{12}^{\mu\nu}A_\nu^a\} \tag{5-13-17}$$

由于 $\mathscr{L}_{\text{gh}}$ 包含了场的微商项，故必须考虑鬼粒子对角动量的贡献. 将式(5-13-3)代入式(5-13-17)，可得

$$L = \int d^2x\varepsilon^{ij}x_i\pi_a\partial_j n^a + \int d^2x\pi_{a\mu}S_{12}^{\mu\nu}A_\nu^a +$$

$$\frac{\kappa}{4\pi}\int d^2x[\varepsilon^{ij}x_iA_j^a(\varepsilon^{lk}\partial_l A_k^a)] +$$

$$\int d^2x\varepsilon^{ij}[x_i\overline{P}_a\partial_j C^a + x_iP_a\partial_j\overline{C}^a] \tag{5-13-18}$$

场 A_μ^a 的 Lagrange 运动方程为

$$\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\nu\mu\lambda}(2\partial_\mu A_\lambda^a + \varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\lambda^c) = J^{a\nu} \tag{5-13-19}$$

在式(5-13-19)中让 $\nu=0$，有

$$\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}(2\partial_i A_j^a + \varepsilon^{abc}A_i^bA_j^c) = J^{a0} \tag{5-13-20}$$

容易验证[36]

$$A_i^a(x) = -\frac{Q^a}{2\kappa}\varepsilon_{ij}\frac{x^j}{x^2} \tag{5-13-21}$$

满足库仑规范 $\partial_i A_i^a = 0$ 和式(5-13-22). $Q^a = \int d^2xj^{a0}(x)$ 是非 Abel 荷. 式

(5-13-18)中的右边第三项可以写成

$$\frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2 x[\varepsilon^{ij}x_i A_j^a(\varepsilon^{lk}\partial_l A_k^a)]=$$

$$\frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2 x\,\partial_i(x_j A^{ja}A^{ia}-x^i A_j^a A^{ja}) \tag{5-13-22}$$

利用式(5-13-21)，得

$$\int \mathrm{d}^2 x\,\partial_i(x_j A^{ja}A^{ia})=0,\quad \int \mathrm{d}^2 x\,\partial_i(x^i A_j^a A^{ja})=\frac{(Q^a)^2}{2\kappa} \tag{5-13-23}$$

这样，式(5-13-18)就变成

$$L=\int \mathrm{d}^2 x\,\varepsilon^{ij}x_i\pi_a\partial_j n^a+\int \mathrm{d}^2 x\,\pi_{a\mu}S_{12}^{\mu\nu}A_\nu^a+$$

$$\int \mathrm{d}^2 x\,\varepsilon^{ij}[x_i\overline{P}_a\partial_j C^a+x_i P_a\partial_j\overline{C}^a]+\frac{(Q^a)^2}{2\kappa} \tag{5-13-24}$$

式(5-13-21)右边第一项为轨道角动量；第二项为通常的自旋角动量，它与场 A_μ 的 Maxwell 项有关；最后一项为附加项，与前面类似的分析，该项为分数自旋项．由于式(5-13-26)中右边第三个积分不含 κ，鬼场对角动量虽有贡献，但其中不含 CS 系数 κ，因而不会改变分数自旋的性质．

(2+1)维时空中含非 Abel CS 项的 O(3)非线性 σ-模型在量子水平下仍出现分数自旋的性质，其自旋角动量可取任意值，其大小取决于 CS 系数．对于与非 Abel CS 项耦合的其他模型，类似讨论也可得到量子水平下的分数自旋性质．

5-14 附加约束规范系统量子水平的 Euler-Lagrange(EL)方程

EL 方程在物理学的许多领域都有着广泛的应用，其中包括分析力学、连续介质力学、电磁场、杨-Mills 场、引力场等众多物理领域．在经典理论中，该方程可以从变分原理导出，从分析力学到连续系统，可以用来解决许多力学和物理学中的问题．本节按 FP 方法，从受附加约束的规范不变系统(由奇异 Lagrange 量描述)位形空间中的生成泛函出发，导出了该系统量子水平的 EL 方程，给出了量子电磁场在介质分界面附近的 EL 方程，并指出在位形空间描述经典电磁场运动的 Maxwell 方程组对量子化的电磁场不再适用．

考虑受附加约束场的奇异 Lagrange 量系统，描写该场的 Lagrange 量为

$$L[\varphi^a,\dot{\varphi}^a]=\int_V \mathrm{d}^3 x\,\mathscr{L}(\varphi^a,\varphi^a_{,\mu}) \tag{5-14-1}$$

设系统的运动受附加约束的限制，其约束条件为

$$G_w = (\varphi^a, \varphi^a_{,\mu}) \quad (w = 1, 2, \cdots, l) \tag{5-14-2}$$

其经典运动的 EL 方程由 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \lambda^w G_w$ 给出．假设系统的 Lagrange 量式(5-14-1)和约束式(5-14-2)均具有规范不变性，按 FP 方法，取规范条件 $f^\alpha(\varphi^a, \varphi^a_{,\mu}) = 0$，此时该系统在位形空间中 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\varphi^1 \mathscr{D}\varphi^2 \cdots \mathscr{D}\varphi^n \exp\left\{ \mathrm{i} \int_\Omega \mathrm{d}^4 x [\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + J_a \varphi^a] \right\} \tag{5-14-3}$$

式中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}^* + \mathscr{L}_{\mathrm{fix}} + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}} \tag{5-14-4}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{fix}} = -\frac{1}{2\alpha_0} [f^\alpha(\varphi^a, \varphi^a_{,\mu})]^2 \tag{5-14-5}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 y [\overline{C}_\alpha(x) M^{\alpha\beta}_{\mathrm{L}}(x, y) C_\beta(y)] \tag{5-14-6}$$

$$M^{\alpha\beta}_{\mathrm{L}}(x, y) = \frac{\delta f^\alpha(\varphi^{ag}, \varphi^{ag}_{,\mu}(x))}{\delta \varepsilon^\beta(y)} \tag{5-14-7}$$

这里，α_0 为规范参数，$\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}$ 为规范固定项；$C_\beta(y)$ 和 $\overline{C}_\alpha(x)$ 是鬼(粒子)场或虚拟场，$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 鬼场项；$M^{\alpha\beta}_{\mathrm{L}}(x, y)$ 与规范变换和规范条件的选取紧密相关.

对上述规范不变系统，其量子水平的 EL 方程可由 Green 函数的生成泛函式(5-14-3)导出．考虑场量的无穷小平移变换

$$\varphi^{a'}(x) = \varphi^a(x) + \varepsilon^a(x) \tag{5-14-8}$$

其中 $\varepsilon^a(x)$ 为无穷小任意函数，它的值及其微商在区域边界上为 0．由于在变换式(5-14-8)中，时空坐标未改变，故

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}'_{\mathrm{eff}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \left\{ \left[\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \varphi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \varphi^a_{,\mu}} \right) \right] \delta\varphi^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \varphi^a_{,\mu}} \delta\varphi^a \right) \right\}$$

由 $\varepsilon^a(x)$ 的边界条件，上式右端最后一项为 0，于是有

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}'_{\mathrm{eff}} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \varphi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \varphi^a_{,\mu}} \right) \right] \varepsilon^a(x) \tag{5-14-9}$$

将式(5-14-8)的 Jacobi 行列式记为 $\overline{J}$，积分测度的变换为

$$\mathscr{D}\varphi^{a'}(x) = \overline{J} \mathscr{D}\varphi^a(x)$$

又 $\dfrac{\delta\varphi^{a'}(x)}{\delta\varphi^\beta(y)} = \delta^a_\beta \delta(x - y)$，可见 $\overline{J} = 1$．在式(5-14-8)的变换下，Green 函数的生成泛函式(5-14-3)具有不变性，有

$$\begin{aligned} Z[J] = \int \mathscr{D}\varphi^1 \mathscr{D}\varphi^2 \cdots \mathscr{D}\varphi^n \exp\left[\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + J_a \varphi^a) \right] \cdot \\ \left\{ 1 + \mathrm{i} \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \varphi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial \varphi^a_{,\mu}} \right) + J_a \right] \varepsilon^a(x) \right\} \end{aligned} \tag{5-14-10}$$

由于 Green 函数的生成泛函在积分变量的平移变换下具有不变性，即

$$\frac{\delta Z}{\delta \varepsilon^{a}(x)} \Big|_{\varepsilon(x)=0} = 0$$

得

$$\int \mathscr{D}\varphi^{1}\mathscr{D}\varphi^{2}\cdots\mathscr{D}\varphi^{n}\left[\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^{a}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^{a}_{,\mu}}\right) + J_{a}\right]\cdot$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\int_{\Omega}\mathrm{d}^{4}x(\mathscr{L}_{\text{eff}} + J_{a}\varphi^{a})\right] = 0 \tag{5-14-11}$$

将式(5-14-11)关于 $J(x)$ 求 n 次泛函微商，仿式(5-10-30)～式(5-10-37)的论证，可得

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^{a}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^{a}_{,\mu}}\right) = 0 \tag{5-14-12}$$

式(5-14-12)即为规范不变系统(包含有规范不变附加约束情形)在位形空间量子水平的 EL 方程.

描述自由电磁场的 Lagrange 量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \tag{5-14-13}$$

电磁波在电介质分界面上反射和折射时，电磁场在分界面上规范不变的边界条件用电磁势表示为[23-24]

$$G_{w} = G_{w}(\partial^{\mu}A_{\nu}) = 0 \tag{5-14-14}$$

引入 Lagrange 乘子，则有

$$\mathscr{L}^{*} = \mathscr{L} + \lambda^{w}G_{w} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \lambda^{w}G_{w} \tag{5-14-15}$$

电磁场在分界面附近经典运动的 EL 方程可由 $\mathscr{L}^{*}$ 给出[23-24]. 对 U(1) 规范电磁场，规范变换为

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \frac{1}{g}\partial_{\mu}\varepsilon(x) \tag{5-14-16}$$

式(5-14-15)中的 $\mathscr{L}^{*}$ 具有规范不变性. 按 FP 量子化方法，取 Lorentz 规范

$$f = \partial^{\mu}A_{\mu} = 0 \tag{5-14-17}$$

因此，由式(5-14-7)算出：

$$M_{\mathrm{L}}(x,y) = -\frac{1}{g}\partial^{2}\delta^{4}(x-y)$$

$M_{\mathrm{L}}(x,y)$ 不包含场量，可以从生成泛函中略去，所以在 U(1) 规范场中无须引入鬼场. 这样，在分界面附近，在介质分界面处量子化电磁场的有效 Lagrange 量

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \lambda^{w}G_{w} - \frac{1}{2\alpha_0}(\partial^{\mu}A_{\mu})^2 \tag{5-14-18}$$

其中 α_0 为规范参数. 由式(5-14-12)可得电磁场在介质界面处的量子水平的EL方程，即

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\mu}} - \partial_{\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}} - \partial_{\nu}\left(\lambda_{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}\right) + \frac{1}{2\alpha_0}\partial_{\nu}\left[\frac{\partial(\partial^{\rho}A_{\rho})^2}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}\right] = 0 \tag{5-14-19}$$

将式(5-14-14)和式(5-14-18)代入式(5-14-19)得

$$-\partial_{\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}} - \partial_{\nu}\left(\lambda_{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}\right) + \frac{1}{\alpha_0}\partial_{\nu}A^{\nu}_{,\mu} = 0 \tag{5-14-20}$$

从式(5-14-20)可以看出，电磁场在介质界面处量子水平的EL方程比电磁场在介质界面处经典运动的EL方程多出第三项，这正是量子效应的结果.

从上面的讨论可知，规范不变系统在位形空间量子水平的EL方程由式(5-14-4)给出的有效Lagrange量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 决定，因为规范条件的引入，使决定经典运动的Lagrange量 $\mathscr{L}^{*}$ 改变为决定量子运动的有效Lagrange量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$，对介质界面附近的电磁场，后者多出了规范固定项的贡献. 众所周知，经典无源电磁场的运动方程的Maxwell方程组，它由Lagrange量 $\mathscr{L}$ 的式(5-14-13)导出，而在介质分界面处的量子化的电磁场，其量子水平的EL方程由有效Lagrange量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的式(5-14-18)导出(含规范固定项)，由它不再导出Maxwell方程组. 由电磁场的量子水平的EL方程式(5-14-20)看出，即使不在边界处(不存在附加约束)，$\lambda_{w}=0$，由式(5-14-20)也得不到Maxwell方程组. 因此，描述经典电磁场运动的Maxwell方程组对量子化的电磁场是不适用的，而描述介质分界面附近的量子化电磁场的运动方程为式(5-14-20).

5-15 规范不变附加约束系统位形空间量子水平的变换性质及应用

对规范不变系统，位形空间的量子化常用FP量子化方案，这对于研究该系统在量子水平的对称性质带来方便. 本节将用位形空间FP量子化方案，研究规范不变附加约束系统量子水平的变换性质，并给出该系统在位形空间中量子水平Noether定理的守恒量.

电磁波在介质分界面上反射和折射时电磁波的能量中心不在入射面内而发生垂直于入射面方向的横向移动，这一效应的经典理论已有解释[23-24]，在量子水平下这里将进一步讨论. 描写电磁场的Lagrange量是奇异的，电磁场在介质分界面上的边界条件可看成是一种约束[23-25]，且描写电磁场的

Lagrange 量和约束条件均是规范不变的，可以看成是规范不变系统．本节研究规范不变系统量子水平的变换性质，并将其用于 Poincaré 群变换下电磁场在介质分界面附近量子水平的变换性质，在量子水平上说明了反射和折射时能量中心的“横移”效应，同时指出文献[23-24]中的结果仅适用于经典水平，在量子理论中，必须计及量子修正．

5-15-1　规范不变系统位形空间量子水平的变换性质

考虑一个用规范不变的 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})$ 描述的系统，并且所受的附加约束 $G_w=(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})$ 也是规范不变的，用 FP 路径积分方法，对该系统进行量子化后的有效 Lagrange 量为 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$．假设该系统的有效作用量 $I_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$，在位形空间中的整体无穷小变换

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})\\ \varphi^{\alpha\prime}(x')&=\varphi^\alpha(x)+\Delta\varphi^\alpha(x)=\\ &\quad\varphi^\alpha(x)+\varepsilon_\sigma\xi^{\alpha\sigma}(x,\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})\end{aligned}\right\}\tag{5-15-1}$$

下的改变为

$$\delta I_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x(\partial_\mu W^{\mu\sigma}+R^\sigma)\tag{5-15-2}$$

式中：φ^α 代表所有场，$\varphi^\alpha=(\varphi^\alpha,\overline{C}^\alpha,C^\alpha,\lambda^w)$，$W^{\mu\sigma}$，$R^\sigma$ 是 $x,\varphi,\varphi_{,\mu}$ 的函数，而 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 由式(5-14-4)给出．为了导出该系统在式(5-15-1)下的量子水平的变换质，现考虑如下无穷小定域变换：

$$\left.\begin{aligned}x^{\mu\prime}&=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})\\ \varphi^{\alpha\prime}(x')&=\varphi^\alpha(x)+\Delta\varphi^\alpha(x)=\\ &\quad\varphi^\alpha(x)+\varepsilon_\sigma(x)\xi^{\alpha\sigma}(x,\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_{,\mu})\end{aligned}\right\}\tag{5-15-3}$$

变换式(5-15-3)的 Jacobi 行列式记为 $\overline{J}=1+J_1$（J_1 为小量），$\varepsilon_\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们及其各级微商在区域的边界上为 0。在式(5-15-3)变换下，有效作用量的改变为[1]

$$\begin{aligned}\Delta I_{\mathrm{eff}}=&\int \mathrm{d}^4x\,\varepsilon_\sigma(x)\Big\{\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi^\alpha}(\xi^{\alpha\sigma}-\varphi^\alpha_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\\ &\partial_\mu\Big[\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}(\xi^{\alpha\sigma}-\varphi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}\Big]\Big\}+\\ &\int \mathrm{d}^4x\Big[\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi^\alpha_{,\mu}}(\xi^{\alpha\sigma}-\varphi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma})+\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\tau^{\mu\sigma}\Big]\partial_\mu\varepsilon_\sigma(x)\end{aligned}\tag{5-15-4}$$

由于假设有效作用量 I_{eff} 在式(5-15-1)的变换下的改变为式(5-15-2)，故式(5-15-4)中的第一个积分可由式(5-15-2)给出．分部积分后，根据 $\varepsilon_\sigma(x)(\sigma=$

$1,2,\cdots,r$) 的边界条件，式(5-15-4)又可写为

$$\Delta I_{\text{eff}} = \int \mathrm{d}^4 x\, \varepsilon_\sigma(x) \Big\{ \partial_\mu W^{\mu\sigma} + R^\sigma - \partial_\mu \Big[\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^\alpha_{,\mu}} (\xi^{\alpha\sigma} - \varphi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma}) + \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} \Big] \Big\} \tag{5-15-5}$$

由于式(5-14-3)给出的生成泛函在式(5-15-3)变换下的不变性，就有

$$Z[J] = \int \mathscr{D}\varphi^1 \mathscr{D}\varphi^2 \cdots \mathscr{D}\varphi^n (1 + J_1)[1 + \mathrm{i}\Delta I_{\text{eff}} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J\, \delta\varphi^\alpha] \cdot \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}_{\text{eff}} + J_\alpha \varphi^\alpha)\} \tag{5-15-6}$$

略去高阶小量，将式(5-15-5)代入式(5-15-6)，由于生成泛函式(5-14-3)在式(5-15-3)变换下不变，则有 $\left.\frac{\delta Z}{\delta \varepsilon_\sigma(x)}\right|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} = 0$，可得

$$\int \mathscr{D}\varphi^1 \mathscr{D}\varphi^2 \cdots \mathscr{D}\varphi^n \int \mathrm{d}^4 x \Big\{ \partial_\mu \Big[\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^\alpha_{,\mu}} (\xi^{\alpha\sigma} - \varphi^\alpha_{,\mu}\tau^{\nu\sigma}) + \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} - W^{\mu\sigma} \Big] - R^\sigma - J_0^\sigma + J_\alpha(\xi^{\alpha\sigma} - \varphi^\alpha_{,\mu}\tau^{\nu\sigma}) \Big\} \cdot \exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\mathscr{L}_{\text{eff}} + J_\alpha \varphi^\alpha) \Big\} = 0 \tag{5-15-7}$$

式中：$J_0^\sigma = \left.\frac{\mathrm{i}\delta \bar{J}}{\delta \varepsilon_\sigma(x)}\right|_{\varepsilon(x)=0}$. 将式(5-15-7)关于 $J(t_j)$ 求 n 次泛函微商，仿式(5-10-34)～式(5-10-38)的推导，可得

$$\partial_\mu \Big[\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^\alpha_{,\mu}} (\xi^{\alpha\sigma} - \varphi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma}) + \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{\mu\sigma} - W^{\mu\sigma} \Big] - R^\sigma - J_0^\sigma = 0 \tag{5-15-8}$$

式(5-15-8)给出了 Lagrange 量和约束均具有规范不变的系统量子水平下的变换性质，它有别于经典水平下系统的变换性质的结果[27,51]，与经典结果相比，这里出现的有效 Lagrange 量和 J_0^σ，它们反映了量子效应. 从式(5-15-8)可以看出，当系统的有效 Lagrange 量在整体无穷小变换下仅改变一个四维散度项，且对应的无穷小定域变换的 Jacobi 行列式为 1，形式上得到同经典 Noether 定理相应的量子水平 Noether 定理的结果，即

$$Q^\sigma = \int_V \mathrm{d}^3 x \Big[\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{eff}}}{\partial \varphi^\alpha_{,0}} (\xi^{\alpha\sigma} - \varphi^\alpha_{,\nu}\tau^{\nu\sigma}) + \mathscr{L}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma} - W^{0\sigma} \Big] = \text{const} \quad (\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{5-15-9}$$

不同的是经典 Noether 定理中的 Lagrange 量换成了有效 Lagrange 量，这正是量子效应的结果. 下面给出式(5-15-9)的一个应用.

对含 Maxwell 项的复标量场与 Abel CS 项耦合的非线性 σ-模型[35]，描写该系统的 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{f}(\mathrm{D}_\mu Z_k)^*(\mathrm{D}^\mu Z_k)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu\partial^\nu A^\lambda \quad (5\text{-}15\text{-}10)$$

该系统有附加约束 $Z_kZ_k^*=1$，$k=1,2$，协变微商 $\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu$，$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$。可以看出，描写该系统的 Lagrange 量和附加约束条件 $G_w=Z_kZ_k^*-1\approx 0$ 在

$$\left.\begin{aligned} A'_\mu(x)&=A_\mu(x)+\partial_\mu\theta(x)\\ Z'(x)_k&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}Z_k(x)\\ Z^{*\prime}(x)_k&=Z_k^*(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}15\text{-}11)$$

的定域规范变换下，均是规范不变的，为规范不变系统．利用 Lagrange 乘子 λ^w，可以得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^*=&\frac{1}{f}(\mathrm{D}_\mu Z_k)^*(\mathrm{D}^\mu Z_k)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\\&\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu\partial^\nu A^\lambda+\lambda^w G_w\end{aligned} \quad (5\text{-}15\text{-}12)$$

对 $\mathscr{L}^*$ 描述的系统按 FP 量子化方案量子化时，可以取 Coulomb 规范 $\Omega_0=\partial_i A_i\approx 0$，也不出现鬼场．有效 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 同经典运动的 Lagrange 量 $\mathscr{L}^*$ 比较多出了规范固定项．

考虑 (x_1,x_2) 平面内的转动，用位形空间量子水平的守恒律式(5-15-9)，求出该系统量子水平的角动量，即

$$\begin{aligned}L=&\int\mathrm{d}^2x\,\varepsilon^{ij}(x_i\pi_k\partial_j Z_k+x_i\pi_k\partial_j Z_k^*-x_kF_{0i}\partial_jA^k)-\\&\int\mathrm{d}^2xF_{0i'}S_{12}^{i'j'}A_{j'}+\frac{Q^2}{2\kappa}\end{aligned}$$

式中

$$Q=\int\mathrm{d}^2xJ_0,\ J_0=\mathrm{i}[Z_k\pi_k-Z_k^*\pi_k]$$

此结果说明，该系统具有分数统计和分数自旋的性质，与文献[35]中相空间分析得出的结论一致．

从式(5-15-8)可以看出，有附加约束的规范不变系统，即使有效作用量 I_{eff} 在式(5-15-1)的整体变换下不变（$R^\sigma=0$），一般也得不到该规范不变系统量子水平的守恒律，因为路径积分（泛函积分）的测度在式(5-15-3)的定域变换下可能发生了改变．一般来说，当有效作用量 I_{eff} 在式(5-15-1)的整体变换下改变，定域变换式(5-15-3)的 Jacobi 行列式不为 1 时，可以用式(5-15-8)研究该有附加约束的规范不变系统在量子水平的变换性质．

5-15-2 电磁波在介质分界面处量子水平的"横移"效应

电磁波入射到两种介质分界面上反射和折射时电磁场应满足边界条件，

研究电磁波在介质分界面附近的性质，可将边界条件看做是一种附加约束[23-25]，因描写自由电磁场的 Lagrange 量及边界条件均是规范不变的，可以看做是规范不变系统. 于是，可以用式(5-15-8)研究电磁波在介质分界面处量子水平的变换性质. 本小节将用位形空间 FP 量子化方案，讨论 Poincaré 群变换下电磁场在介质分界面附近量子水平的变换性质，并对经典水平电磁波"横移"效应给出的结论予以量子修正. 由 5-14-2 小节可知，量子化后电磁场的有效 Lagrange 量由式(5-14-18)表示.

考虑电磁场在位形空间的 Poincaré 群整体无穷小变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma}\tau^{\mu\sigma}(x, A_{\nu}, A^{\rho}_{,\nu}) \\ A^{\mu\prime}(x') &= A^{\mu}(x) + \Delta A^{\mu}(x) = \\ &\quad A^{\mu}(x) + \varepsilon_{\sigma}\xi^{\mu\sigma}(x, A_{\nu}, A^{\rho}_{,\nu}) \end{aligned}\right\} \tag{5-15-13}$$

下，自由电磁场的 $\mathscr{L}$ 不变，场量的总变分与实质变分的关系为

$$\Delta A^{\mu}(x) = \delta A^{\mu}(x) + A^{\mu}_{,\nu}(x)\Delta x^{\nu}$$

电磁场为矢量场

$$A^{\mu\prime}(x) = a_{\mu\nu}A^{\nu}(x), \quad \det|a_{\mu\nu}| = 1$$

所以，在式(5-15-13)变换下的 Jacobi 行列式为 1. 从式(5-15-8)得

$$\partial_{\nu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}(\xi^{\mu\sigma} - A^{\mu}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) + \mathscr{L}\tau^{\nu\sigma}\right] =$$

$$\left[-\partial_{\nu}\left(\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\mu}_{,\nu}}\right) + \frac{1}{\alpha_{0}}\partial_{\lambda}A^{\lambda}_{,\mu}\right](\xi^{\mu\sigma} - A^{\mu}_{,\rho}\tau^{\rho\sigma}) \tag{5-15-14}$$

式(5-15-14)是在式(5-15-13)变换下，电磁场在介质分界面处的量子水平的变换性质方程，它同电磁场在介质分界面出的经典理论相比多出一项，它对应于 $\frac{1}{\alpha_{0}}\partial_{\nu}A^{\nu}_{,\mu}\delta A^{\mu}$，这正是电磁场量子化后量子效应的体现.

下面用式(5-15-14)讨论 Poincaré 群变换下电磁波在介质分界面附近量子水平的变换性质. 对电磁波波包在介质界面上反射和折射时垂直于入射面方向的量子水平的能量中心的"横移"[1]，给出了量子水平的"横移效应".

1. 平移变换

$$\Delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}, \quad \Delta A^{\mu} = 0, \quad \delta A^{\mu} = -A^{\mu}_{,\nu}\varepsilon^{\nu} \tag{5-15-15}$$

场变换的 Jacobi 行列式为 1，代入式(5-15-14)得

$$\partial_{\nu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{\alpha}_{,\nu}}A^{\alpha,\mu} - g^{\eta\mu\nu}\mathscr{L}\right] =$$

$$\left[-\partial_{\nu}\left(\lambda^{w}\frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\alpha}_{,\nu}}\right) + \frac{1}{\alpha_{0}}\partial_{\nu}(A^{\nu}_{,\alpha})\right]A^{\alpha,\mu} \tag{5-15-16}$$

式(5-15-16)可写为

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = H^\mu \tag{5-15-17}$$

式中

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^\alpha_{,\nu}} A^{\alpha,\mu} - g^{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{5-15-18}$$

$$H^\mu = -\partial_\nu\left(\lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial A^\alpha_{,\nu}}\right)A^{\alpha,\mu} + \frac{1}{\alpha_0}\partial_\nu(A^\nu_{,\alpha})A^{\alpha,\mu} \tag{5-15-19}$$

将式(5-15-17)对 3 维空间积分，得

$$\begin{aligned}\partial^0\int T_{\mu 0}\mathrm{d}V =& -\int_{x_3=0}(T^{(1)}_{\mu 3} + \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial A^\alpha_{(1),3}}A^\alpha_{(1),\mu} - \frac{1}{\alpha_0}A^3_{(1),\alpha}A^\alpha_{(1),\mu})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \\ &\int_{x_3=0}\left(T^{(2)}_{\mu 3} + \lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial A^\alpha_{(2),3}}A^\alpha_{(2),\mu} - \frac{1}{\alpha_0}A^3_{(2),\alpha}A^\alpha_{(2),\mu}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \\ &\Delta^{(1)}_\mu - \Delta^{(2)}_\mu\end{aligned} \tag{5-15-20}$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta^{(j)}_\mu =& \int_{V(j)}\Big[\partial_0\left(\lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial A^\alpha_{(j),0}}A^\alpha_{(j),\mu} - \frac{1}{\alpha_0}A^0_{(j),\alpha}A^\alpha_{(j),\mu}\right) - \\ &\lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial A^\alpha_{(j),\nu}}A^\alpha_{(j),\mu\nu} + \frac{1}{\alpha_0}A^\nu_{(j),\alpha}A^\alpha_{(j),\mu\nu}\Big]\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{5-15-21}$$

这里将全 3 维空间按分界面分为 2 个区域 $V_j(j=1,2)$，$A^\alpha_{(j)}$ 等代表 $A^\alpha(x)$ 在区域 V_j 中的取值[38]．将式(5-15-19)代入式(5-15-20)，得

$$\partial^0\int T_{\mu 0}\mathrm{d}V = \delta^3_\mu\int_{x_3=0}(T^{(2)}_{\mu 3} - T^{(1)}_{\mu 3})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \Delta^{(1)}_\mu - \Delta^{(2)}_\mu \tag{5-15-22}$$

因为 $\int T_{\mu 0}\mathrm{d}V = (H,\boldsymbol{P})$ 是电磁场的四动量，式(5-15-22)表明，当分界面无穷薄时，分量 P_1,P_2 和 H 能量是守恒的.

2. Lorentz 变换

$$\Delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}x_\nu, \Delta A^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}A^\beta \tag{5-15-23a}$$

$$\delta A^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}(\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}A^\beta + x_\mu A^\alpha_{,\nu} - x_\nu A^\alpha_{,\mu}) \tag{5-15-23b}$$

电磁势 A^α 属 Lorentz 群矢量表示，$\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu$，矢量场变换的 Jacobi 行列式为 1. 将式(5-15-23)代入式(5-15-14)，得

$$\begin{aligned}&\partial_\lambda\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^\alpha_{,\lambda}}\varepsilon^{\mu\nu}(\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}A^\beta + x_\mu A^\alpha_{,\nu} - x_\nu A^\alpha_{,\mu}) + \mathscr{L}\varepsilon^{\lambda\nu}x_\nu\right] = \\ &\left[-\partial_\nu\left(\lambda^w \frac{\partial G_w}{\partial A^\alpha_{,\nu}}\right) + \frac{1}{\alpha_0}\partial_\nu A^\nu_{,\alpha}\right]\cdot \\ &\varepsilon^{\rho\sigma}(D^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}A^\beta + x_\rho A^\alpha_{,\sigma} - x_\sigma A^\alpha_{,\rho})\end{aligned} \tag{5-15-24}$$

计算整理得

$$\partial^{\nu} J_{\kappa\mu\nu} = H_{\kappa\mu} \tag{5-15-25}$$

式中

$$J_{\kappa\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{\alpha}_{,\nu}} \mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\kappa\mu} A^{\beta} + x_{\kappa} T_{\mu\nu} - x_{\mu} T_{\kappa\nu} \tag{5-15-26}$$

$$H_{\kappa\mu} = \left[- \partial_{\nu} \left(\lambda^{w} \frac{\partial G_{W}}{\partial A^{\alpha}_{,\nu}} \right) + \frac{1}{\alpha_0} \partial_{\nu} A^{\nu}_{,\alpha} \right] \cdot \left(\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\kappa\mu} A^{\beta} + x_{\kappa} A^{\alpha}_{,\mu} - x_{\mu} A^{\alpha}_{,\kappa} \right) \tag{5-15-27}$$

$J_{\kappa\mu\nu}$ 为电磁场的动量矩(角动量)密度的张量. 将式(5-15-25)对 3 维空间区域积分，得

$$\partial^{0} \int J_{\kappa\mu 0} \mathrm{d}V = \int_{x_3=0} (x_{\kappa} \delta_{\mu 3} - x_{\mu} \delta_{\kappa 3}) (\mathscr{L}^{(2)} - \mathscr{L}^{(1)}) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \Delta^{(1)}_{\kappa\mu} + \Delta^{(2)}_{\kappa\mu} \tag{5-15-28}$$

式中

$$\Delta^{(j)}_{\kappa\mu} = \int_{V(j)} \left\{ \partial_{0} \left[\left(\lambda^{w} \frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\alpha}_{(j),0}} - \frac{1}{\alpha_0} A^{0}_{(j),\alpha} \right) (\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\kappa\mu} A^{\beta}_{(j)} + x_{\kappa} A^{\alpha}_{(j),\mu} - x_{\mu} A^{\alpha}_{(j),\kappa}) \right] + \left(-\lambda^{w} \frac{\partial G_{w}}{\partial A^{\alpha}_{(j),\nu}} + \frac{1}{\alpha_0} A^{\nu}_{(j),\alpha} \right) \partial_{\nu} (\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{\kappa\mu} A^{\beta}_{(j)}) + x_{\kappa} A^{\alpha}_{(j),\mu} - x_{\mu} A^{\alpha}_{(j),\kappa} \right\} \mathrm{d}V$$

$$M_1 = \int J_{230} \mathrm{d}V,\ M_2 = \int J_{310} \mathrm{d}V,\ M_3 = \int J_{120} \mathrm{d}V \tag{5-15-29}$$

M_1, M_2, M_3 是电磁波的角动量分量，当分界面无限薄时，M_3 是守恒的. 由式(5-15-29)可以求得电磁波在介质界面处反射波和折射波的能量中心. 令 $\mu = 0$，$k = i(i = 1,2,3)$，将 $J_{\kappa 00}$ 和 $\mathrm{D}^{\alpha\beta}_{i0}$ 代入式(5-15-29)得

$$\partial^{0} \int x_i T_{00} \mathrm{d}V = - \int_{x_3=0} x_0 \delta_{i3} (\mathscr{L}^{(2)} - \mathscr{L}^{(1)}) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \partial^{0} \int (A^{i}_{,0} A^{0} - A^{0}_{,0} A^{i} + x_0 T_{i0}) \mathrm{d}V + \Delta^{(1)}_{i0} + \Delta^{(2)}_{i0} \tag{5-15-30}$$

电磁波的能量中心坐标为 $X_i = \frac{1}{iH} \int x_i T_{00} \mathrm{d}V$，从式(5-15-30)可得电磁波能量中心的运动方程

$$H \frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t} - (\Delta^{(1)}_{i} + \Delta^{(2)}_{i}) X_i = P_i - (\Delta^{(1)}_{0} + \Delta^{(2)}_{i}) x_0 + \int (A^{i}_{,00} A^{0} - A^{0}_{,00} A^{i}) \mathrm{d}V + \Delta^{(1)}_{i0} + \Delta^{(2)}_{i0} \tag{5-15-31}$$

式(5-15-31)表明，在量子水平下电磁波波包的能量中心沿垂直于入射面方向 存在“横向移动”，从式(5-15-31)可知，$(\Delta^{(1)}_{0} + \Delta^{(2)}_{0})$ 和 $(\Delta^{(1)}_{i0} + \Delta^{(2)}_{i0})$ 是存在

的，式(5-15-31)中的结果与经典结果式(5-7-12)不同的是多了一项规范固定项的贡献，这正是考虑了电磁场的量子化所带来的量子修正. 此结果表明，式(5-7-12)中的结果仅适用于经典水平；在量子理论中，必须计及量子修正.

参 考 文 献

[1] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1993.

[2] 李子平. 约束哈密顿系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1999.

[3] 梅凤翔，刘端，罗勇. 高等分析力学. 北京：北京理工大学出版社，1991.

[4] Gantmacher F. Lectures in analytical mechanics. Moscow：Mir Publishers，1970.

[5] Benavent F，Gomis J. Poincaré -Cartan integral invariant for constrained systems. Ann Phys (N Y)，1979，118：476-489.

[6] Dominic D，Gomis J. Poincaré -Cartan integral invariant and canonical transformations for singular Lagrangian. J Math Phys，1980，21：2124-2130.

[7] Sugano R，Kamo H. Poincaré -Cartan integral invariant form and dynamical systems with constraints. Prog Theor Phys，1982，69：1966-1988.

[8] Sugano R. Poincaré -Cartan integral invariant form and dynamical systems with constraints. Prog Theor Phys，1982，68：1377-1393.

[9] 李爱民，李子平. 非完整约束奇异系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量. 物理学报，2004，53：2816-2819.

[10] Jin Xiaoyue，Li Ziping. On the invalidity of Dirac's conjecture for a system with a singular higher-order Lagrangian. Phys A：Math Gen，2001，24：10201-10207.

[11] 李爱民，张晓沛，李子平. 高阶微商系统 Dirac 猜想的反例. 物理学报，2003，52：943-945.

[12] Li Aimin，Jiang Jinhuan，Li Ziping. Canonical symmetry properties of the constrained singular generalized mechanical system. Chin Phys，2003，12：467-471.

[13] Li Ziping，Wu Bichu. Symmetry in extended phase space for singular Lagrangian with subsidiary constraints. Int J Theor Phys，1994，33：1063-1075.

[14] 李子平. 非保守非完整系统的守恒量. 自然杂志，1988，11(7)：554-555.

[15] 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京：北京工业学院出版社，1987.

[16] Li Ziping. Symmetry in a constrained Hamiltonian system with a singular higher-order Lagrangian. Phys A：Math Gen，1991，24：4216-4274.

[17] Li Ziping. Symmetry in phase space for a system with a singular higher-order Lagrangian. Phys Rev，1994，E50：876-887.

[18] 梅凤翔. 约束系统的对称性和守恒量. 北京：北京理工大学出版社，2004.

[19] Li Ziping ，Jiang Jinhuan. Symmetries in constrained canonical systems. Beijing：

Science Press, 2002.
[20] Li Ziping, Long Zhenwen. Quantum symmetry for a system with a singular higher-order Lagrangian. Phys A: Math Gen, 1999, 32: 6391-6407.
[21] Zhang Ying, Li Ziping. The quantal Poincaré-Cartan integral invariant for singular higher-order Lagrangian in field theory. Euro Phys, 2005, C41: 257-263.
[22] Li Ruijie, Li Ziping. Symmetries in a constrained system with a singular higher-order Lagrangian. Int J Theor Phys, 2006, 45(2): 395-420.
[23] Liu Xinya. Some properties of electromagnetic waves near the interface of dielectric media. Phys A: Math Gen, 1991, 24: 323-327.
[24] Li Ziping, Wu Bichu. On the transerse shift of the reflection and refraction of electtromagnetic waves on the interface of dielectric media. Commun Theor Phys, 1995, 24: 251-254.
[25] Liu Xinya. Theoretical study of deflection of reflected and refracted of electromagnetic waves from incident plane. Commun Theor Phys, 1996, 25: 361-265.
[26] Li Ziping. The symmetry of the constrained system with higher-order derivatives. Acta Math Sci, 1985, 5(4): 379-388.
[27] 李子平. 约束系统的变换性质. 物理学报, 1981, 30: 1559-1671.
[28] Fedoseyev V G. Spin-independent transverse shift of the center of gravity of a reflected and of a refracted light beam. Optics Commun, 2001, 193: 9-18.
[29] Javier A. Transverse angular shift in the reflection of light beams. Optics Commun, 2000, 182: 1-10.
[30] 李子平. 高阶微商场论中奇异系统正则形式的 Noether 定理和 Poincaré-Cartan 积分不变量. 中国科学, 1992, 22: 977-986.
[31] Faddeev L D. Feynman integral for singular Lagrangians. Theor Math Phys, 1970, 1: 1-13.
[32] Senjanovic P. Path integral quanzitation of field theories with second-class constraints. Ann Phys(N Y), 1976, 100: 227-269.
[33] Faddeev L D, Popov V N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. Phys Lett, 1967, B25: 29-30.
[34] 张莹, 李爱民, 李子平. 含 Hopf 项和 Maxwell-Simons 项 O(3)非线性 σ-模型的分数自旋和分数统计性质. 物理学报, 2005, 54: 43-46.
[35] 王永龙, 李子平. 含 Maxwell-Chern-Simons 项 CP^1 非线性 σ-模型的分数自旋和分数统计性质. 高能物理与核物理, 2004, 28(7): 696-698.
[36] 张莹, 李子平. 非 Abel Chern-Simons 理论中量子水平的分数自旋性质. 物理学报, 2005, 54: 2611-2613.
[37] Karabar D, Murthy G. Possible phase transition of fractional spin and in the O(3) non-linear sigma model. Phys Rev, 1987, D35: 1522-1524.

[38] 李爱民，李子平. 规范不变系统量子水平的变换性质及应用. 物理学报，2008，57：7571-7576.

[39] Li Ziping, Jiang Jinhuan. The quantal canonical Symmetires for a singular Lagrangian system with subsidiary constraints. Int J Theor Phys, 20010, 49(3): 564-574.

[40] 李子平. 量子系统的整体正则对称性. 中国科学，1996，A26(7)：649-656.

[41] Li Ziping. Global canonical symmetry in the phase space path integral for a system with a singular Lagrangian. Euro Phys Lett, 1996, 34(5): 325-329.

[42] 李子平. 奇异拉氏量系统的整体正则对称性质. 物理学报，1996，45：1601-1608.

[43] Li Ziping. Canonical global symmetry in the functional integral formalism of the system and conservation laws. Z Phys, 1997, C76: 181-189.

[44] 李子平. 约束系统正则形式的对称性质. 物理学报，1992，41：710-719.

[45] Li Ziping. Canonical symmetry for a constrained Hamiltonian system and canonical Ward identity. Int Theor Phys, 1995, 34: 523-543.

[46] Li Ziping, Yang Chi. Quantal canonical symmetry for a constrained Hamiltonian system. Phys A: Math Gen, 1995, 28: 5931-5941.

[47] Wilczek F. Quantum mechanics of fractional-spin particles. Phys Rev Lett, 1982, 49: 957-959.

[48] Lerda A. Anyons. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[49] Banerjee R, Chakraborty B. Fractional spin and Galilean symmetry in a Chern-Simons matter system. Phys Rev, 1994, D49(10): 5431-5437.

[50] Panigrahi K, Roy S, Scherer W. Rotational anomaly and fractional spin in the gauged CP^1 nonlinear σ-model with the Chern-Simons term. Phys Rev Lett, 1988, 61: 2827-2830.

[51] 李子平. 拉氏乘子和重质量杨-Mills场. 高能物理与核物理，1982，6：555-559.